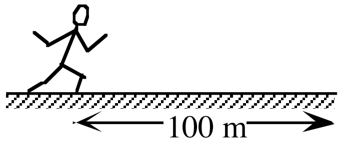
EXAMEN DE FISICA I (I.I.) 9-9-2010

CUESTIONES

---

1) Un velocista corre una carrera de 100 m en 10 s. Aproximar este movimiento suponiendo una aceleración cte. en los primeros 15 m y una velocidad constante en los restantes 85 m. Determinar:

a) La velocidad final.
b) El tiempo necesario para completar los primeros 15 m.
c) El tiempo necesario para recorrer los restantes 85 m.
d) La aceleración en los primeros 15 m.



SOLUCION

a) Llamamos t_1 al tiempo que tarda en recorrer los primeros 15 m y t_2 al tiempo que tarda en recorrer los restantes 85 m, se cumple que

$$t_1 + t_2 = 10 \qquad [1]$$

En el **primer tramo** realiza un movimiento uniformemente acelerado por lo que la ecuación es:
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ y como parte del reposo($v_0 = 0$) se puede escribir:

$$15 = \tfrac{1}{2} a t_1^2 \qquad [2]$$

Además, $v_f = a\, t_1$ por lo que sustituyendo la aceleración en la ecuación [2]:

$$15 = \tfrac{1}{2} (v_f / t_1) t_1^2 = \tfrac{1}{2} v_f\, t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = 30/ v_f} \quad [3]$$

En el **segundo tramo** el movimiento es un uniforme, por lo que la ecuación que hay que utilizar es $x = v\, t$, que en nuestro caso se transforma en:

$$85 = v_f\, t_2 \Rightarrow \boxed{t_2 = 85/ v_f} \quad [4]$$

Sustituyendo las ecuaciones [3] y [4] en la [1],

$$30/ v_f + 85/ v_f = 10 \Rightarrow 115/ v_f = 10 \Rightarrow \boxed{v_f = 11.5 \text{ m/s}}$$

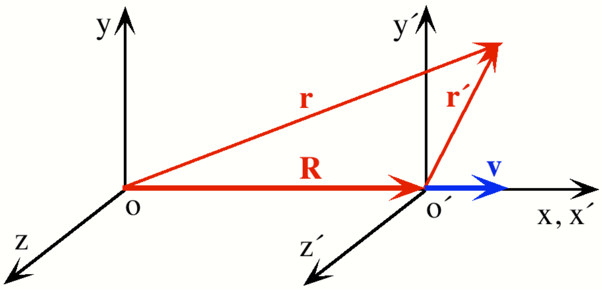
b) Utilizando la ecuación [3] $\boxed{t_1 = 30/ 11.5 = 2.61 \text{ s}}$

c) Utilizando la ecuación [4] $\boxed{t_2 = 85/ 11.5 = 7.39 \text{ s}}$

d) $\boxed{a = v_f / t_1 = 11.5 / 2.61 = 4.41 \text{ m/s}^2}$

2) Relación entre las coordenadas espaciales, velocidades y aceleraciones en el movimiento relativo de traslación uniforme (Transformaciones Galileanas). ¿Cuando no se pueden utilizar estas trasformaciones, y hay que utilizar las de Lorentz? Da una idea de porqué.

SOLUCION



Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : **v** = v**i**

Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será **R** = **oo´** = **v**t = vt **i**
La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´.**

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'} \Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}' \Rightarrow \begin{cases} Vx = v + V'x \\ Vy = V'y \\ Vz = V'z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad. Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: $d\mathbf{v}/dt = 0$ y $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a}'$ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales).

Las transformaciones de Galileo dejan de ser validas cuando las velocidades entre los sistemas de referencia se acercan a la velocidad de la luz. En ese caso tenemos que utilizar las transformaciones de Lorentz. La razón esta en que la luz tiene que llevar la misma velocidad para los dos sistemas de referencia, y esto solo se cumple si aplicamos las transformaciones de Lorentz.

Para velocidades de desplazamiento entre sistemas pequeñas (v << c) aunque apliquemos las transformaciones de Galileo, la luz lleva prácticamente la misma velocidad c para los dos sistemas. Sin embargo, si v tiende a c, al aplicar las transformaciones de Galileo, encontraríamos claramente diferentes velocidades para la luz en los dos sistemas y ello nos obliga a utilizar Lorentz.

3) Un bloque descansa sobre el tablero de una mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T.

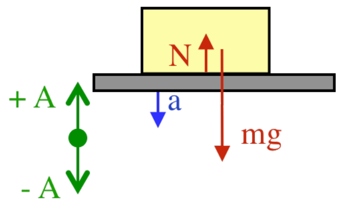
a) Si la oscilación es vertical ¿cuál es el máximo valor de A que permitirá al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa?

b) Si la oscilación es horizontal, y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es μ, ¿cuál es el máximo valor de A para que el bloque no se deslice.

SOLUCION

a) En un MAS,

$$x = A\cos\omega t$$
$$v = -A\omega \, \mathrm{sen}\,\omega t$$
$$a = -A\omega^2 \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad a_{max} = A\omega^2$$



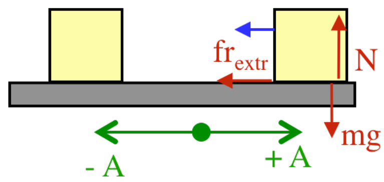
En la parte superior de la oscilación, aplicando la 2ª ley de Newton

$mg - N = ma \quad \Rightarrow \quad N = m\,(g - a)$

En esa parte la $a = a_{max}$, además, si el bloque permanece en reposo:

$$N \geq 0 \;\Rightarrow\; g - a_{max} \geq 0 \;\Rightarrow\; g - A\omega^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A \leq g/\omega^2 = g/(2\pi/T)^2 = gT^2/(4\pi^2)}$$

b) La fuerza que produce la aceleración es la fuerza de rozamiento,



$$fr = ma = m\,(-A\omega^2 \cos\omega t)$$

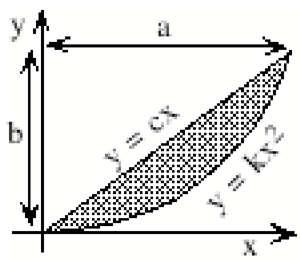
Esta fuerza tiene un valor máximo en los extremos de la trayectoria:

$$fr_{extr} = m\,A\omega^2$$

Además la fuerza de rozamiento siempre tiene que ser menor que la fuerza de rozamiento máxima ($=\mu N$):

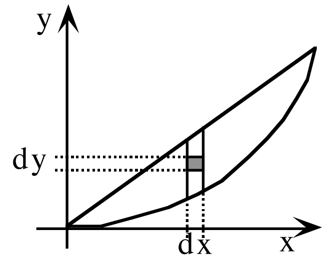
$$fr_{extr} \leq fr_{max} \;\Rightarrow\; m\,A\omega^2 \leq \mu mg \;\Rightarrow\; \boxed{A \leq \mu g/\omega^2 = \mu g/(2\pi/T)^2 = \mu g T^2/(4\pi^2)}$$

4) Determinar el centro de gravedad de las placa de la figura.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea



$x_{CM} = \dfrac{\int x\, da}{\int da}$ y teniendo en cuenta que $da = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta y una parábola de coeficientes c = b/a y k = b/a respectivamente, llegamos a la ecuación de partida:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy} = \frac{\int_0^a x dx \int_{kx^2}^{cx} dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a x dx \left[y\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx \left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a x dx\,(cx - kx^2)}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

donde primero hemos integrado dy entre la parábola (kx^2) y la recta (cx) y posteriormente integraremos la variable x entre o y a.

$$= \frac{\int_0^a (cx^2 - kx^3)\, dx}{\int_0^a (cx - kx^2)\, dx} = \frac{\left[c\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{c\frac{a^3}{3} - k\frac{a^4}{4}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b}{a}\frac{a^3}{3} - \frac{b}{a^2}\frac{a^4}{4}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{ba^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{12}ba^2}{\frac{1}{6}ba} = \boxed{\frac{1}{2}\, a}$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy} = \frac{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} y dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx \left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a dx\, \frac{(c^2x^2 - k^2x^4)}{2}}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

$$= \frac{\left[\frac{c^2}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[\frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{\frac{c^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{k^2}{2}\frac{a^5}{5}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b^2/a^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2/a4}{2}\frac{a^5}{5}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{b^2a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{30}b^2a}{\frac{1}{6}ba} = \frac{6}{15}\, b = \boxed{0.4\, b}$$

PROBLEMAS

---

1) Sobre una partícula de masa m= 4 kg actúa una fuerza **F** = -2x **i** -4y **j** N.
a) ¿Es una fuerza central? ¿Por qué?
b) Determinar el trabajo que realiza dicha fuerza cuando movemos a la partícula desde la posición A (0, -2) hasta la posición B (1, -1) siguiendo la trayectoria $x = t$, $y = t^2 - 2$.
c) Cuánto vale dicho trabajo si seguimos la trayectoria $x = t^2$, $y = -2 + t$. ¿Es una fuerza conservativa?
d) Determinar la función energía potencial asociada a dicha fuerza. ¿Cómo son las curvas equipotenciales? Dibújalas en un plano xy.

SOLUCION

a) la fuerza **F** = -2x **i** - 4y **j** no es una fuerza central, ya que **F** no es paralelo a **r** (= x**i** + y**j**), es decir, no podemos escribir **F** = f(r)**r**

b) El trabajo se define como

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,.\,\vec{dr} = \int_A^B \left(-2x\hat{i} - 4y\hat{j}\right)\left(dx\hat{i}+dy\hat{j}\right) \qquad (1)$$

En la primera trayectoria: $x = t$, $y = t^2 - 2$, por lo que derivando: $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$.

Sustituyendo los valores de x, y, dx, dy en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que la posición A = (0, -2) corresponde a un tiempo t=0 y la B = (1,-1) en un tiempo t = 1, nos queda

$$W_{AB} = \int_0^1 \left[-2t\hat{i} - 4(t^2 - 2)\,\hat{j}\right]\left[\hat{i} + 2t\hat{j}\right] dt = \int_0^1 \left(-2t - 8t^3 + 16t\right) dt = \left[\frac{-2t^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{8t^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{16t^2}{2}\right]_0^1 = -1 -2 + 8 = 5\ \mathrm{J}$$

c) En la segunda trayectoria: $x = t^2$, $y = -2 + t$, por lo que derivando: $dx = 2t\,dt$, $dy = dt$.

Sustituyendo de nuevo estos valores en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que las posiciones A = (0, -2) y B= (1, -1) corresponden de nuevo a tiempos 0 y 1 respectivamente:

$$W_{AB} = \int_0^1 \left[-2t^2\hat{i} - 4(-2+t)\,\hat{j}\right]\left[2t\hat{i} + \hat{j}\right] dt = \int_0^1 \left(-4t^3 - 4t + 8\right) dt = \left[\frac{-4t^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{4t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\,8t\right]_0^1 = -1 - 2 + 8 = 5\ \mathrm{J}$$

Como el W no depende de la trayectoria, la fuerza es conservativa y tiene asociada una Ep.

d) Para determinar la energía potencial, relacionamos el trabajo entre dos puntos con la variación de Ep.

$$W_{A\text{-}B} = -\Delta E_p = -(E_{PB} - E_{PA})$$

$$W_{A\text{-}B} = \int_A^B \vec{F}.\,\vec{dr} = \int_A^B -\left(2x\hat{i} + 4y\hat{j}\right)\left(dx\hat{i} + dy\hat{j}\right) = \int_A^B -2x dx + \int_A^B 4y dy =$$

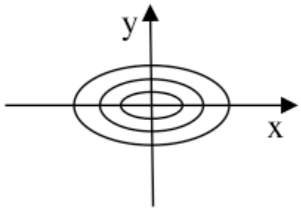
$$\left[\frac{-2x^2}{2}\right]_A^B + \left[\frac{-4y^2}{2}\right]_A^B = -\left[(x_B^2 - x_A^2) + 2(y_B^2 - y_A^2)\right] = -\left[(x_B^2 + 2y_B^2) - (x_A^2 + 2y_A^2)\right]$$

comparando ambas expresiones se observa que $Ep = x^2 + 2y^2 + \text{cte.}$

Si en el origen considerados $Ep = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0 \Rightarrow \boxed{Ep = x^2 + 2y^2}$

Por lo tanto las curvas equipotenciales son las que verifican la ecuación:

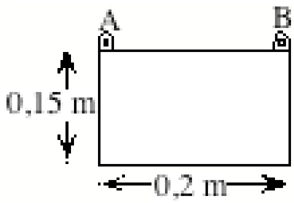
$x^2 + 2y^2 = \text{cte}$, y son elipses:



---

2) Una placa rectangular de 20 kg de masa está suspendida de los puntos A y B, como indica la figura.

a) Determinar el momento de inercia de la placa respecto un eje perpendicular a la misma que pasa por el punto B. Suponer que la placa es uniforme.

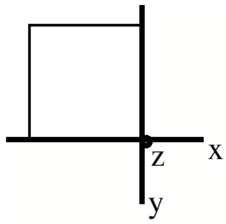


Si se rompe el pasador A:

b) ¿Cuál será la aceleración angular de la placa en el instante inicial?

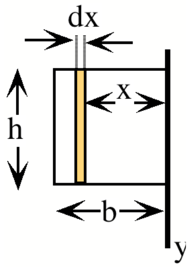
c) ¿Cuál será la velocidad angular de la misma cuando pase por la posición de equilibrio?

SOLUCION



a) En teoría se ha visto que cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_z, es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_x e I_y, y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_z.

$$I_z = I_x + I_y$$



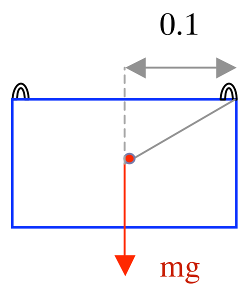
$$I_y = \int_0^b dm\, x^2 = \int_0^b \sigma\, ds\, x^2 = \int_0^b \sigma\, h\, dx\, x^2 = \sigma h \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}\sigma h b\, b^2 = \frac{1}{3} m\, b^2$$

Por analogía, el momento de inercia respecto al eje x, será: $I_z = \dfrac{1}{3} m\, h^2$

El momento de inercia respecto al eje z será:

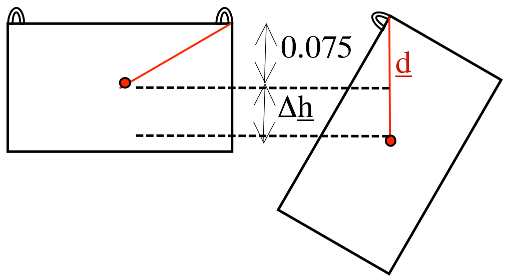
$$I_z = \frac{1}{3} m\, b^2 + \frac{1}{3} m\, h^2 = \frac{1}{3} m\,(b^2 + h^2) = \frac{1}{3} 20\,(0.2^2 + 0.15^2) = 0.4167 \text{ kg m}^2$$

b)) Para calcular la aceleración angular aplicamos $\sum \mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$, todo respecto al punto B. La única fuerza que origina momento respecto del punto B es el peso aplicado en el centro de masas $\Rightarrow$ la ecuación anterior se transforma en



$$mg\ 0.1 = 0.4167\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 20 \cdot 9.81 \cdot 0.1 / 0.4167 = 47.09\ \text{rad/s}^2}$$

c) Cuando la placa rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. La variación de altura entre la posición inicial y cuando el centro de masas está en la posición mas baja es:



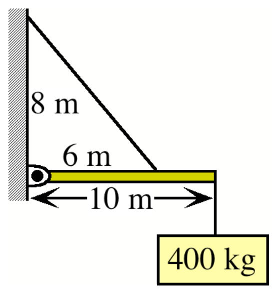
$$\boxed{\Delta h = d - 0.75 = \sqrt{0.2^2 + 0.15^2} - 0.075 = 0.05\ \text{m}}$$

La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de rotación:

$$mg\Delta h = 1/2\ I\ \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2mg\Delta h}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 9.81 \cdot 0.05}{0.467}} = 6.86\ \text{rad/s}}$$

---

3) Un extremo de una viga uniforme de 100 kg y 10 m de longitud cuelga mediante una bisagra de una pared vertical. Se mantiene horizontalmente mediante un cable que sujeta la viga a una distancia de 6 m desde la pared, como muestra la figura. Del extremo libre de la viga se suspende un peso de 400 kg.

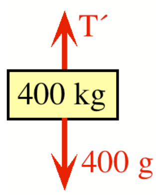


a) Representa todas las fuerzas que actúan sobre la viga.
b) ¿Qué tensión soporta el cable?
c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la viga sobre la bisagra?

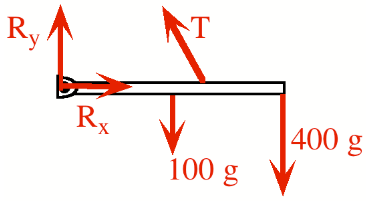
Si el cable lo dejamos sujeto a la pared 8 m por encima de la bisagra, pero permitimos que su longitud varíe de modo que pueda conectarse a la viga a diversas distancias x de la pared:
d) ¿A qué distancia de la pared debe sujetarse para que la fuerza sobre la bisagra no tenga componente vertical?

SOLUCION

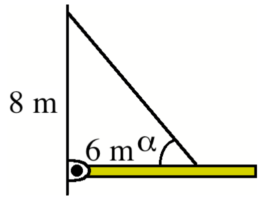
a) Como los 400 kg están en reposo, el cable que los sujeta soporta una fuerza de T´ = 400 g. Esta fuerza se propaga por el cable hasta la viga



Las fuerzas que actúan sobre la viga son:



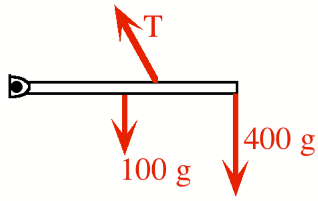
b) Como paso previo calculamos el ángulo α que forma el cable con la viga:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{8}{100} = 0.8$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{6}{100} = 0.6 \Rightarrow \qquad \alpha = 53.13°$$

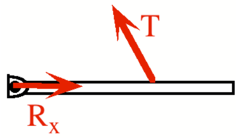
Para determinar las fuerzas, lo mas sencillo es comenzar con $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al gozne:



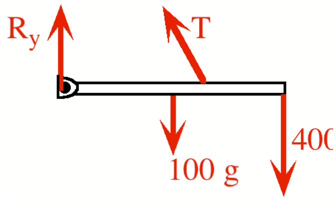
$$T\ 6\ \text{sen}\ \alpha - 100\ g\ 5 - 400\ g\ 10 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{4500\ g}{6\ \ \text{sen}\alpha} = \frac{4500\ 9.81}{6\ \ 0.8} = 9196.9\ \text{N}}$$

c) Primero determinamos las fuerzas que ejerce la bisagra sobre la viga



$$\sum Fx = 0 \ \Rightarrow\ Rx - T\cos\alpha = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{Rx = T\cos\alpha = 9196.9\ \ 0.6\ = 5518\ \text{N}}$$

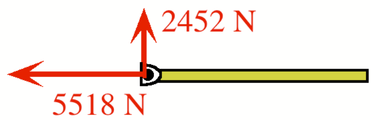


$$\sum Fy = 0 \ \Rightarrow\ Ry + T\text{sen}\ \alpha - 100\ g - 400\ g = 0 \ \Rightarrow$$

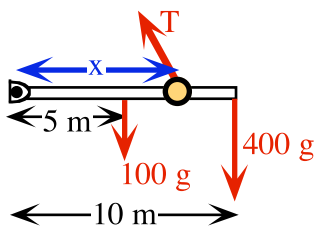
$$\boxed{Ry = 500\ \ 9.81 - 9196.9\ \ 0.8\ = -2452.5\ \text{N}}$$

El que salga negativo significa que el sentido es el contrario al representado en la figura, es decir, va dirigida hacia abajo.

Las fuerzas que ejerce la viga sobre la bisagra son las opuestas (-Rx, -Ry), es decir:



d) Al variar x, se modifican el valor de T y el ángulo que forma con la viga. Si Ry = 0, la forma mas directa de calcular x, es la de suponer que $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al punto en que la cuerda engancha a la viga. Las únicas fuerzas que originan momentos diferentes de 0 son la tensión del cuerpo colgado y el peso de la viga:



$$400\ g\ (10 - x)\ - 100\ g\ (x - 5) = 0 \ \Rightarrow$$

$$4000 - 400\ x - 100\ x + 500 = 0 \Rightarrow \qquad 500x = 4500 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{x = 9\ \text{m}}$$