EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 11-2-2008

CUESTIONES

---

1) El vector de posición de una partícula es $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{K}$. Calcular en función del tiempo:

a) El vector velocidad y su modulo.
b) El vector aceleración y su modulo.
c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.
d) El radio de curvatura.

SOLUCION:

a) La velocidad es la derivada del vector posición $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = 3t^2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}}$

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{9t^4 + 4}}$$

b) La aceleración es la derivada del vector velocidad $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \Rightarrow \mathbf{a} = 6t\,\mathbf{i}$

$$\boxed{|\mathbf{a}| = 6t}$$

c) La aceleración tangencial es la derivada del modulo de la velocidad $a_t = d|\mathbf{v}|/dt \Rightarrow$

$$\boxed{a_t = (1/2)\,(9t^4 + 4)^{-(1/2)}\,36t^3 = \frac{18t^3}{\sqrt{9t^4 + 4}}}$$

La aceleración normal es igual al modulo de la velocidad al cuadrado dividido por el radio de curvatura, pero como no conocemos el radio de curvatura, tenemos que utilizar el hecho de que la aceleración normal y tangencial son perpendiculares:

$$|\mathbf{a}|^2 = a_t^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2} = \sqrt{36\,t^2 - \frac{324t^6}{9\,t^4 + 4}} = \boxed{\frac{12t^2}{\sqrt{9t^4 + 4}}}$$

d) El radio de curvatura (ρ) lo calculamos a partir de la formula de la aceleración normal:

$$a_N = v^2/\rho \Rightarrow \rho = v^2/a_N = \frac{9\,t^4 + 4}{\frac{12t^2}{\sqrt{9t^4 + 4}}} = \boxed{\frac{(9\,t^4 + 4)^{3/2}}{12t^2}}$$

---

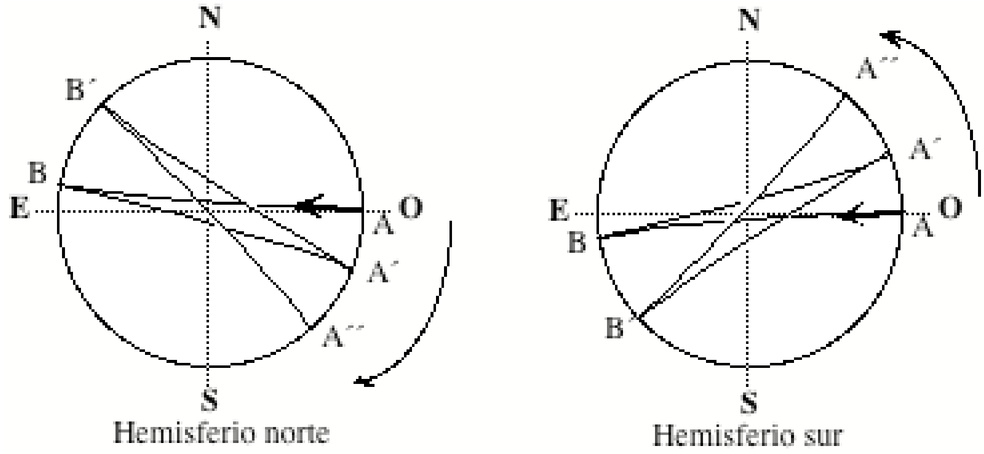
2) Péndulo de Foucault: ¿Qué es? ¿Para que sirve? ¿En que ley o principio físico se basa? Explica su funcionamiento.

SOLUCION:

El péndulo de Foucault es un péndulo simple. Foucault construyó su péndulo en 1851 y lo colgó de la Torre de los Inválidos, en París, para demostrar que la Tierra está girando. El plano de oscilación del péndulo gira 360° en 24 horas. En realidad, el plano de oscilación no es el que gira, sino la Tierra.

En el Hemisferio Norte el plano de oscilación gira en sentido horario, mientras que en el Hemisferio Sur lo hace en el antihorario. Esta variación puede entenderse en términos de la aceleración coriolis: para un observador situado en el Hemisferio Norte, cuando el péndulo realiza una oscilación, sufre una aceleración de Coriolis ($-2\ w \wedge v'$)dirigida hacia la derecha del movimiento, lo que hace que el plano de oscilación gire en sentido horario (ver figura).

Si nos encontramos en el Hemisferio Sur, la aceleración de coriolis va dirigida hacia la izquierda del movimiento, lo que produce que el plano de oscilación gire en sentido antihorario (ver figura).



---

3) Define y explica brevemente las leyes de Newton. ¿De que principio general de la Física se pueden deducir?

SOLUCION:

La **primera ley** se la conoce como ley de inercia y dice que una partícula libre mantiene su estado de movimiento, es decir que si estaba en reposo, sigue en reposo, y si se movía con una velocidad v, mantiene dicha velocidad. Una partícula es libre si no está sujeta a ninguna interacción

$$\text{Partícula libre} \Rightarrow \mathbf{v} = \text{cte}$$

La **segunda ley** dice que para cambiar el estado de movimiento (producir una aceleración) hay que aplicar una fuerza. Para un objeto determinado, la relación entre la fuerza aplicada y la aceleración del objeto es constante $\mathbf{F}/\mathbf{a} = \text{Cte}$. Esta constante es la masa del objeto ($\mathbf{F}/\mathbf{a} = m$), por lo que la masa nos da una medida de la inercia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento. La segunda ley se suele enunciar como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La **tercera ley** se la conoce como ley de acción y reacción y dice que las fuerzas siempre actúan por pares: si un cuerpo A ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ sobre otro B , el cuerpo B, a su vez, realiza una fuerza $\mathbf{F}_{BA}$ sobre el A, de tal forma que las dos fuerzas tienen el mismo módulo, la misma dirección pero sentidos contrarios $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ Además, cada fuerza actúa en un cuerpo distinto.

Las leyes de newton (1^a y 3^a) se pueden deducir directamente a partir del **principio general de conservación del momento lineal**: en un sistema aislado, el momento lineal se conserva. La 1^a se deduce aplicando dicho principio aun cuerpo y la 3^a aplicándolo a un sistema formado por dos cuerpos aislados.

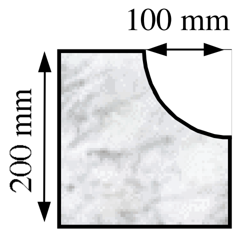
---

4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura (cuadrado al que se le ha quitado un cuarto de círculo).

Nota, recordar que: $S_{disco} = \pi R^2$

$S_{esfera} = 4\pi R^2$

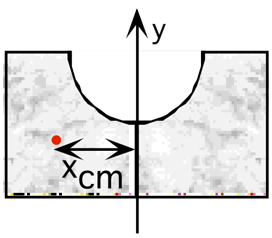
$V_{esfera} = (4/3)\pi R^3$



SOLUCION

La forma mas fácil de calcular el centro de masas es aplicando el segundo teorema de Papus Guldin para volúmenes de revolución:

$$V = 2\pi\, x_{cm}\, S \qquad [1]$$



Si hacemos girar la superficie entorno al eje y tal como muestra la figura, se genera un volumen que es el de un cilindro de radio 200 mm menos el de media esfera de radio 100 mm.

$$\boxed{V} = \pi\, 200^2\, 200 - (1/2)\,(4/3)\,\pi\, 100^3 = 8\,\pi 10^6 - (2/3)\,\pi\, 10^6 = \boxed{(22/3)\,\pi 10^6 \ \ mm^3}$$

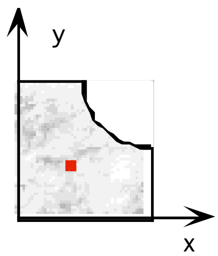
La superficie generadora es la de un cuadrado menos la de un cuarto de circulo

$$\boxed{S} = 200^2 - (1/4)\ \pi\, 100^2 = \boxed{32146\ mm^2}$$

Utilizando la ecuación [1] $\boxed{x_{cm}} = \dfrac{V}{2\pi S} = \dfrac{23.038\ 10^6}{2\pi\, 32146} = \boxed{114.06\ mm}$

Por simetría, el centro de masas se encuentra a la misma distancia del borde superior.

Por lo tanto, si definimos un sistema de ejes tal como muestra la figura, las coordenadas del centro de masas serian:



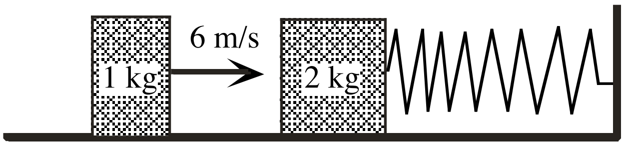
$$\boxed{x_{cm}} = 200 - 114.06 = \boxed{85.94\ mm}$$
$$\boxed{y_{cm}} = 200 - 114.06 = \boxed{85.94\ mm}$$

También se podría calcular considerando la placa como un cuadrado menos un cuarto de circulo.

PROBLEMAS

---

1) Un objeto de 2 kg de masa apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento, se une a un muelle de constante 600 N/m. Otro objeto de 1 kg de masa desliza sobre la superficie acercándose al primero a 6 m/s.



a) Si el segundo objeto choca de forma inelástica perfecta quedando unido también al muelle: Hallar la velocidad de los objetos inmediatamente después del choque. ¿Cuál es la amplitud y el período de oscilación?.
b) Hallar la velocidad de los dos objetos si el choque fuese completamente elástico (e = 1). En este caso determinar la amplitud y el período de oscilación del objeto de 2 kg.
c) ¿Cuál es el impulso aplicado al cuerpo de 2 kg en cada tipo de choque?
d) Para cada tipo de colisión, escribir una expresión para la posición x en función del tiempo t para el objeto unido al muelle, suponiendo que el choque se produce en el tiempo t = 0.

SOLUCION:

a) En este caso se conserva la cantidad de movimiento $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\, v´ \Rightarrow$

$$\boxed{v´} = \frac{m_1v_1 + 0}{m_1 + m_2} = \frac{1 \bullet 6}{1 + 2}\ \boxed{2 \text{ m/s}}$$

Además, para un muelle, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{600}} = 0.444 \text{ s}}$

En el momento del impacto, el muelle está sin comprimir, por lo que no tiene energía potencial elástica. Inmediatamente después del choque, las masas adquieren velocidad por lo que tienen energía cinética que se convertirá en potencial elástica a medida que el muelle se comprima. En el punto de máxima compresión, el desplazamiento del muelle es la amplitud, y toda la energía es potencial elástica

$$(1/2)\, m(v´)^2 = (1/2)KA^2 \quad \boxed{\Rightarrow A = v\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\sqrt{\frac{3}{600}} = 0.1414 \text{ m}}$$

También podríamos haber encontrado al amplitud teniendo en cuenta que la velocidad máxima de un MAS es $\quad v_{max}\ (= v´) = A\omega$

b) Al ser un choque elástico, las velocidades de los dos objetos después del choque son diferentes, por lo que tendremos que aplicar dos ecuaciones: la de conservación del momento lineal, y la del coeficiente de restitución:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1\, v´_1 + m_2\, v´_2 & \Rightarrow \quad 1 \bullet 6 + 2 \bullet 0 = 1\, v´_1 + 2\, v´_2 \Rightarrow \quad 6 = v´_1 + 2\, v´_2 \quad [2] \\ e = -\dfrac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} & \Rightarrow \quad 1 = -\dfrac{v'_2 - v'_1}{0 - 6} \qquad \Rightarrow \quad 6 = v´_2 - v´_1 \quad [3] \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones [2] y [3] se elimina v'_1 y nos queda: $12 = 3\,v'_2 \Rightarrow \boxed{v'_2 = 4\ \text{m/s}}$

Aunque no es necesario para resolver el problema, sustituyendo el valor de v'_2 en la ecuación [3] se encuentra que:

$$v'_1 = -2\ \text{m/s}$$

Para encontrar el período y y la amplitud utilizamos las mismas ecuaciones que en caso anterior:

$$\boxed{T =}\ 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{600}} \boxed{= 0.363\ \text{s}}$$

$$\boxed{A = v}\sqrt{\frac{m}{K}} = 4\sqrt{\frac{2}{600}} \boxed{= 0.231\ \text{m}}$$

c) El impulso se define como $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{P} = m\Delta\mathbf{V}$ y es una magnitud vectorial. En este caso todo el movimiento es a lo largo de una dirección y es mas sencillo tratarlo como una magnitud escalar:

$$I = m_2\,(v'_2 - v_2)$$

Caso inelástico (e = 0) $\boxed{I = 2\,(2 - 0) = 4\ \text{kgms}^{-1}}$

Caso elástico (e = 1) $\boxed{I = 2\,(4 - 0) = 8\ \text{kgms}^{-1}}$

d) El objeto realiza un MAS de ecuación general: $x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$.

Para determinar la fase, sabemos que en ambos casos para t = 0, x = 0, por lo que

$$0 = A\,\text{sen}(\phi) \Rightarrow \text{sen}(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi$$

Para saber cual de los dos ángulos es el correcto, utilizamos el hecho de que la velocidad inicial es positiva.

Como $v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$. Para $t = 0 \Rightarrow v = A\omega\cos(\phi)$.

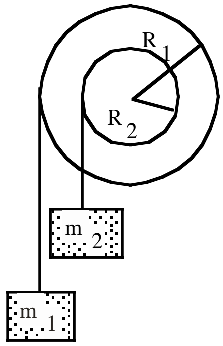
Si la fase fuese $\phi = \pi$, la velocidad sería negativa ($v = -A\omega$), por lo que obligatoriamente $\phi = 0$ ($v = A\omega$),

Caso inelástico (e = 0) $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{600}{3}} = 14.14\ \text{rad/s} \Rightarrow \boxed{x = 0.1414\ \text{sen}\,(14.14\,t)}$

Caso elástico (e = 1) $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{600}{2}} = 17.32\ \text{rad/s} \Rightarrow \boxed{x = 0.231\ \text{sen}\,(17.32\,t)}$

Si utilizamos el coseno, las ecuaciones serían: $\boxed{\begin{array}{l} x = 0.1414\cos(14.14\,t - \pi/2) \\ x = 0.231\cos(17.32\,t - \pi/2) \end{array}}$

2) Tenemos dos poleas sobre mismo eje, de masas M_1 = 2kg y M_2 = 0.5 kg y radios R_1 = 24 cm y R_2 = 8 cm, se supone que tienen sus masas repartidas de forma uniforme sobre las llantas respectivas y están acopladas formando una sola polea. De los hilos arrollados sobre dichas poleas penden las masas m_1 = 2 kg y m_2 = 4 kg. El sistema se deja libre sin velocidad inicial. Calcular:



a) El momento de inercia del conjunto formado por las dos poleas (suponer que las poleas son cilindros).

b) La aceleración angular de las poleas.

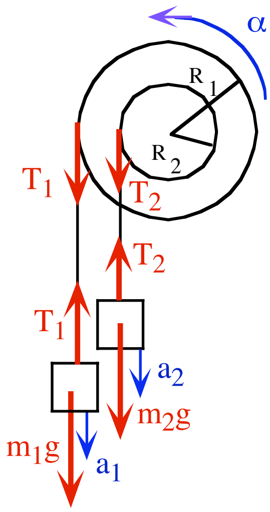
c) Las aceleraciones de m_1 y m_2.

d) Las tensiones de los hilos.

SOLUCION:

a) El momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia de las dos poleas:

$$I = (1/2)M_1 r_1^2 + (1/2)M_2 r_2^2 = \quad (1/2) \cdot 2 \cdot 0.24^2 + (1/2) \cdot 0.5 \cdot 0.08^2 = \boxed{0.0592 \text{ kgm}^2}$$



b) Aplicamos la segunda ley de Newton a las dos masas y su equivalente para la rotación a las poleas. Recordemos que las dos poleas tiene la misma aceleración angular α ($a_1 = \alpha R_1$, $a_2 = \alpha R_2$); además suponemos que el sentido de desplazamiento positivo de las masas es hacia abajo y por lo tanto el de la rotación el antihorario.

$$T_1 R_1 + T_2 R_2 = I\alpha$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 g - m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 g - m_1 \alpha R_1 \qquad [4]$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2 g - m_2 a_2 \Rightarrow \quad T_2 = m_2 g - m_2 \alpha R_2 \qquad [5]$$

Sustituyendo las tensiones en la ecuación de los momentos:

$$(m_1 g - m_1 \alpha R_1)\, R_1 + (m_2 g - m_2 \alpha R_2)\, R_2 = I\alpha \quad \Rightarrow \quad m_1 g\, R_1 + m_2 g\, R_2 - m_1 \alpha R_1^2 - m_2 \alpha R_2^2 = I\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{m_1 g R_1 + m_2 g R_1}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = \frac{2 \cdot 9.81 \cdot 0.24 + 4 \cdot 9.81 \cdot 0.08}{0.0592 + 2 \cdot 0.024^2 + 4 \cdot 0.08^2} = \boxed{39.24 \text{ rad/s}^2}$$

c)

$$a_1 = \alpha R_1 = 39.24 \cdot 0.24 = \boxed{9.42 \text{ m/s}^2}$$

$$a_2 = \alpha R_2 = 39.24 \cdot 0.08 = \boxed{3.14 \text{ m/s}^2}$$

d) Utilizando las ecuaciones [4] y [5]

$$T_1 = m_1 (g - \alpha R_1) = 2\,(9.81 - 39.24 \cdot 0.24) = \boxed{0.78 \text{ N}}$$

$$T_2 = m_2 (g - \alpha R_2) = 4\,(9.81 - 39.24 \cdot 0.24) = \boxed{26.68 \text{ N}}$$

3) Tenemos una pila formada por tres cilindros iguales de peso P, dispuestos como se indica en la figura. Se desprecian los rozamientos

a) Representa todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro superior

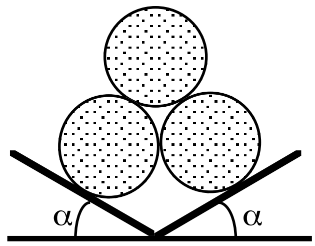
b) Determina el valor de dichas fuerzas en función de "P"

c) Representa todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro inferior izquierdo.

d) Determina el valor de dichas fuerzas en función de "P" y "α".

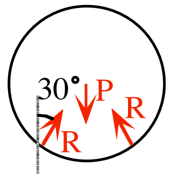
e) Determina el valor numérico de las fuerzas para P = 10 N y α = 45°

f) ¿Cuál ha de ser el mínimo valor del ángulo α para que no se deshaga la pila?

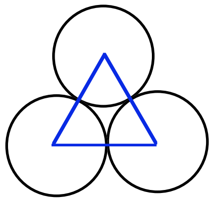


SOLUCION:

a) La fuerzas que actúan sobre el cilindro superior son: donde las reacciones que ejercen los cilindros inferiores "R", por simetría, son iguales.

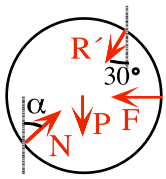


para calcular el ángulo que forma R con la vertical (30°), recordemos que los centros de los 3 cilindros forman un triangulo equilátero, con independencia de cual sea el ángulo α..



b) $\sum Fy = 0 \Rightarrow R\cos 30 + R\cos 30 = P \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{P}{2\cos 30} = \dfrac{P}{2(\sqrt{3}/2)} = \dfrac{P}{\sqrt{3}}}$

c) La fuerzas que actúan sobre el cilindro inferior izquierdo son:



donde R´ es la reacción de R, y por lo tanto tiene su mismo modulo y dirección $(R' = P/\sqrt{3})$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow N\,\mathrm{sen}\alpha - R'\,\mathrm{sen}30 - F = 0 \qquad [6]$$
$$\sum Fy = 0 \Rightarrow N\cos\alpha - R'\cos 30 - P = 0 \qquad [7]$$

despejando N en [7]:

$$N\cos\alpha = P + R'\cos 30 = P + (P/\sqrt{3})\cos 30 = P + P/2 = 3P/2 \Rightarrow \boxed{N = 3P/2\cos\alpha}$$

y sustituyendo este valor de N y el de R´en [6] y despejando F:

$$[3P/2\cos\alpha]\,\mathrm{sen}\alpha - (P/2\cos 30)\,\mathrm{sen}30 = F \Rightarrow \boxed{F = (3P/2)\mathrm{tg}\,\alpha - (P/2)\mathrm{tg}30 = (P/2)(3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}30)}$$

d)

$$R = R' = P/\sqrt{3} \Rightarrow R = R' = 10/\sqrt{3} = 5.77\ N$$
$$N = 3P/2\cos\alpha \Rightarrow N = 3 \bullet 10/2\cos 45 = 21.21\ N$$
$$F = (P/2)(3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}30) \Rightarrow F = (10/2)(3\mathrm{tg}\,45 - \mathrm{tg}30) = 12.11\ N$$

e) la pila no se deshará siempre que $F \geq 0 \Rightarrow$

$$3\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}30 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha \geq (1/3)\mathrm{tg}30 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha \geq 0.1925 \Rightarrow \boxed{\alpha \geq 10.89°}$$