

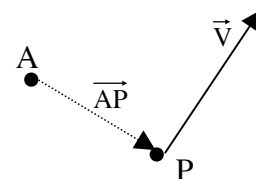
CUESTIONES

- 1) a) Define el momento de un vector respecto a un punto.
- b) Demuestra y explica el teorema de Varignon para un sistema de vectores concurrentes.

SOLUCION

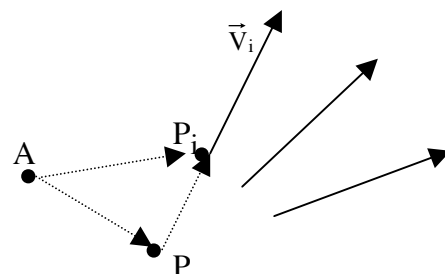
a) El momento de un vector $\vec{V}$ respecto a un punto A, es el producto vectorial del vector que va del punto A al origen del vector P con el propio vector $\vec{V}$.

$$\vec{M}_A \vec{V} = \vec{AP} \times \vec{V}$$



b) El teorema de Varignon dice que el momento de un sistema de vectores concurrentes (momento resultante) es igual al momento de la resultante aplicado en el punto de concurrencia.

Si tenemos un sistema de n vectores concurrentes $\vec{V}_i$, cada uno de ellos aplicado en un punto P_i , y que concurren en un punto P, el momento del sistema respecto a un punto A es:

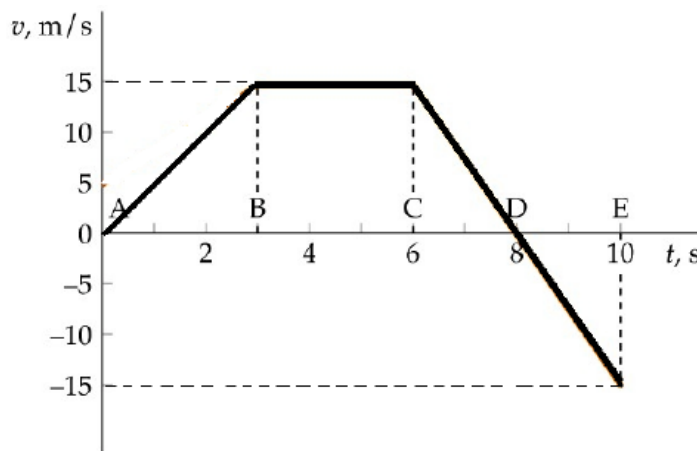


$$\vec{M}_A = \sum_{i=1,n} \vec{AP}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1,n} (\vec{AP} + \vec{PP}_i) \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1,n} \vec{AP} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1,n} \vec{PP}_i \wedge \vec{V}_i$$

Sacando factor común a $\vec{AP}$ y teniendo en cuenta que $\vec{PP}_i$ es paralelo a $\vec{V}_i$ y por lo tanto $\vec{PP}_i \wedge \vec{V}_i = 0$ para todos los vectores i,

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \sum_{i=1,n} \vec{V}_i = \vec{AP} \wedge \vec{R}$$

- 2) Recordando El movimiento unidimensional de una partícula viene representado en la gráfica adjunta, representar las aceleraciones (0.5) y el desplazamiento de la partícula en función del tiempo (0.5).



SOLUCION

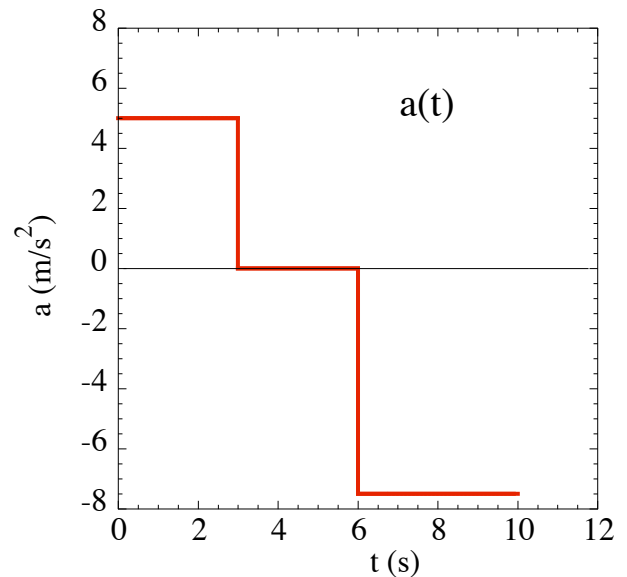
a) En el tramo AB, la velocidad crece linealmente, por lo que el movimiento es uniformemente acelerado:

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s}^2$$

En el tramo BC la velocidad es constante, por lo que la aceleración vale 0: $a_{BC} = 0 \text{ m/s}^2$

Finalmente en el tramo CE la velocidad disminuye de forma lineal, por lo que el movimiento es uniformemente decelerado:

$$a_{CE} = \frac{v_C - v_E}{t_C - t_E} = \frac{-30}{4} = -7.5 \text{ m/s}^2$$



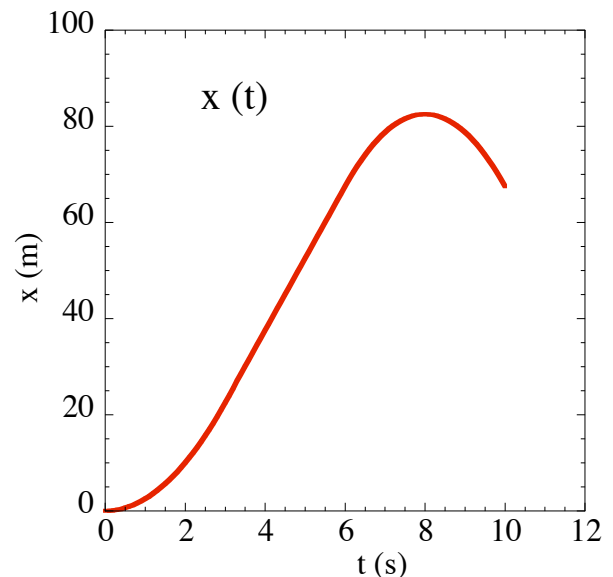
b) En el tramo AB $x_{AB} = x_A + v_A (t - t_A) + \frac{1}{2} a_{AB} (t - t_A)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 5 t^2 = 2.5 t^2 \text{ m}$

para $t_B = 3 \text{ s}$ $x_B = 22.5 \text{ m}$

En el tramo BC, $x_{BC} = x_B + v_{BC} (t - t_B) = 22.5 + 15 (t - 3) \text{ m}$

Para $t_C = 6 \text{ s}$, $x_C = 22.5 + 15 (6 - 3) = 67.5 \text{ m}$

En el tramo CE $x_{CE} = x_C + v_C (t - t_C) + \frac{1}{2} a_{CE} (t - t_C)^2 = 67.5 + 15 (t - 6) + \frac{1}{2} (-7.5) (t - 6)^2 \text{ m}$



3) Recordando que la relación entre la aceleración de la gravedad observada desde la Tierra ($\vec{g}$) y la que ve un observador inercial ($\vec{g}_0$) es: $\vec{g} = \vec{g}_0 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

a) Explica los efectos observados desde la Tierra cuando un objeto cae verticalmente por la acción de la gravedad.

b) ¿Son iguales dichos efectos en el hemisferio norte y en el sur?

c) ¿En que partes de la Tierra son máximos y mínimos dichos efectos?

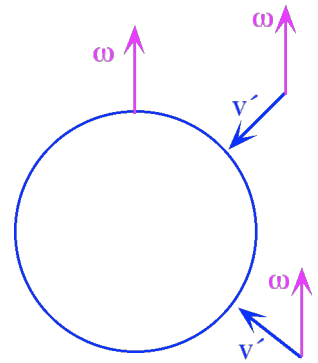
Haga dibujos que le ayuden a explicar los apartados anteriores y razone todas las respuestas.



SOLUCION:

En esta cuestión solamente consideraremos los efectos asociados a $\mathbf{v}'$, que dan lugar a la aceleración de Coriolis, y no describiremos los asociados a la posición " $\mathbf{r}$ " que dan lugar a la aceleración centrífuga.

a) Si la figura representa un corte de la Tierra, el producto vectorial de $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$, es un vector perpendicular al papel que sale hacia nosotros. Como la aceleración de Coriolis lleva un signo menos, el vector entrara hacia el papel, es decir, va dirigido hacia el Este.



b) Esto sucede tanto en el Hemisferio Norte como en el Sur, es decir los efectos son iguales.

c) Como $\boldsymbol{\omega}$ es constante, para un mismo valor de $\mathbf{v}'$, la aceleración de Coriolis será máxima cuando $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{v}'$ formen 90 grados, es decir en el ecuador y mínima cuando formen 0 o 180 grados, es decir en los Polos.

4) Un cuerpo oscila con MAS a lo largo del eje x . Su posición viene dada por: $x = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ donde

todas las magnitudes están medidas en el S.I. Calcular:

a) La velocidad y la aceleración en cualquier instante t .

b) La amplitud, la frecuencia y el periodo del movimiento.

SOLUCION:

a) La velocidad y la aceleración las calculamos derivando la posición:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = -4\pi \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)} \quad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

b) Teniendo en cuenta que $x = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right) = A \cos(2\pi \nu t + \delta)$, comparamos con la ecuación del movimiento, obteniendo:

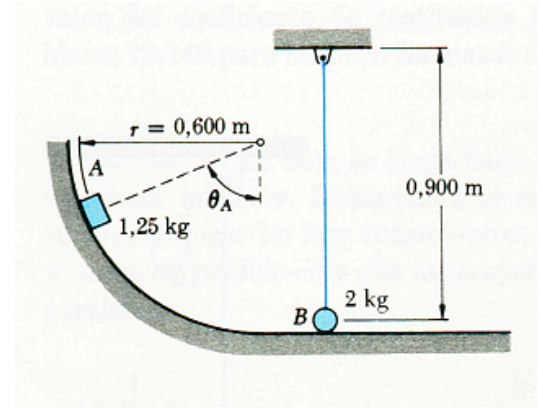
$$\boxed{\begin{aligned} A &= 4 \text{ m} \\ T &= 2 \text{ segundos} \\ \nu &= 0.5 \text{ Hz} \end{aligned}}$$



PROBLEMAS

1) Se deja en libertad un bloque A cuando $\theta_A = 90^\circ$ y desliza, sin rozamiento, hasta chocar con la bola B . Sabiendo que el coeficiente de restitución en el choque es $e = 0.90$, calcular:

- Las velocidades de A y B inmediatamente después del choque
- La máxima tensión que soporta el hilo que sostiene a B
- La altura máxima a la que se eleva B
- La energía perdida en el choque.



∫

SOLUCION

a) Aplicando la conservación de la energía podemos calcular la velocidad con la que el bloque A impacta en la bola B :

$$m_A g r = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2 g r} = 3.43 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación de conservación de momentos lineales y la del coeficiente de restitución y tomando el sentido positivo hacia la derecha:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_A + m_2 v_B &= m_1 v_A' + m_2 v_B' \Rightarrow m_1 v_A = m_1 v_A' + m_2 v_B' \\ e &= -\frac{v_B' - v_A'}{v_B - v_A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_A' &= -0.58 \text{ m/s} \\ v_B' &= 2.51 \text{ m/s} \end{aligned}$$

vemos que el bloque A retrocede hacia la izquierda después del choque.

b) La máxima tensión en la cuerda se produce cuando B se encuentra en el punto más bajo (justo después del choque) ya que en esa situación la velocidad de B es mayor y por lo tanto tiene una mayor aceleración normal que tiene que producir la tensión menos la componente normal del peso que en esta situación es máxima.

$$T - m_B g = m_B \frac{v_B'^2}{L} \Rightarrow T = m_B g + m_B \frac{v_B'^2}{L} = 33.6 \text{ N}$$

c) Aplicando la conservación de la energía entre la posición inicial, justo después del choque, y la posición final cuando ha ascendido una altura h :

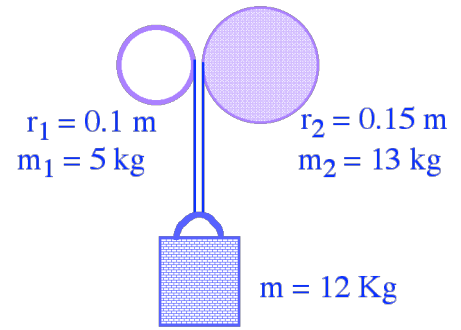
$$\frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B g h \Rightarrow h = \frac{v_B'^2}{2g} = 0.32 \text{ m}$$

d) La variación de energía producida en el choque será:

$$\left(\frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_A v_A^2 \right) = 0.86 \text{ J}$$


2) El sistema que muestra la figura está constituido por un anillo de radio $r_1 = 0.1 \text{ m}$ y masa $m_1 = 5 \text{ kg}$, un cilindro homogéneo de radio $r_2 = 0.15 \text{ m}$ y masa $m_2 = 13 \text{ kg}$ y una masa $m = 12 \text{ kg}$. Soltamos esta última desde el reposo y la dejamos caer 6 m . Despreciando el rozamiento calcular:

- Los momentos de inercia del anillo y del cilindro.
- La velocidad final de la masa cuando ha descendido los 6 m .
- La aceleración.
- La aceleración angular del anillo y del cilindro.
- La tensión en ambas cuerdas.



SOLUCION

a) El anillo tiene toda su masa en el borde, a una distancia r_1 del eje, por lo que el momento de inercia es

$$I_1 = m_1 r_1^2 = 5 \cdot 0.1^2 = 0.05 \text{ kgm}^2$$

El cilindro, al ser homogéneo, tiene un momento de inercia igual al de un disco:

$$I_2 = (1/2) m_2 r_2^2 = (1/2) 13 \cdot 0.15^2 = 0.146 \text{ kgm}^2$$

b) La velocidad se puede calcular por energías, la pérdida de energía potencial se convierte en energía cinética de traslación y de rotación:

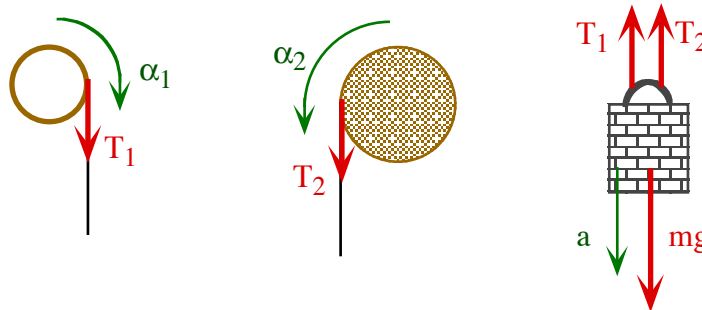
$$mgh = 1/2 mv^2 + 1/2 I_1 \omega_1^2 + 1/2 I_2 \omega_2^2$$

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la angular $\omega_1 = v/r_1$ y $\omega_2 = v/r_2$

$$mgh = 1/2 mv^2 + 1/2 I_1 (v/r_1)^2 + 1/2 I_2 (v/r_2)^2 = 1/2 v^2 (m + I_1/r_1^2 + I_2/r_2^2) = 1/2 v^2 (m + m_1 + m_2/2) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 mgh}{m + m_1 + m_2/2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 9.81 \cdot 6}{12 + 5 + 13/2}} = 7.75 \text{ m/s}$$

c) Tenemos que aplicar $\Sigma F = ma$ en la masa y $\Sigma M = I\alpha$ para las dos poleas



$$r_1 T_1 = I_1 \alpha_1$$

$$r_2 T_2 = I_2 \alpha_2$$

$$mg - T_1 - T_2 = ma$$

$$\Rightarrow T_1 = I_1 [\alpha_1 / r_1] = m_1 r_1^2 [(a/r_1) / r_1] = m_1 a$$

$$\Rightarrow T_2 = I_2 [\alpha_2 / r_2] = (1/2) m_2 r_2^2 [(a/r_2) / r_2] = (1/2) m_2 a$$



Sustituyendo los valores de T_1 y T_2 en la 3ª ecuación:

$$mg - m_1 a - (1/2)m_2 a = ma \Rightarrow mg = (m + m_1 + (1/2)m_2) a \Rightarrow$$

$$a = \frac{mg}{m + m_1 + (1/2)m_2} = \frac{12 \cdot 9.81}{12 + 5 + (1/2)13} = 5.01 \text{ m/s}^2$$

d) $\alpha_1 = a/r_1 = 5.01 / 0.1 = 50.1 \text{ rad/s}^2$
 $\alpha_2 = a/r_2 = 5.01 / 0.15 = 33.4 \text{ rad/s}^2$

e) $T_1 = m_1 a = 5 \cdot 5.01 = 25.05 \text{ N}$

$$T_2 = (1/2)m_2 a = (1/2)13 \cdot 5.01 = 32.56 \text{ N}$$

3) La figura representa la sección transversal de una presa cuya longitud perpendicular al diagrama es de 30 m. la profundidad del agua situada detrás de la presa es de 10 m, el material con el que se ha construido la presa tiene una densidad $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$. Determinar:

a) La presión absoluta en el fondo del embalse.

b) La fuerza ejercida sobre el cristal de un reloj sumergible de 3 cm de diámetro si en su interior hay aire a presión atmosférica y el reloj se encuentra en el fondo del embalse.

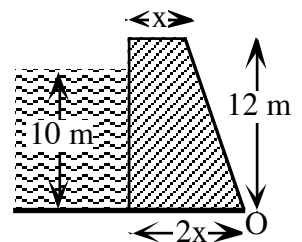
c) Determinar la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la presa y el punto de aplicación de dicha fuerza.

d) Hallar el valor de x si el peso de la presa es 10 veces mayor que la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre ella.

e) ¿Puede volcar la presa alrededor del borde que pasa por O?

f) ¿Como influye en las respuestas anteriores el tamaño del embalse situado detrás de la presa?

Nota: el centro de masas de una placa triangular se encuentra a $1/3$ de la base y a $2/3$ del vértice opuesto, cualquiera que sea el lado elegido como base.



SOLUCION

a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (P_{atm}) mas la debida al agua:

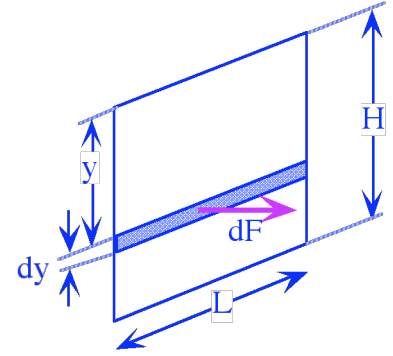
$$P = P_{atm} + \rho g H = 1.013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10 = 1.013 \cdot 10^5 + 0.981 \cdot 10^5 \Rightarrow P = 1.944 \cdot 10^5 \text{ Pascales}$$

b) Como el reloj en su interior esta a P_{atm} , la fuerza neta que actúa sobre el cristal es la debida a la presión del agua: $F = (P_{ext} - P_{int}) \text{ Area} = \rho g H \text{ Area} = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10 \cdot \pi (0.015)^2 \Rightarrow F = 69.34 \text{ N}$



c) Como P_{atm} actúa en ambos lados de la presa, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es $P = \rho g y$. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L , toda ella situada a una profundidad y , la fuerza que actúa sobre la misma será:

$$dF = P ds = PL dy = \rho g y L dy$$



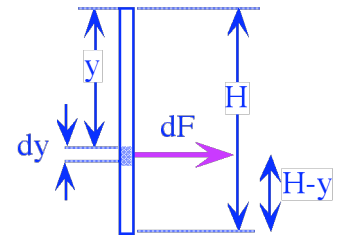
Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$F = \int_0^H \rho g y L dy = \rho g L \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H = \frac{(1/2) \rho g L H^2} \Rightarrow F = (1/2) 10^3 \cdot 9.81 \cdot 30 \cdot 10^2 = 14.715 \cdot 10^6 \text{ N}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento respecto a un punto del fondo de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM = dF(H-y) = \rho g y L dy (H-y)$$



donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^H \rho g y L (H-y) dy = \rho g L \int_0^H (Hy - y^2) dy = \rho g L \left(H \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^H \right) = \rho g L \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) \Rightarrow$$

$$M = (1/6) \rho g L H^3$$

Si el punto de aplicación está a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6) \rho g L H^3}{(1/2) \rho g L H^2} \Rightarrow d = (1/3) H = 3.3333 \text{ m}$$

Nota: en los apartados anteriores H es la altura del agua; la de la presa la llamaremos h .



d) El peso de la presa es mg , con la masa igual al volumen por la densidad ($m = V\rho$), el volumen la sección por la longitud ($V = S L$) y la Sección la de un rectángulo + la de un triángulo:

$$S = xh + (1/2) xh = (3/2) xh.$$

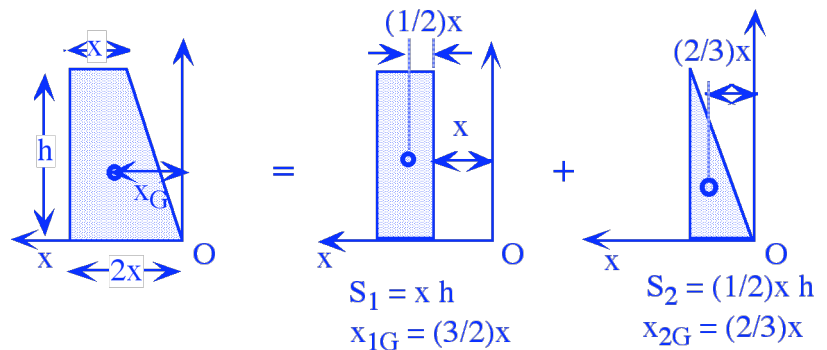
Sustituyendo todos estos valores: $m = (3/2) xhL\rho$, y planteando la igualdad $mg = 10F \Rightarrow$

$$(3/2) xh L\rho g = 10 F \Rightarrow x = 10 F / [(3/2) h L \rho g] = 10 \cdot 14.715 \cdot 10^6 / [(3/2) 12 \cdot 30 \cdot 3000 \cdot 9.81] \Rightarrow$$

$$x = 9.259 \text{ m}$$

e) Para calcular si la presa puede volcar por el borde que pasa por O, debemos de conocer primero el punto de aplicación del peso de la presa. El momento del peso respecto a O solo depende de la coordenada x_G , así que solo necesitaremos conocer dicha coordenada.

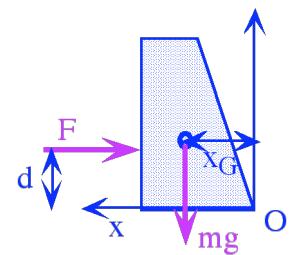
El procedimiento más sencillo consiste en dividir la presa en dos partes, una de sección rectangular y otra de sección triangular, cuyas componentes x de los centros de masas son conocidas: (podemos utilizar las secciones o las masas totales)



$$x_G = \frac{\sum m_i x_{Gi}}{\sum m_i} = \frac{(3/2) x h L\rho + (2/3) x (1/2) x h L\rho}{x h L\rho + (1/2) x h L\rho} = \frac{(3/2 + 1/3)x}{3/2} = \frac{11/6 x}{3/2} = (11/9)x \Rightarrow$$

$$x_G = 11.317 \text{ m}$$

En la figura se representan las dos fuerzas que actúan sobre la presa. La del agua origina un momento respecto a O que trata de volcarla (momento -), mientras que el momento del peso, la estabiliza (momento +). Si la suma de los momentos es positiva, la presa estará estable.



$$\Sigma M = mg x_G - F d = 10F \cdot 11.317 - F \cdot 3.333 = 109.8 F \Rightarrow M \geq 0 \Rightarrow \text{la presa estará estable}$$

d) El tamaño del embalse situado detrás de la presa **no influye** en ninguno de los apartados anteriores. Solo influye la altura del agua.

