# EXAMEN DE FISICA I (I.Q.) 9-2-2009

## CUESTIONES

---

**1)** Una partícula localizada inicialmente en el origen tiene una aceleración $\mathbf{a} = 3\,\mathbf{j}$ m/s$^2$ y una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 5\,\mathbf{i}$ m/s.

a) Hallar la velocidad y la posición en cualquier instante t.

b) Determinar la velocidad y la posición para t = 2 s.

c) Calcular las aceleraciones tangencial y normal en ese instante (t = 2s).

---

SOLUCION:

**a)** La aceleración es la derivada de la velocidad $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \;\Rightarrow\; d\mathbf{v} = \mathbf{a}\,dt \;\Rightarrow\; \int d\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\,dt = \int 3\mathbf{j}\,dt$

Integrando: $\mathbf{v} = 3t\,\mathbf{j} + C1$.

Como para t = 0 la velocidad es 5 **i**, sustituyendo en la ecuación anterior: $5\,\mathbf{i} = 0 + C1 \;\Rightarrow\; C1 = 5\,\mathbf{i}$

y finalmente sustituimos el valor de C1

$$\boxed{\mathbf{v} = 5\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} \quad \text{m/s}}$$

La velocidad es la derivada de la posición $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt \;\Rightarrow\; \int d\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,dt = \int (5\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j})\,dt$

Integrando: $\mathbf{r} = (5t\,\mathbf{i} + 3/2\,t^2\,\mathbf{j}) + C2$.

Como para t = 0 la posición es $\mathbf{r} = 0$, sustituyendo en la ecuación anterior: $0 = 0 + C2 \;\Rightarrow\; C2 = 0$

y finalmente sustituimos el valor de C2

$$\boxed{\mathbf{r} = 5t\,\mathbf{i} + 3/2\,t^2\,\mathbf{j} \quad \text{m}}$$

**b)** Para t = 2 s

$$\boxed{\mathbf{v} = 5\,\mathbf{i} + 3\cdot 2\,\mathbf{j} \;=\; 5\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} \quad \text{m/s}}$$

$$\boxed{\mathbf{r} = 5\cdot 2\,\mathbf{i} + 3/2\cdot 2^2\,\mathbf{j} \;=\; 10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} \text{ m/s}}$$

**c)**

$$\boxed{a_t} = d|\mathbf{v}|/dt = \frac{d\,(25+9t^2)^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2}(25+9t^2)^{-1/2}\,18t = \boxed{\frac{9t}{\sqrt{25+9t^2}}}$$

para t = 2 s $\Rightarrow$

$$\boxed{a_t} = \frac{9\cdot 2}{\sqrt{25+9\cdot 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{61}} = \boxed{2.30 \text{ m/s}^2}$$

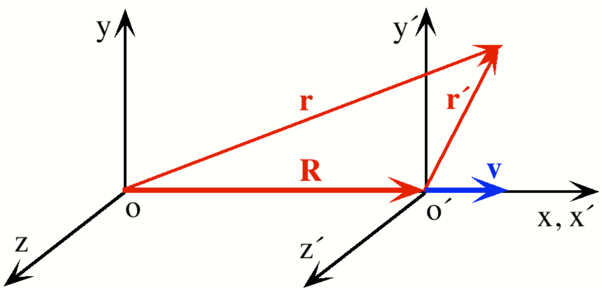
$$\boxed{a_N} = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{3^2 - 2.3^2} = \boxed{1.93 \text{ m/s}^2}$$

**2)** Movimiento relativo de traslación uniforme: deducir la relación entre las velocidades de un móvil para dos sistemas O y O´ suponiendo que el O´ se mueve respecto del O con una velocidad constante v **i.** ¿qué relación existe entre las aceleraciones que ven ambos observadores y qué conclusiones importantes pueden obtenerse de la misma?

---

SOLUCION:

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : **v** = v**i**




Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será **R** = **oo´** = **v**t = vt **i**

La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´.**

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\boxed{\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}'} \Rightarrow \begin{cases} Vx = v + V'x \\ Vy = V'y \\ Vz = V'z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad.

Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: d**v**/dt = 0 y d**V**´/dt = **a**´ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales). Debido a esto, las leyes de Newton se cumplen en todos los sistemas inerciales.

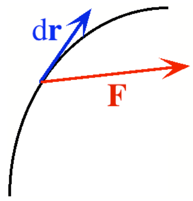
**3)** **a)** Define el trabajo desarrollado por una fuerza a lo largo de una trayectoria.

**b)** Calcular el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F} = 2xy\ \mathbf{i} + 3x\ \mathbf{j}$ N al recorrer su punto de aplicación el arco de curva $x= t + 1$, $y= t^3 -1$, desde el punto A (0, -2,) al B (2,0).

Nota: las posiciones x, e y están en metros cuanto t es en segundos.

---

SOLUCION:




**a)** $d\omega = \mathbf{F}\ d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \int \mathbf{F}\ d\mathbf{r}}$

**b)** En este caso $\omega = \int_A^B (2xy\ \mathbf{i} + 3x\ \mathbf{j})\ d\mathbf{r}$

donde $x = (t + 1)$ e $y = (t^3 -1)$

por lo que el vector de posición es $\mathbf{r} = (t + 1)\ \mathbf{i} + (t^3 -1)\ \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{r} = dt\ \mathbf{i} + 3t^2\ dt\ \mathbf{j} = (\ \mathbf{i} + 3t^2\ \mathbf{j})\ dt$

Además, al cambiar la variable al tiempo, los limites son los tiempos para los que la partícula está en los puntos A y B. En el punto A la coordenada x es 0, por lo que $t_A + 1 = 0 \Rightarrow t_A = -1$ s.

En el punto B la coordenada x es 2, por lo que $t_B + 1 = 2 \Rightarrow t_B = 1$ s.

Sustituyendo en la formula del trabajo: $\omega = \int_{-1}^{1} [2(t + 1)\ (t^3 -1)]\ \mathbf{i} + 3\ (t + 1)\ \mathbf{j}]\ (\mathbf{i} + 3t^2\ \mathbf{j})\ dt \quad \Rightarrow$

$$\omega = \int_{-1}^{1} [2(t + 1)\ (t^3 -1) + 3\ (t + 1)\ 3t^2]\ dt = \int_{-1}^{1} [2t^4 + 2t^3 - 2t -2 + 9t^3 + 9t^2]\ dt =$$

$$\int_{-1}^{1} [2t^4 + 11t^3 + 9t^2 - 2t -2]\ dt = [2/5\ t^5 + 11/4\ t^4 + 9/3\ t^3 - 2/2\ t^2 -2t]_{-1}^{1} =$$

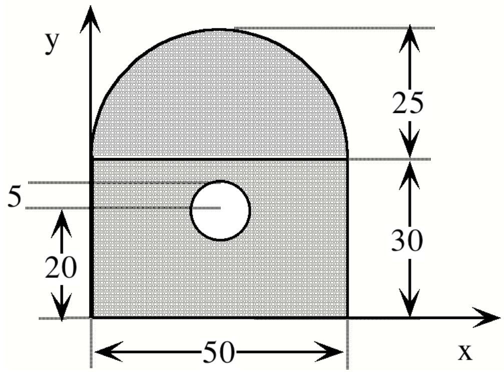
$$= [2/5 + \cancel{11/4} + 9/3 - \cancel{2/2} -2] - [- 2/5 + \cancel{11/4} - 9/3 - \cancel{2/2} +2] = 4/5 + 18/3 -4 = 14/5 = \boxed{2.8\ \text{J}}$$

**4)** Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura

Nota, recordar que: $S_{disco} = \pi R^2$

$S_{esfera} = 4\pi R^2$

$V_{esfera} = (4/3)\pi R^3$

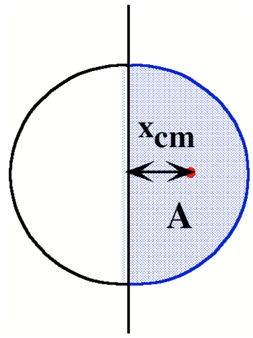



**SOLUCION**

La placa se supone la suma de dos placas, una rectangular y otra semicircular a las que restamos una placa circular.
Por simetría, los centros de masas de la placa rectangular y la circular están en el centro.

El centro de masas de la placa semicircular podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que:

$$V = 2\pi x_{cm} A$$



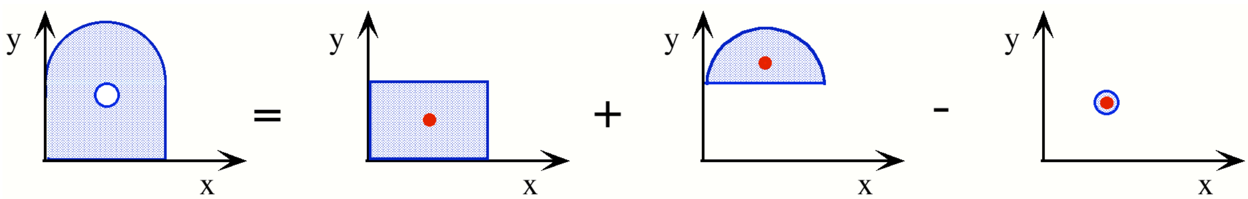

Con A = área de la placa $\Rightarrow$ $A = (1/2)\,\pi r^2$

y V = volumen de la esfera que genera $\Rightarrow$ $V = (4/3)\,\pi r^3$

Introduciendo estos valore en la ecuación: $(4/3)\,\pi r^3 = 2\pi x_{cm}\,(1/2)\,\pi r^2 \Rightarrow$

$$x_{cm} = (4r/3\pi) = (100/3\pi) = 10.61$$

A continuación descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



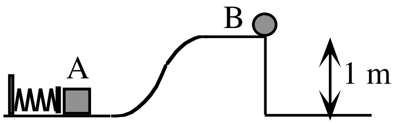

| | | |
|---|---|---|
| $A_1 = 50 \bullet 30 = 1500$ | $A_2 = (1/2)\,\pi 25^2 = 981.75$ | $A_3 = \pi 5^2 = 25\,\pi$ |
| $x_{cm1} = 25$ | $x_{cm2} = 25$ | $x_{cm3} = 25$ |
| $y_{cm1} = 15$ | $y_{cm2} = 30 + 10.61$ | $y_{cm3} = 20$ |

$$\boxed{x_{cm} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = 25} \Leftarrow$$ También se puede deducir ya que hay un plano de simetría paralelo al eje y que pasa por x = 25

$$\boxed{y_{cm}} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{1500 \bullet 15 + 981.75 \bullet 40.61 - 25\pi \bullet 20}{1500 + 981.75 - 25\pi} = \frac{60798}{2403} = \boxed{25.3}$$

## PROBLEMAS

**1)** Un muelle de conste $K = 10^4$ N/m está comprimido 20 cm. Al liberarlo empuja un cuerpo A de masa $m_A = 4$ kg. Este cuerpo asciende por una rampa, sin rozamiento, y colisiona con otro de masa $m_B = 2$ kg.




**a)** ¿Qué velocidad adquiere el cuerpo A al estirarse el muelle?
**b)** ¿Qué velocidad lleva el cuerpo A justo antes de la colisión?
**c)** Determinar la velocidad de los dos cuerpos después de colisión (e = 0.6).
**d)** Calcular la energía perdida en el choque.
**e)** Determinar el ángulo que forma la velocidad de los dos cuerpos con la horizontal en el momento en el que colisionan con el suelo.
**f)** ¿Cuál es la distancia de separación entre ambos cuerpos cuando tocan el suelo?
Nota: e = - (resta de velocidades después del choque / resta de velocidades antes del choque)

SOLUCION:

**a)** La energía elástica se transforma en energía cinética: $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{(kx^2/m)} = 10 \text{ m/s}}$

**b)** La energía mecánica se conserva: $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 - 2gh$

Si $v_1 = 10$ m/s y $h = 1$ m $\Rightarrow \boxed{v_2 = (100 - 2 \cdot 9.81 \cdot 1)^{1/2} = 8.97 \text{ m/s}}$

**c)** Las ecuaciones a emplear son la de conservación del momento lineal y la del coeficiente de restitución:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow 4 \cdot 8.97 + 0 = 4v'_A + 2v'_B \Rightarrow 35.88 = 4v'_A + 2v'_B$$
$$e = -(v'_B - v'_A)/(v_B - v_A) \Rightarrow 0.6 = -(v'_B - v'_A)/(0 - 8.97) \Rightarrow 5.376 = -v'_A + v'_B$$

Multiplicando la ecuación inferior por 4 y sumando las dos ecuaciones queda $57.384 = 6v'_B \Rightarrow$

$$\boxed{v'_B = 9.564 \text{ m/s}}$$

Y despejando la ecuación inferior: $v'_A = v'_B - 5.376 \Rightarrow \boxed{v'_A = 4.188 \text{ m/s}}$

**d)** La perdida de energía es la inicial menos la final:

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} m_A v'^2_A - \frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} 4 \cdot 8.97^2 - \frac{1}{2} 4 \cdot 4.188^2 - \frac{1}{2} 2 \cdot 9.564^2 = 34.37 \text{ J}}$$

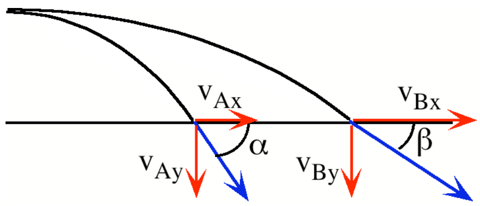
**e)** Después del choque, los dos cuerpos tienen un movimiento parabólico sometidos a la acción de la gravedad. En la dirección vertical, los dos cuerpos tienen un movimiento uniformemente acelerado y parten con una velocidad $v_{y0} = 0$. El tiempo que tardan en recorrer la distancia que les separa del suelo será el mismo: $e = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{(2e/g)} = \sqrt{(2 \cdot 1/9.81)} = 0.4515 \text{ s}}$

La velocidad en la dirección y, también será la misma para los dos cuerpos: $v_{Ay} = v_{By} = gt = 4.429$ m/s

En la dirección x, la velocidad no cambia durante la caida: $v_{Ax} = v'_A = 4.188$ m/s

$V_{Bx} = v'_B = 9.564$ m/s

Y el ángulo que forman con la horizontal es:




$tg\alpha = v_{Ay}/v_{Ax} = 4.429/4.188 \Rightarrow \boxed{\alpha = 46.6°}$

$tg\beta = v_{By}/v_{Bx} = 4.429/9.564 \Rightarrow \boxed{\beta = 24.8°}$

**f)** En la dirección horizontal el movimiento lleva velocidad constante, por lo que el espacio recorrido es

$x = v_x t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x} = x_B - x_A = v_{Bx}\, t - v_{Ax}\, t = 9.564 \cdot 0.4515 - 4.188 \cdot 0.4515 = 4.32 - 1.89 = \boxed{2.43 \text{ m}}$

---

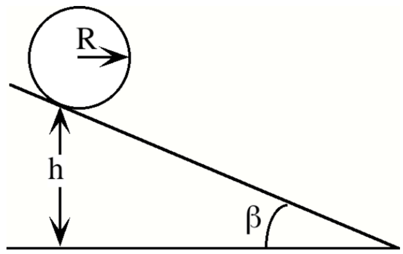
**2)** Un cilindro de radio R y masa m rueda sin resbalar por un plano inclinado un ángulo β.

**a)** Representar las fuerzas que actúan sobre el cilindro.

**b)** Determinar la fuerza de rozamiento que tiene que actuar para que el cilindro ruede sin resbalar.

**c)** Determinar la aceleración del centro de masas del cilindro.

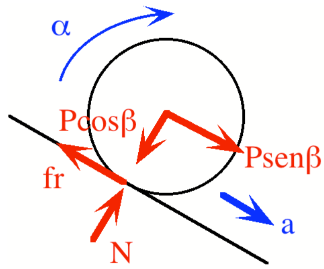
**d)** Si parte del reposo ¿Cuál será la velocidad del centro de masas cuando ha descendido una altura h?




**e)** Si suponemos β = 30°, m = 4 kg, y h = 5 m, utilizar las ecuaciones encontradas en los apartados b, c y d para determinar los valores numéricos de la fuerza de rozamiento, aceleración y velocidad.

---

SOLUCION:




**a)** Solo actúan 3 fuerzas, el peso, la normal y la fuerza de rozamiento:

**b)** Aplicamos la segunda ley de Newton a la traslación del centro del masas y su equivalente en la rotación para el giro entorno al centro de masas:

$\Sigma F = ma \Rightarrow mgsen\beta - fr = ma \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow a = (mgsen\beta - fr)/m$

$\Sigma M = I\alpha \Rightarrow fr\, R = I\, \alpha \Rightarrow (I = 1/2\, mR^2, \alpha = a/R) \Rightarrow fr\, R = 1/2\, mR^2\, (a/R) \Rightarrow a = 2fr/m$

Igualando las dos aceleraciones: $(mgsen\beta - fr)/m = 2fr/m \Rightarrow (mgsen\beta - fr) = 2fr \Rightarrow \boxed{fr = (1/3)\, mgsen\beta}$

**c)** Utilizando $a = 2fr/m$ y sustituyendo el valor de fr $\Rightarrow a = 2\,(1/3)\, mgsen\beta/m \Rightarrow \boxed{a = 2/3\, gsen\beta}$

**d)** Como no hay deslizamiento, la fuerza de rozamiento no realiza ningún trabajo, por lo que se puede aplicar el principio de conservación de la energía: La energía gravitatoria se convierte en energía cinética de traslación del centro de masas + energía cinética de rotación entorno al centro de masas:

$$mgh = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \tfrac{1}{2}\,I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}mR^2\,(v/R)^2 = \tfrac{1}{2}\,mv^2 + \tfrac{1}{4}\,mv^2 = \tfrac{3}{4}\,mv^2 \Rightarrow$$

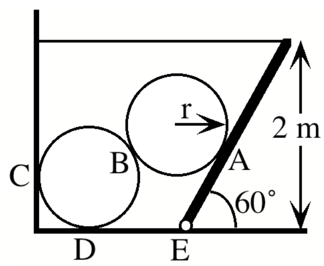
$$\boxed{v = \sqrt{(4/3)gh}}$$

**d)** Si suponemos $\beta = 30°$, m = 4 kg, y h = 5 m , nos queda:

$$fr = (1/3)\,mg\text{sen}\beta = (1/3)\,4\bullet 9.81\bullet \text{sen}30 = 6.54\text{ N}$$
$$a = 2/3\,g\text{sen}\beta = (2/3)\,9.81\bullet\text{sen}30 = 3.27\text{ m/s}^2$$
$$v = \sqrt{(4/3)gh} = \sqrt{(4/3)9.81\bullet 5} = 8.09\text{ m/s}$$

---

**3)** Dos esferas de radio r y masa m, quedan en equilibrio en la posición indicada, formando la línea que une los centros un ángulo de 30 con la horizontal.

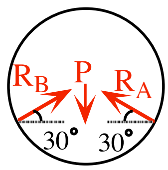



**a)** Representar todas las fuerzas que actúan sobre la esfera superior.
**b)** Determinar las reacciones en los puntos A y B.
**c)** Representar todas las fuerzas que actúan sobre la esfera inferior.
**d)** Determinar las reacciones en los puntos C y D
**e)** Representar las fueras que actúan sobre el tablón suponiendo que **la masa del tablón es despreciable**.
**f)** Suponiendo que **la distancia entre los puntos E y A es de 0.8 m**, determinar la tensión del cable.
**g)** Determinar la reacción en el punto E, y el ángulo que forma con la horizontal.

---

SOLUCION:

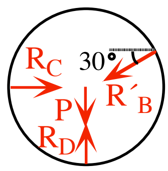
**a)** La fuerzas que actúan sobre el cilindro superior son el peso P (= mg) y las dos reacciones en los apoyos:




**b)** $\sum Fx = 0 \Rightarrow R_B\cos30 - R_A\cos30 = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = R_A}$

$\sum Fy = 0 \Rightarrow 2\,R_B\text{sen}30 = P \Rightarrow \boxed{R_B = P}$

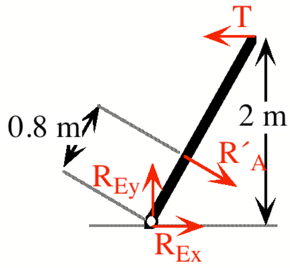
**c)** En el punto B, actúa la reacción a $R_B$, $R'_B$ que tiene el mismo modulo (= P) y dirección, pero sentido contrario




**d)** $\sum Fx = 0 \Rightarrow R_C - R'_B\cos30 = 0 \Rightarrow \boxed{R_C = P\cos30}$

$\sum Fy = 0 \Rightarrow P + R'_B\text{sen}30 - R_D = 0 \Rightarrow \boxed{R_D = P + P\text{sen}30 = (3/2)\,P}$

**e)** En el punto A, actúa la reacción a $R_A$, $R'_A$, que tiene el mismo modulo (= P) y dirección, pero sentido contrario




**f)** Aplicando $\sum M = 0$ respecto del punto E, $\quad 0.8\, R'_A - 2\, T = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = (0.8/2)\, R'_A = 0.4\, P}$

**f)** $\sum Fx = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ex} + R'_A \cos 30 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{Ex} = T - R'_A \cos 30 = 0.4P - P \cos 30 = -0.460\, P}$

$\sum Fy = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ey} - R'_A \operatorname{sen} 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{Ey} = R'_A \operatorname{sen} 30 = P \operatorname{sen} 30 = 0.5\, P}$

Como $R_{Ex}$ sale negativo, quiere decir que tiene sentido contrario al que hemos representado inicialmente. El sentido real es el representado en la última figura en verde. El ángulo que forma $R_{Ex}$ con la horizontal es:

$$\operatorname{tg}\beta = R_{Ey} / R_{Ex} = 0.5/0.46 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 47°}$$