

EXAMEN DE FISICA I (I.Q.) 9-9-2009

CUESTIONES

- 1) La velocidad de una partícula es $\mathbf{v} = 2t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} - 2 \mathbf{k}$ donde t se mide en segundos y $\mathbf{v}$ en m/s. Sabiendo que en instante inicial la partícula está en el origen de coordenadas calcular:
- El vector aceleración y el vector posición en función del tiempo.
 - El vector unitario tangente a la trayectoria en el instante $t = 1$ s.
 - Las componentes intrínsecas de la aceleración en ese mismo instante.

SOLUCION:

a) La aceleración es la derivada de la velocidad $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \Rightarrow \mathbf{a} = 2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} \text{ m/s}^2$

La posición es la integral de la velocidad: $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \Rightarrow \int d\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt = \int (2t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} - 2 \mathbf{k}) dt \Rightarrow$

$$\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + (t^3/3) \mathbf{j} - 2t \mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Como para $t = 0$ $\mathbf{r} = 0$, el vector constante $\mathbf{C}$ vale también cero $\Rightarrow \mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + (t^3/3) \mathbf{j} - 2t \mathbf{k}$

- b) El vector tangente a la trayectoria es la velocidad, por lo que un vector unitario en $t = 1$ s será:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = (2/3) \mathbf{i} + (1/3) \mathbf{j} - (2/3) \mathbf{k}$$

- c) La aceleración tangencial es la derivada del modulo de la velocidad $a_t = d|\mathbf{v}|/dt \Rightarrow$

$$a_t = d(4t^2 + t^4 + 4)^{1/2} / dt \Rightarrow a_t = (1/2) (4t^2 + t^4 + 4)^{-(1/2)} (8t + 4t^3) = \frac{8 + 4t^2}{2\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{12}{2\sqrt{9}} \Rightarrow$$

$$a_t = 2 \text{ m/s}^2$$

La aceleración normal es igual al modulo de la velocidad al cuadrado dividido por el radio de curvatura, pero como no conocemos el radio de curvatura, tenemos que utilizar el hecho de que la aceleración normal y tangencial son perpendiculares:

$$|\mathbf{a}|^2 = a_t^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{(2^2 + 2^2) - 2^2} = 2 \text{ m/s}^2$$

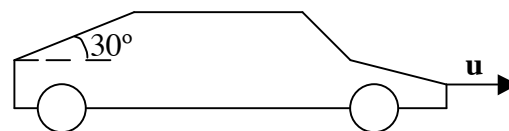


2) Un automovilista, cuando está detenido, observa que las gotas de lluvia caen verticales con una velocidad de 50 km/h

a) Si el automóvil se pone a circular a una velocidad $u = 70$ km/h, ¿qué velocidad llevan las gotas para el

automovilista y qué ángulo forman las gotas de lluvia en los cristales laterales?

b) Si su cristal trasero forma 30 grados con la horizontal, ¿qué velocidad mínima tendría que llevar el coche para que el agua no le golpee sobre el cristal trasero.

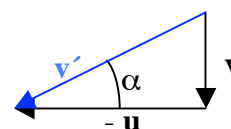


SOLUCION:

a) En el movimiento relativo de traslación uniforme, se cumple que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}' \Rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$

Observando la gráfica de las velocidades se deduce que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\mathbf{v}|}{|-\mathbf{u}|} = \frac{50}{70} \Rightarrow \alpha = 35.53^\circ$$

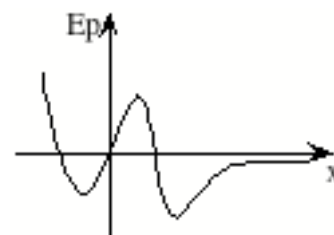


Además, por Pitágoras $|\mathbf{v}'| = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 + |-\mathbf{u}|^2} = \sqrt{50^2 + 70^2} = 86.02 \text{ km/h}$

b) En la gráfica anterior, si $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 30 = \frac{|\mathbf{v}|}{|-\mathbf{u}|} \Rightarrow |\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{v}|}{\operatorname{tg} 30} = \frac{50}{1/\sqrt{3}} = 86.6 \text{ km/h}$

Esta será la velocidad mínima del coche. Si la velocidad u es mayor de 86.6 km/h, el ángulo será menor de 30° y las gotas de lluvia no golpearán sobre el cristal trasero.

3) Dada la siguiente curva de energía potencial especificar el tipo de movimiento que sigue el móvil en función de su energía mecánica total.



SOLUCION

Existen 4 posibilidades distintas de energía total.

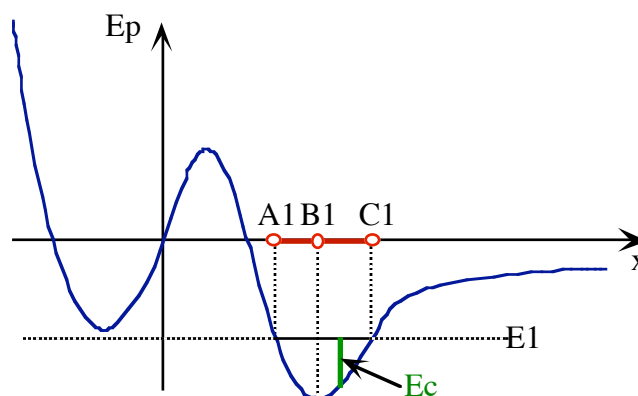
E1.

El móvil solo puede moverse entre los puntos A1 y C1.

En los puntos A1 y C1, la E_c es 0 y el móvil estará en reposo. La diferencia de alturas entre la energía total ($E1$) y la E_p es la E_c , que será máxima en el punto B1.

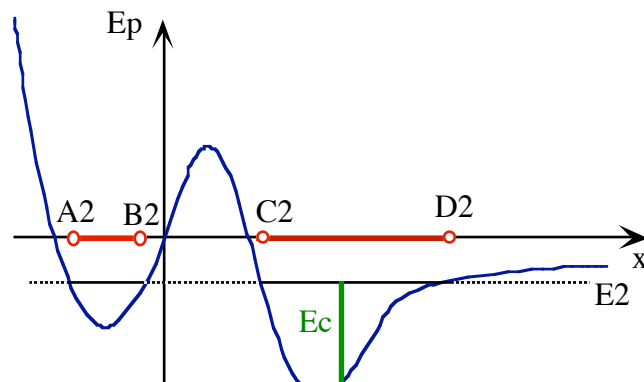
Si dejásemos libre el móvil en A1, este partiría del reposo hacia C1 acelerando. Al llegar a B1 alcanzaría la máxima velocidad, en dicho punto la aceleración es 0. Una vez superado B1, comienza a decelerar, llegando a C1 con velocidad 0. Aquí comienza a moverse de vuelta hacia A1.

El móvil estaría moviéndose indefinidamente entre A1 y C1 de forma periódica.



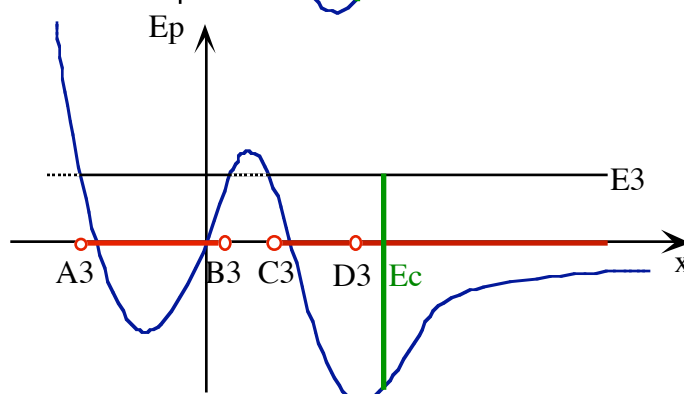
E2.

El móvil solo se puede mover entre A2 y B2 o entre C2 y D2. No tiene energía suficiente para pasar de una región a otra. Dentro de cada una de las regiones, el movimiento sería periódico, tal como hemos descrito para E1.



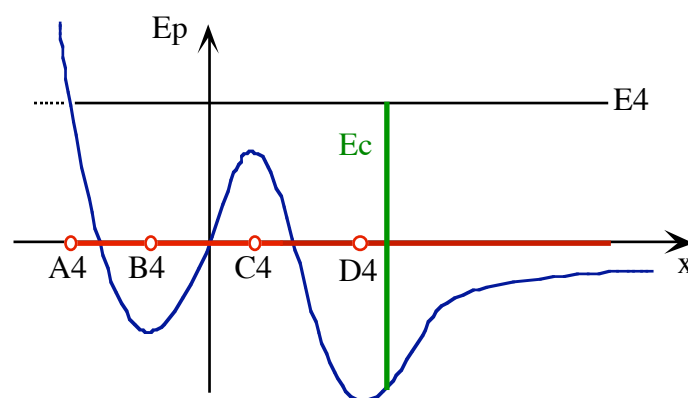
E3.

El móvil solo se puede mover entre A3 y B3 o entre C3 y $+\infty$. No tiene energía suficiente para pasar de una región a otra. En la 1ª región el movimiento será periódico, tal como lo describimos para E1. Si esta en la 2ª región, la partícula se puede mover entre C3 y $+\infty$. Si parte de C3, en reposo, acelerará hasta D3, donde alcanza su máxima velocidad y después se alejara hacia el ∞ decelerando continuamente pero sin pararse nunca.



E4.

El móvil se moverá entre A4 y el infinito, y no es un movimiento periódico. Si parte del reposo en A4, acelerará hasta llegar a B4, donde alcanza un máximo en la velocidad, decelera hasta C4 donde llega con un mínimo local en la velocidad, vuelve a acelerar hasta D4 (nuevo máximo) para decelerar continuamente hacia el infinito.



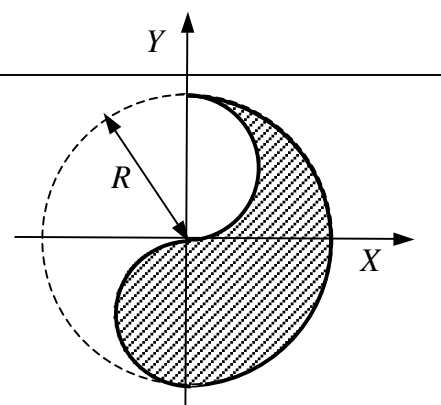
- 4) Calcular el centro de masas de una placa homogénea semicircular. Utilizar este resultado para determinar las coordenadas del centro de masas de la placa plana rayada en la figura, cuyo perímetro está formado por tres semicircunferencias con centros alineados, y que tiene una densidad superficial constante σ .

Nota, recordar que

$$S_{\text{disco}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

$$V_{\text{esfera}} = (4/3)\pi R^3$$



SOLUCION:

La placa se supone la suma de dos placas semicirculares, una de radio R y otra de radio R/2, a las que le restamos otra placa semicircular de radio R/2.



Por simetría, los centros de masas de las placas semicirculares están a lo largo de la línea que divide las placas en 2 partes iguales.

Para saber en que posición de dicha línea se encuentra el centro de masas, aplicamos el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que el volumen es igual a área de la superficie generatriz multiplicada por el espacio que recorre el centro de masas:

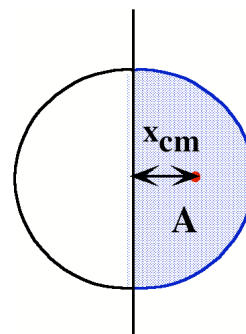
$$V = 2\pi x_{cm} A$$

Con A = área de la placa $\Rightarrow A = (1/2) \pi R^2$

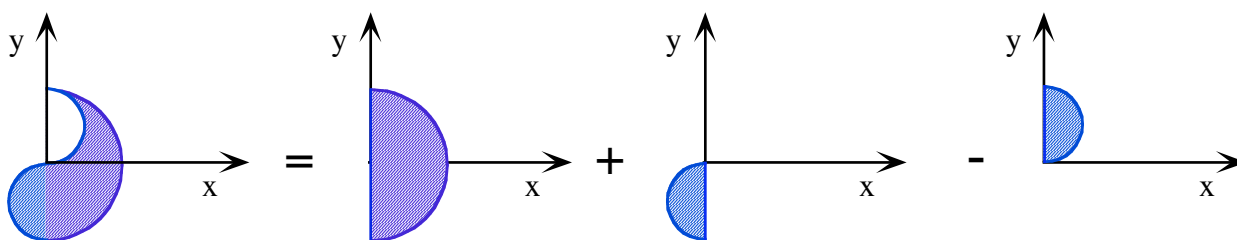
y V = volumen de la esfera que genera $\Rightarrow V = (4/3) \pi R^3$

Introduciendo estos valores en la ecuación: $(4/3) \pi R^3 = 2\pi x_{cm} (1/2) \pi R^2 \Rightarrow$

$$x_{cm} = (4R/3\pi)$$



A continuación descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$$A_1 = (1/2) \pi R^2$$

$$x_{cm1} = (4R/3\pi)$$

$$y_{cm1} = 0$$

$$A_2 = (1/2) \pi (R/2)^2 = (1/8) \pi R^2$$

$$x_{cm2} = - (4(R/2)/3\pi) = - (2R/3\pi)$$

$$y_{cm2} = -R/2$$

$$A_3 = (1/8) \pi R^2$$

$$x_{cm3} = (2R/3\pi)$$

$$y_{cm3} = R/2$$

$$x_{cm} = \frac{\sum A_i x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{\frac{\pi R^2}{2} \frac{4R}{3\pi} + \frac{\pi R^2}{8} \frac{-2R}{3\pi} - \frac{\pi R^2}{8} \frac{2R}{3\pi}}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{\frac{2R^3}{3} - \frac{R^3}{12} - \frac{R^3}{12}}{\frac{\pi R^2}{2}} \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\frac{6R^3}{12}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R}{\pi}$$

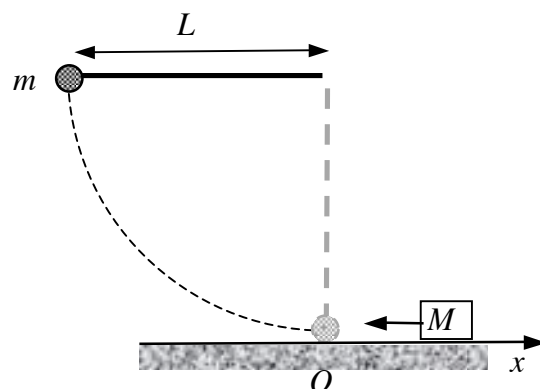
$$y_{cm} = \frac{\sum A_i y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{\frac{\pi R^2}{2} 0 + \frac{\pi R^2}{8} \frac{-R}{2} - \frac{\pi R^2}{8} \frac{R}{2}}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{-\frac{\pi R^2}{8} R}{\frac{\pi R^2}{2}} = -\frac{R}{4}$$



PROBLEMAS

1) Considerar un péndulo consistente de una masa $m = 1 \text{ kg}$ colgada de un hilo de largo $L = 1 \text{ m}$. Se suelta el péndulo con el hilo horizontal, como indica la figura. Al llegar la masa m al punto inferior (punto O de la figura) choca contra una masa $M = 2m$ que se mueve con velocidad $-v_0 \hat{i} = -1 \text{ m/s } \hat{i}$. Si el choque es parcialmente elástico y el coeficiente de restitución es $e = 0.8$, determinar:

- La tensión en la cuerda que sujeta a m en el momento justo antes del choque.
- La velocidad de M después del choque.
- La altura máxima a la que rebota el péndulo.
- La energía perdida en el choque.



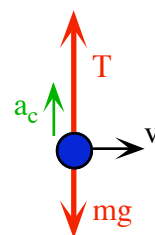
SOLUCION:

a) Primero calculamos la velocidad que lleva la masa m en la parte inferior. Por energías:

$$mgL = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1} = 4.429 \text{ m/s}$$

Aplicando la 2ª ley de Newton en el punto mas bajo:

$$T - mg = mv^2/R \Rightarrow T = m(g + v^2/R) = m(g + 2gL/L) = mg(1 + 2) = 3mg = 24.9 \text{ N}$$



b) Al ser un choque parcialmente elástico, las velocidades de los dos objetos después del choque son diferentes, por lo que tendremos que aplicar dos ecuaciones: la de conservación del momento lineal, y la del coeficiente de restitución:

$$\begin{cases} mv_1 + Mv_2 = m v'_1 + M v'_2 \Rightarrow m \cdot 4.429 + 2m \cdot (-1) = m v'_1 + 2m v'_2 \Rightarrow 2.429 = v'_1 + 2 v'_2 & [1] \\ e = -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} \Rightarrow 0.8 = -\frac{v'_2 - v'_1}{(-1) - 4.429} \Rightarrow 4.343 = v'_2 - v'_1 & [2] \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones [1] y [2] se elimina v'_1 y nos queda: $6.772 = 3 v'_2 \Rightarrow v'_2 = 2.257 \text{ m/s}$

Introduciendo este valor en la ecuación [2] $\Rightarrow v'_1 = 2.257 - 4.343 = -2.086 \text{ m/s}$



c) Después del choque, la energía mecánica se conserva, por lo que en la posición de máxima altura, toda la energía cinética se ha convertido en potencial:

$$\frac{1}{2} m(v'_1)^2 = mgh \Rightarrow h = (v'_1)^2/2g = 0.222 \text{ m}$$



d) La energía perdida en el choque es la diferencia de las energías cinéticas antes del choque y después del choque:

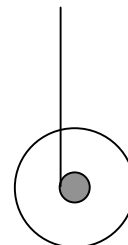
$$E_{\text{perdida}} = \frac{1}{2} m(v_1)^2 + \frac{1}{2} 2m(v_2)^2 - \frac{1}{2} m(v'_1)^2 - \frac{1}{2} 2m(v'_2)^2 = \frac{1}{2} (4.429)^2 + (-1)^2 - \frac{1}{2} (-2.086)^2 - (2.257)^2 = 3.54 \text{ J}$$

2) Tenemos La longitud de un hilo de un yo-yo es de un metro. Los discos que lo forman tienen 2.5 cm de radio y un peso total de 50 g. El cilindro de unión de ambos, de momento de inercia despreciable, tiene un radio de 5 mm. Determinar:

a) El momento de inercia del yo-yo.

b) La velocidad angular cuando se desenrolla todo el hilo dejando caer el juguete sin velocidad inicial (utilizad el principio de conservación de la energía).

c) La aceleración del yo-yo y la tensión del hilo.



SOLUCION:

a) El momento de inercia del yo-yo lo suponemos igual al momento de inercia de un cilindro

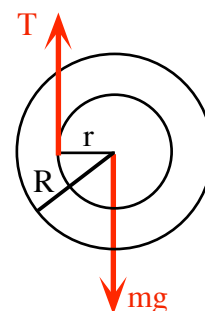
$$I = (1/2)Mr^2 = (1/2) \cdot 0.05 \cdot 0.025^2 = 1.56 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

b) La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de traslación y de rotación:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m(\omega r)^2 + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} mR^2) \omega^2 \Rightarrow$$

$$gh = \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{4} = (\frac{r^2}{2} + \frac{R^2}{4}) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{gh}{\frac{r^2}{2} + \frac{R^2}{4}}} = \sqrt{\frac{9.8 \cdot 1}{\frac{0.005^2}{2} + \frac{0.025^2}{4}}} = 241.1 \text{ rad/s}$$

c) Aplicamos la segunda ley de Newton para la traslación del yo-yo y su equivalente para la rotación.



$$mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma \Rightarrow [3]$$

$$T r = I\alpha \Rightarrow T r = \frac{1}{2} mR^2(a/r) \Rightarrow (mg - ma)r = \frac{1}{2} mR^2(a/r) \Rightarrow gr^2 - ar^2 = \frac{1}{2} R^2 a \Rightarrow$$

$$gr^2 = \frac{1}{2} R^2 a + ar^2 \Rightarrow a = \frac{gr^2}{\frac{R^2}{2} + r^2} = \frac{g}{\frac{R^2}{2r^2} + 1} = \frac{9.81}{\frac{1}{2} 5^2 + 1} = \frac{9.81}{13.5} = 0.727 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Utilizando la ecuación [3]} \quad T = mg - ma = m(g - a) = 0.05(9.81 - 0.727) = 0.454 \text{ m/s}^2$$



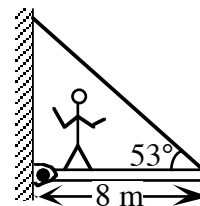
3) Una viga horizontal uniforme de 8 m de longitud y 200 N de peso está sujeta a un pared mediante un perno que permite girar a la viga. En el otro extremo está sostenida por un cable que forma un ángulo de 53° con la horizontal.

Si una persona de 600 N se encuentra a 2 m de la pared, determínese:

a) La tensión en el cable.

b) La fuerza ejercida sobre la viga por la pared.

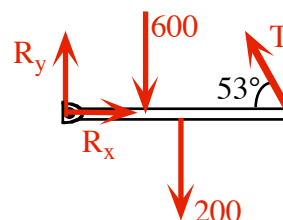
c) Si la tensión máxima que puede soportar el cable es de 500 N, ¿Qué distancia se podrá alejar la persona de la pared sin que se rompa el cable?



SOLUCION:

a) Lo mas sencillo es comenzar con $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al perno $\Rightarrow$

$$600 \cdot 2 + 200 \cdot 4 - T \cdot 8 \cdot \sin 53 = 0 \Rightarrow T = 313 \text{ N}$$



b) Aplicamos la condición de suma de fuerzas igual a 0

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x - T \cos 53 = 0 \Rightarrow R_x = T \cos 53 = 313 \cos 53 = 188.4 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_y + T \sin 53 - 600 - 200 = 0 \Rightarrow R_y = 800 - 313 \sin 53 = 550.0 \text{ N}$$

$$R = (R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = 581.4 \text{ N}$$

$$\tan \theta = R_y / R_x \Rightarrow \theta = 71.1^\circ$$

c) Hay que determina el valor de x para el cual la tensión es la máxima de 500 N. Aplicando $\sum M = 0$ respecto al perno:

$$600 \cdot x + 200 \cdot 4 - 500 \cdot 8 \cdot \sin 53 = 0 \Rightarrow x = 3.99 \text{ m}$$

