EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 9-9-2008

CUESTIONES

1) Los vectores A(-3, 2, -1) B(1, -3, 5) y C(2, 1, -4) están aplicados en los puntos a(2, 1, 2) b(-1, 0, 1) y c(1, 2, 0) respectivamente:

a) ¿Cuál es la resultante del sistema?
b) ¿Cuál es el momento del sistema respecto al origen de coordenadas?
c) ¿Y respecto al punto (3,-2,1)?

SOLUCION:

a) La resultante es la suma de los vectores:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (-3, 2, -1)\\ \mathbf{B} &= (1, -3, 5)\\ \mathbf{C} &= (2, 1, -4),\\ \hline \mathbf{R} &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

b) El momento resultante es la suma de los momentos

$$\mathbf{M_oA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-1-4) + \mathbf{j}\,(-6+2) + \mathbf{k}\,(4+3) = -5\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_oB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(0+3) + \mathbf{j}\,(1+5) + \mathbf{k}\,(3-0) = 3\,\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_oC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-8-0) + \mathbf{j}\,(0+4) + \mathbf{k}\,(1-4) = -8\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

El momento resultante es la suma de los momentos: $\boxed{\Sigma \mathbf{M_o} = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

c) La relación entre el momento resultante respecto al origen O y respecto a un punto P es

$$\mathbf{M_P} = \mathbf{M_O} - \mathbf{OP} \wedge \mathbf{R}$$

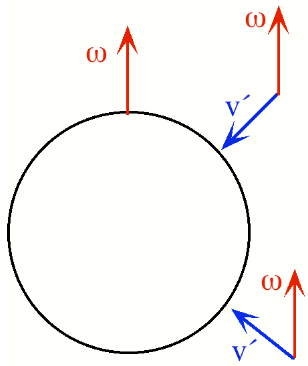
Como la resultante es nula $\mathbf{R} = 0$, $\Sigma \mathbf{M_P} = \Sigma \mathbf{M_O} \Rightarrow \boxed{\mathbf{M_P} = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

2) Recordando que la relación entre la aceleración de la gravedad observada desde la Tierra (**g**) y la que ve un observador inercial ($\mathbf{g_0}$) es $\mathbf{g} = \mathbf{g_0} - 2\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$,

a) Explica los efectos observados desde la Tierra cuando un objeto cae verticalmente por la acción de la gravedad.
b) ¿Son iguales dichos efectos en el hemisferio norte y en el sur?
c) ¿En que partes de la Tierra son máximos y mínimos dichos efectos?

Haz dibujos que te ayuden a explicar los apartados anteriores.

SOLUCION:



En esta cuestión solamente consideraremos los efectos asociados a **v´**, que dan lugar a la aceleración de Coriolis, y no describiremos los asociados a la posición "**r**" que dan lugar a la aceleración centrifuga.

a) Si la figura representa un corte de la Tierra, el producto vectorial de ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$), es un vector perpendicular al papel que sale hacia nosotros. Como la aceleración de Coriolis lleva un signo menos, el vector entrara hacia el papel, es decir, va dirigido hacia el Este.

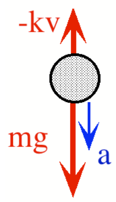
b) Esto sucede tanto en el Hemisferio Norte como en el Sur, es decir los efectos son iguales.

c) Como **ω** es constante, para un mismo valor de **v´**, la aceleración de Coriolis será máxima cuando **ω** y **v´** formen 90 grados, es decir en el ecuador y mínima cuando formen 0 o 180 grados, es decir en los Polos.

3) Analizar el tipo de movimiento que posee una partícula sometida a su propio peso y a una fuerza de rozamiento directamente proporcional a su velocidad. Sin necesidad de resolver la ecuación del movimiento, discútase los aspectos más relevantes de dicho movimiento y dibújense aproximadamente la aceleración y la velocidad de la partícula en función del tiempo. ¿Como se calculara el espacio recorrido por la partícula?

SOLUCION:

Aplicando la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas que actúan es igual a la masa por la aceleración:



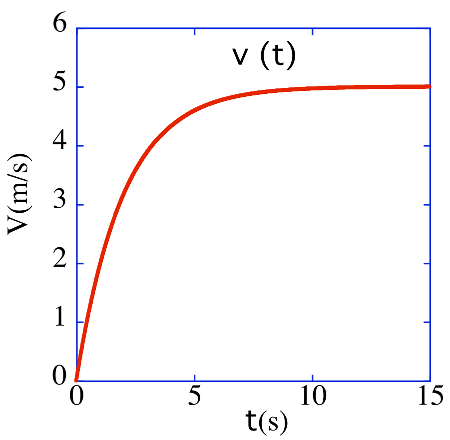
$$mg - kv = ma \qquad (3.1)$$

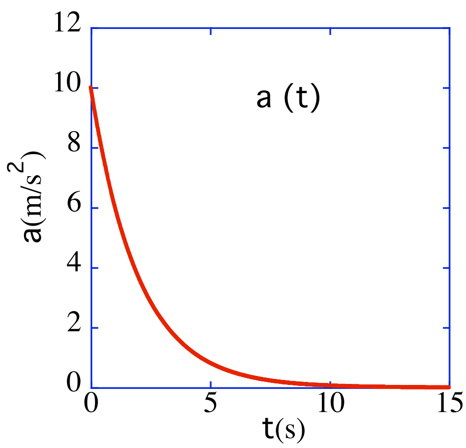
Si la partícula parte del reposo, la velocidad inicial es 0 y por lo tanto la aceleración inicial es: a = g.

A medida que pasa el tiempo, la partícula va adquiriendo velocidad por lo que la aceleración va disminuyendo.

Este proceso continua hasta que la velocidad es tan grande que la fuerza de rozamiento compensa al peso (kv = mg), y la aceleración es a = 0; alcanzándose entonces la velocidad límite: $v_L = mg/k$.

Las graficas aproximadas son:





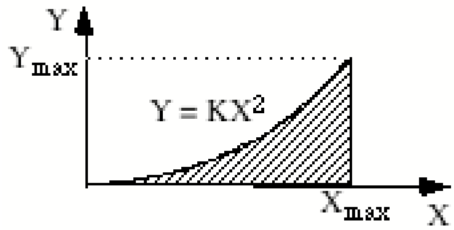
En cuanto a determinar el **espacio recorrido** por la partícula, si lo queremos calcular **en función de la velocidad**, se parte de la ecuación (3.1): mg – kv = ma

y sustituimos la aceleración tomando a = dv/dx • dx/dt = dv/dx • v

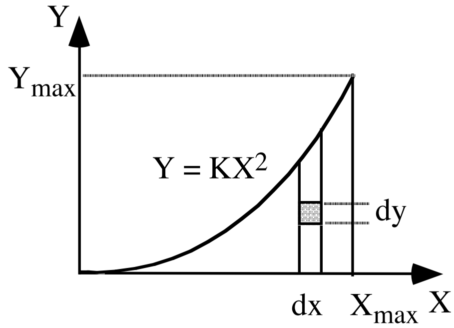
La ecuación que nos queda es mg – kv = m (dv/dx) v, Finalmente pasamos la v y el dv a un lado de la ecuación , el dx a otro, e integramos.

Si lo queremos calcular **en función del tiempo**, hay que hacerlo en dos pasos. Primero escribimos la aceleración como a = dv/dt y sustituimos en la ecuación (3.1), nos queda mg – kv = m • dv/dt. Despejando e integrando determinamos v(t). En un segundo paso, como v(t) = dx/dt, despejamos el dx e integrando calculamos x (t).

4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura:



SOLUCION:



Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\,ds}{\int ds}$ y teniendo en cuenta que $ds = dx\,dy$, donde este diferencial de área se integra en la superficie delimitada por la parábola $y = kx^2$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx \int_0^{kx^2} dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx \left[y\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{X_{max}} dx \left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx\ kx^2}{\int_0^{X_{max}} dx\ kx^2} = \;......$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la parábola (kx^2) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y X_{max}.

$$........... = \frac{\int_0^{X_{max}} kx^3\,dx}{\int_0^{X_{max}} kx^2\,dx} = \frac{\left[k\dfrac{x^4}{4}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{k\dfrac{X_{max}{}^4}{4}}{k\dfrac{X_{max}{}^3}{3}} = \;= \boxed{\frac{3}{4}X_{max}}$$

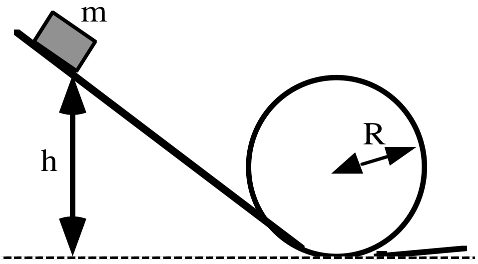
Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\,ds}{\int ds} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} y\,dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{X_{max}} dx \left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx\ \dfrac{k^2x^4}{2}}{\int_0^{X_{max}} dx\ kx^2} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^5}{5}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{\dfrac{k^2}{2}\dfrac{X_{max}{}^5}{5}}{k\dfrac{X_{max}{}^3}{3}} = \frac{k^2\dfrac{X_{max}{}^5}{10}}{k\dfrac{X_{max}{}^3}{3}} = \frac{3}{10}kX_{max}{}^2 = \boxed{\frac{3}{10}Y_{max}}$$

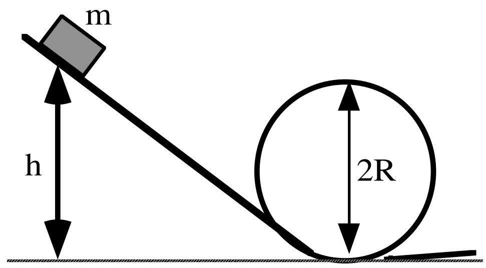
PROBLEMAS

1) Un pequeño bloque de masa m se desliza sin rozamiento por una vía en forma de lazo como la indicada en la figura. El lazo circular tiene un radio R. El bloque parte de reposo a una altura h por encima de la parte inferior del lazo.



a) ¿Cual es al energía cinética del bloque cuando alcanza la parte superior del lazo?
b) ¿Cual es su aceleración en la parte superior del lazo admitiendo que no se sale de la vía?
c) ¿Cual es el menor valor de h sabiendo que el bloque ha de alcanzar la parte superior del lazo sin salirse de la vía?
d) Calcular numéricamente los apartados anteriores para m = 4 kg, h = 8 m y R = 2m.

SOLUCION:

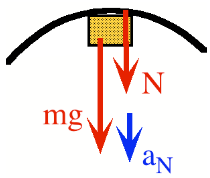


a) Como no hay rozamiento, la energía mecánica se conserva:

$$Emi = Emf \Rightarrow mghi + Eci = mghf + Ecf$$

Si consideramos h = 0 en la parte inferior del lazo, hi = h y hf = 2R. Además, como parte del reposo, Eci = 0, por lo que la ecuación de la conservación de la energía queda:

$$mgh = mg2R + Ecf \Rightarrow \boxed{Ecf = mg\,(h - 2R)}$$



b) Dentro del lazo, el cuerpo realiza un movimiento circular. En la parte superior, las únicas fuerzas que actúan son el peso y la normal, y las dos llevan la misma dirección, apuntando hacia el centro del circulo. Por ello, la única aceleración en la parte superior del lazo es la aceleración normal: $a_N = v^2/R$

La velocidad la podemos despejar de la Ec calculada en el apartado anterior:

$$Ec = (1/2)mv^2 = mg\,(h - 2R) \Rightarrow v^2 = 2g\,(h - 2R) \Rightarrow \boxed{a_N = v^2/R = 2g\,(h - 2R)/R}$$

c) Aplicando la 2ª ley de Newton en la parte superior de la vía: $N + mg = mv^2/R$, obtenemos que la normal vale: $N = mv^2/R - mg$.

La condición de contacto es que la normal sea siempre $\geq 0 \Rightarrow mv^2/R - mg \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq Rg$

Además en el apartado b) hemos calculado la velocidad del bloque en la parte superior es $v^2 = 2g\,(h - 2R)$, por lo que sustituyendo este valor en la desigualdad anterior

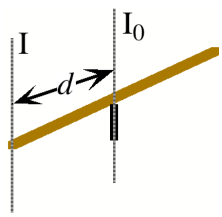
$$2g\,(h - 2R) \geq Rg \Rightarrow 2h - 4R \geq R \Rightarrow \boxed{h \geq (5/2)R}$$

d)

$$\boxed{Ecf = mg\,(h - 2R) = 4 \bullet 9.81\,(8 - 2 \bullet 2) = 156.96 \text{ J}}$$
$$\boxed{a_N = 2g\,(h - 2R)/R = 2 \bullet 9.81\,(8 - 2 \bullet 2)/2 = 39.24 \text{ m/s}^2}$$
$$\boxed{h \geq (5/2)R = (5/2)2 = 5 \text{ m}}$$

2) Dos niños, cada uno con una masa de 25 kg, están sentados en extremos opuestos de una barra horizontal de 2.6 m de largo y una masa de 10 kg. La barra está rotando a 5 rpm con respecto a un eje que pasa por su centro.
a) Determinar el momento de inercia del conjunto (El momento de inercia de una barra que rota respecto a uno de sus extremos es $I = (1/3)mL^2$).
b) ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve 60 cm hacia el centro de la plancha sin tocar el piso?
c) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de rotación del sistema?
d) Si cuando los niños se encuentran en la posición inicial se aplica una fuerza de 120 N en el plano horizontal, perpendicular a la plancha, y a una distancia de 1 m del eje, encontrar la aceleración angular del sistema.

SOLUCION:



a) Primero aplicando el teorema de Steiner para determinar el momento de inercia de la barra respecto al eje de giro, que pasa por el centro de masas (I_0). El teorema de Steiner dice: $I = I_0 + m_b d^2$, donde I es el momento respecto al extremo de la barra ($I = (1/3)m_bL^2$) y d (= L/2) la distancia entre el extremo y el centro de masas.

Sustituyendo queda: $(1/3)m_bL^2 = I_0 + m_b (L/2)^2 \Rightarrow I_0 = (1/3 - 1/4) m_bL^2 = (1/12) m_bL^2$

Si consideramos a los niños masas puntuales, el momento de inercia de cada uno es m_nd^2, y como son dos:

$$I_n = 2\bullet m_nd^2$$

El momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia

$$I = I_0 + I_n = (1/12)\, m_bL^2 + 2\bullet m_nd^2 = (1/12)\, 10 \bullet 2.6^2 + 2\bullet 25 \bullet 1.3^2 = 5.63 + 85.50 = \boxed{90.13 \text{ kgm}^2}$$

b) Como las fuerzas que ejercen los niños con las manos para acercarse al eje de giro pasan por el propio eje, es decir, son fuerzas centrales, el momento de las mismas es cero, y se conserva el momento angular. Esto significa que:

$$I_i\omega_i = I_f\, \omega_f$$

El momento de inercia inicial, lo hemos calculado antes ($I_i = 90.13$ kgm^2)

El momento de inercia final es $I_f = I_0 + I_{nf} = 5.63 + 2\bullet 25 \bullet 0{,}7^2 = 5.63 + 24.50 = 30.13$ kgm^2

La velocidad angular inicial es $\omega_i = 5$ rev/m $\bullet$ (2π rad/1 rev) $\bullet$ (1 min / 60 s) = 5 $\bullet$ 2π/ 60 = 0.5236 rad/s

Sustituyendo en la ecuación anterior: $90.13 \bullet 0.5236 = 30.13 \bullet \omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = 1.566 \text{ rad/s}}$

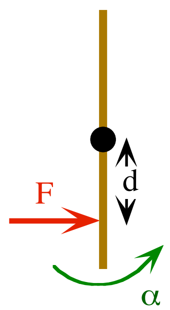
c) En un sistema que rota con una velocidad angular ω, la energía cinética es $Ec = (1/2)\, I\omega^2$
Por lo tanto, el incremento de energía cinética es

$$\Delta Ec = (1/2)\, I_f\omega_f^2 - (1/2)\, I_i\omega_i^2 = (1/2)\, 30.13(1.566)^2 - (1/2)\, 90.13(0.5236)^2 = 36.94 - 12.35 = \boxed{24.59 \text{ J}}$$

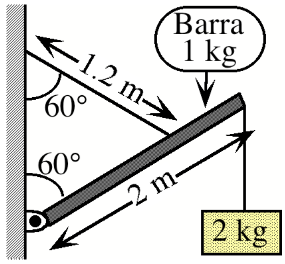
d) Se aplica la ecuación: $M = I\,\alpha$

Siendo $M = F\, d \text{ sen } 90 = F\, d = 120 \bullet 1 = 120$ N m $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = M/I = 120 / 90.13 = 1.33 \text{ rad/s}^2}$$

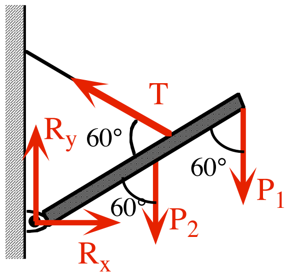


3) Para el sistema que se muestra en la figura:
a) Representar todas las fuerzas que actúan sobre la barra.
b) Determinar la tensión T de la cuerda que une la barra a la pared.
c) Calcular la reacción R en al articulación.
d) Si la tensión máxima que puede soportar la cuerda que une la barra a la pared es de 100 N, determinar la masa máxima que podemos colgar del extremo de la barra.



SOLUCION

a)



b) Aplicando $\sum M = 0$ y calculando los momentos respecto a la articulación:

$$P_1 \bullet 2\ \text{sen}60 + P_2 \bullet 1\ \text{sen}60 - T \bullet 1.2\ \text{sen}60 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{T =} \frac{2P_1 + P_2}{1.2} = \frac{g(2m_1 + m_2)}{1.2} = \frac{9.81(4+1)}{1.2} = \boxed{40.87\ \text{N}}$$

c) Aplicando $\sum Fx = 0 \;\Rightarrow\; Rx - T\cos 30 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Rx} = T\cos30 = 40.87\cos 30 = \boxed{35.4\ \text{N}}$

$$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; Ry + T\text{sen}30 - P_1 - P_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Ry} = P_1 + P_2 - T\text{sen}30 = 18.36 + 9.81 +$$

$$40.87 \bullet (1/2) = \boxed{8.995\ \text{N}}$$

d) De la ecuación de los momentos, $T = \dfrac{g(2m_1 + m_2)}{1.2}$ despejamos m_1 y sustituimos el valor de $T \Rightarrow$

$$\boxed{m_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1.2\ T}{g} - m_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1.2 \bullet 100}{9.81} - 1\right) = \boxed{5.616\ \text{kg}}$$