EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 10-9-2007

CUESTIONES

---

1) Definir las componentes intrínsecas de la aceleración (a_N y a_T) y explicar sus efectos sobre un movimiento cualquiera.

SOLUCION:

Las dos componentes intrínsecas de la aceleración son la aceleración tangencial(a_T) y al aceleración normal (a_N).

La aceleración tangencial se define como la derivada del modulo de la velocidad respecto del tiempo

$$\boxed{a_T = \frac{d|v|}{dt}}$$

Por su parte, la aceleración normal se define como

$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{\rho}}$$

Siendo ρ el radio de curvatura.

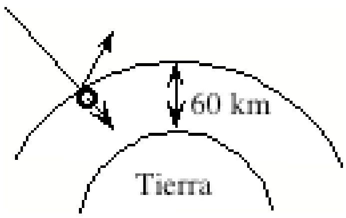
La aceleración normal es, como su nombre indica, tangente de trayectoria, siendo responsable de la variación del módulo de la velocidad.

La aceleración tangencial es perpendicular a la trayectoria, dirigida hacia el interior de la curvatura, y hace que varíe la dirección de la velocidad.

2) El muón es una partícula inestable cuya masa es unas 207 veces la masa del electrón. Estas partículas se desintegran con una vida media τ; esto significa que si tenemos un numero de muones N en reposo en el laboratorio, cuando ha pasado un tiempo τ solo nos quedan la mitad de los muones (N/2). Siguiendo el mismo razonamiento, cuando ha pasado un tiempo $n\tau$ nos quedaran ($N/2^n$). Sabemos que los muones en reposo en el laboratorio tienen una vida media de $1.5\ 10^{-6}$ s, que se producen en la atmósfera a una altura de 60 Km y que tienen una velocidad cercana a la de la luz (v = 0.999 c) ¿Que fracción de los muones llegan a la superficie terrestre? Explica por que.

SOLUCION

La velocidad de los muones es $v = 0.999\ c = 0.999{*}3\ 10^8$ m/s $= 2.9949\ 10^8$ m/s



El tiempo que tardan en alcanzar la superficie terrestre es igual al espacio dividido por la velocidad:

$$\boxed{t = 60 \bullet 10^3 / 2.9949\ 10^8 = 2\ 10^{-4}\ \text{s}}$$

Si dividimos este tiempo por la vida media ($\tau = 1.5\ 10^{-6}$ s) encontramos cuantas vidas medias pasan hasta llegar a la Tierra

$$t/\tau = 2\ 10^{-4} / 1.5\ 10^{-6} = 133 \Rightarrow \boxed{t = 133\tau}$$

si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^{133} = 10^{-40}N$

Sin embargo se observa que llegan muchos mas. La explicación radica en que los muones viajan a velocidades cercanas a la de la luz, y por lo tanto para ellos el tiempo que tardan en alcanzar la Tierra (tiempo propio t´) es diferente al observado por nosotros (t).

La relación es $t = \gamma t'$ con $\boxed{\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{(0.999c)^2}{c^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = \boxed{22.2}$

El tiempo propio es $\boxed{t' = t/\gamma = 2\ 10^{-4} / 22.2 = 9.09\ 10^{-6}\ \text{s}}$

Si calculamos de nuevo a cuanta vidas medias corresponde este tiempo:

$$t'/\tau = 9.09\ 10^{-6} / 1.5\ 10^{-6} = 6 \Rightarrow \boxed{t' = 6\tau}$$

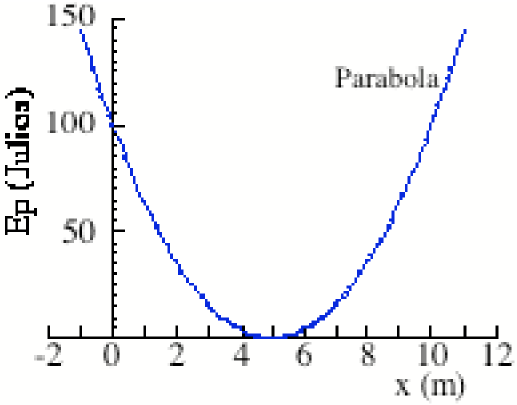
Si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^6 = \boxed{(1/64)\ N}$

3) : La gráfica representa la energía potencial de una partícula de masa m = 2 kg que se mueve a lo largo del eje x.

a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula?

b) Si su energía potencial máxima es de 144 Julios, ¿que velocidad tendrá la partícula en x = 5 m.?

c) Con la misma energía potencial, y sabiendo que para t = 0, x = 5 m, encuentra la ecuación del movimiento x(t).



SOLUCION:

a) Como el potencial es parabólico, el movimiento será un movimiento vibratorio armónico simple (MAS) centrado en una posición x_0 = 5 m.

b) En x = 5m, la energía potencial vale 0, por lo que toda la energía será cinética, es decir, los 144 Julios serán de energía cinética:

$$(1/2)mv^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = (2\ 144/2)^{1/2} = 12 \text{ m/s}}$$

c) La ecuación general de un MAS es:

$(x - x_0) = A \cos(\omega t + \varphi)$, por lo que tenemos que encontrar los valores de A, ω y φ.

Al ser un MAS, la fuerza que lo genera es del tipo $F = -k\ (x-x_0)$, y tiene asociada una energía potencial que sigue la ecuación: $E_p = (1/2)k\ (x-x_0)^2$. Para determinar la constante k utilizamos los datos de la gráfica: sabemos que en x = 0 E_p = 100, por lo que $100 = (1/2)k\ (0 - 5)^2$, de donde despejamos k:

$$k = 200/25 = 8\ \ J/m^2\ (N/m).$$

Una vez conocida k, podemos determinar la amplitud y la frecuencia angular. Si la E_p máxima es 144 J:

$$E_{pmax} = (1/2)\ k\ A^2 \quad \Rightarrow \quad A = (2E_{pmax} / k)^{1/2} = 6 \text{ m}$$

La frecuencia angular es $\omega = (k / m)^{1/2} = (8 / 2)^{1/2} = 2$ rad/s

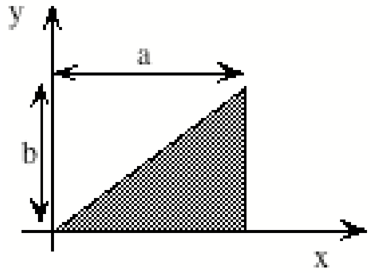
Finalmente, sabemos que para t = 0 x = 5m, por lo que aplicando la ecuación general en esas condiciones:

$$(5\text{-}5) = 6 \cos(2\ 0 + \varphi) \Rightarrow 0 = 6 \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2 \ \text{ o } \ 3\pi/2$$

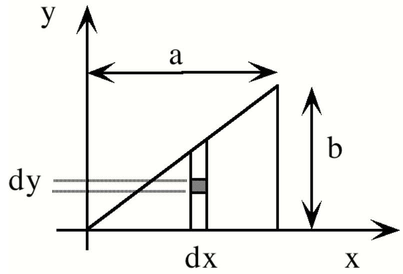
por lo que la ecuación del movimiento será:

$$\boxed{x = 5 + 6 \cos(2\,t + \pi/2) \text{ o bien } x = 5 + 6 \cos(2t + 3\pi/2)}$$

4) Determina la posición del centro de masas del cuerpo homogéneo de la figura.



SOLUCION:



Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\, ds}{\int ds}$ y teniendo en cuenta que $ds = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta de pendiente $k = b/a$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_0^{kx} dy}{\int_0^a dx \int_0^{kx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx\,[y]_0^{kx}}{\int_0^a dx\,[y]_0^{kx}} = \frac{\int_0^a x\,dx\ kx}{\int_0^a dx\ kx} = \ldots\ldots$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la recta (kx) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y a.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\int_0^a kx^2\,dx}{\int_0^a kx\,dx} = \frac{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a} = \frac{k\dfrac{a^3}{3}}{k\dfrac{a^2}{2}} = \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{a^3}{3}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{a^2}{2}} = \frac{b\dfrac{a^2}{3}}{b\dfrac{a}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}a}$$

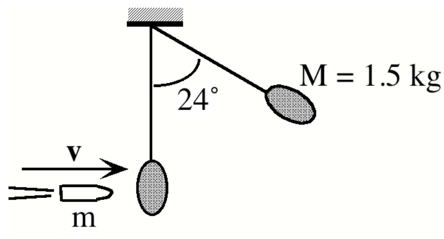
Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_0^{kx} y\,dy}{\int_0^a dx \int_0^{kx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^{kx}}{\int_0^a dx\,[y]_0^{kx}} = \frac{\int_0^a dx\ \dfrac{k^2x^2}{2}}{\int_0^a dx\ kx} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a} = \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a} = \frac{\dfrac{k^2}{2}\dfrac{a^3}{3}}{k\dfrac{a^2}{2}} = \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\dfrac{a^3}{6}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{a^2}{2}} = \frac{b^2\dfrac{a}{6}}{b\dfrac{a}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}b}$$

PROBLEMAS

1) Un péndulo balístico consta de una masa de 1.5 kg suspendida de una cuerda de 1m. Un proyectil de 10 g de masa posee una velocidad inicial de 400 m/s y pasa a través de la masa de 1.5 kg. Después del choque, el péndulo oscila formando un ángulo máximo de 24° respecto a la vertical. Calcular:
a) La energía adquirida por el péndulo en el choque.
b) La velocidad final del proyectil después del choque.
c) La energía perdida en el choque.



SOLUCION:

a) Al ser atravesado por la bala, el péndulo adquiere energía cinética y comienza a oscilar. Cuando el péndulo oscila, convierte la energía cinética en energía potencial gravitatoria. En el punto mas alto, solo tiene energía potencial. La energía adquirida es igual a esta energía potencial:

$$\boxed{Ep = mg\,\Delta h = mg\,1(1 - \cos 24) = 1.5 \bullet 9.81 \bullet 1\,(1 - \cos 24) = 1.272 \text{ Julios}}$$

b) Primero tenemos que determinar la velocidad del saco (V´)después del choque. La energía cinética adquirida es la que se convierte en potencial:

$$Ep = Ec = (1/2)\, mV'^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V' = \sqrt{\frac{2\,Ep}{m}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 1.272}{1.5}} = 1.302 \text{ m/s}}$$

A continuación aplicamos que la conservación del momento lineal durante el choque teniendo en cuenta que la velocidad inicial del saco es cero (V = 0):

$$mv = mv' + MV' \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = \frac{mv - MV'}{m} = \frac{0.01 \bullet 400 - 1.5 \bullet 1.302}{0.01} = 204.7 \text{ m/s}}$$

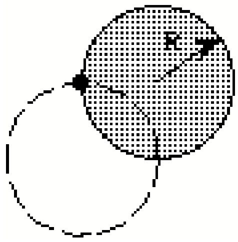
c) Antes del choque la energía es la cinética de la bala (Eci). Después del choque, la energía es la suma de las energías cinéticas de la bala y del saco (Ecf). La energía perdida es la energía final menos la inicial.

$$\boxed{Eperdida} = Eci - Ecf = (1/2)\, m\, v^2 - [\,(1/2)\, m\, v'^2 + (1/2)\, M\, V'^2] =$$

$$= (1/2) \bullet 0.01 \bullet 400^2 - [(1/2) \bullet 0.01 \bullet 204.7^2 - (1/2) \bullet 1.5 \bullet 1.302^2] = 800 - [209.5 + 1.272] =$$

$$800 - 210.77 = \boxed{589.23 \text{ J}}$$

2) Un disco sólido uniforme de radio R y masa m puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto de su borde (ver figura). Sabiendo que el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular que pase por su centro es $(1/2)mR^2$:



a) Determina el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al disco que pase por el borde.

Si el disco se libera a partir del reposo en la posición mostrada en la figura:
b) ¿Cuál es la aceleración angular inicial del disco?
c) Calcular la velocidad de su centro de masa cuando alcanza la posición indicada por el círculo de líneas de trazo
e) Calcular numéricamente los apartados a) , b) y c) para m = 1kg y R = 20 cm

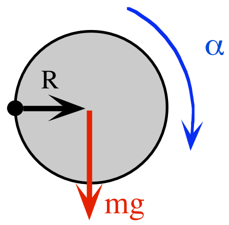
SOLUCION:

a) Como los dos ejes son paralelos podemos aplicar el teorema de Stenier:

$$I = I_{CM} + md^2 = (1/2)m R^2 + MR^2 = (3/2)m R^2 \qquad (3.1)$$

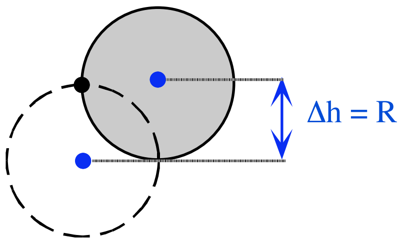
b) Aplicamos $\sum M = I\alpha$

Despejando α y teniendo en cuenta que respecto al eje de giro, el único momento es el del peso: M = mgR



$$\alpha = \frac{\sum M}{I} = \frac{mgR}{\frac{3}{2}mR^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \qquad (3.2)$$

c) Aplicamos el teorema de conservación de la energía entre las dos posiciones. En la inicial solo tenemos energía potencial gravitatoria (mgh), que se transforma en energía cinética de rotación $[(1/2)I\omega^2]$. La energía potencial se calcula en el centro de masas y suponemos que en la parte inferior la energía potencial es cero. La variación de altura es $\Delta h = R$



$$mgR = (1/2)\, I\, \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mgR}{I}} = \sqrt{\frac{2mgR}{\frac{3}{2}mR^2}} = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad lineal de un punto es el producto de la velocidad angular por la distancia de dicho punto al eje de giro. En este caso esa distancia es el radio R

$$v = \omega\, R = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \qquad (3.3)$$

d) Si tomamos m = 1kg y R = 20 cm

$$(3.1) \Rightarrow I = (3/2)m\,R^2 \quad \Rightarrow \quad I = (3/2)\,1\bullet 0.2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0.06\ \text{kgm}^2}$$

$$(3.2) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\,\frac{9.81}{0.2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha\ = 32.7\ \text{rad/s}^2}$$

$$(3.3) \Rightarrow v\ = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \quad \Rightarrow \quad v\ = \sqrt{\frac{4\bullet 9.81\bullet 0.2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 1.62\ \text{m/s}}$$

---

3) El extremo de un canal de agua está formado por una placa ABC que está articulada en B y tiene 1.2 m de ancho. Sabiendo que b = 600 mm y h = 450 mm, hallar:

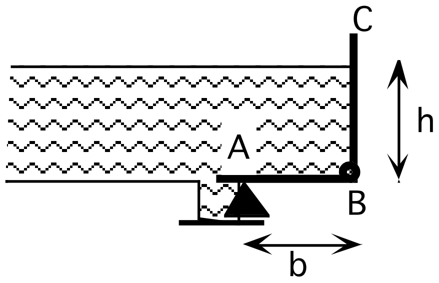
a) La presión absoluta en el punto A.

b) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado AB.

b) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado BC y el punto de aplicación de la misma.

c) Las reacciones en A y B.

d) Calcular la relación h/b para la cual la reacción en A es nula.



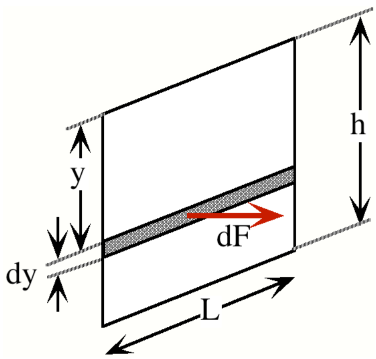
SOLUCION:

a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (Patm) mas la debida al agua:

$$P = Patm + \rho g H\ =\ 1.013\bullet 10^5\ + 10^3\bullet 9.81\bullet 0.45\ =\ 1.013\bullet 10^5 +\ 0.044\bullet 10^5\ \Rightarrow \boxed{P = 1.057\ 10^5\ \ \text{Pascales}}$$

b) Como por la parte inferior del lado AB actúa la Patm, la fuerza neta que actúa sobre ese AB es la debida a la presión del agua: $F_{AB} = (P\text{-}Patm)\ Area\ = \rho gh\ Area\ = 0.0441\bullet 10^5\ \bullet 0.6\bullet 1.2 \Rightarrow \boxed{F_{AB} = 3175\ \text{N}}$

c) Como Patm actúa en ambos lados de la parte BC, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:

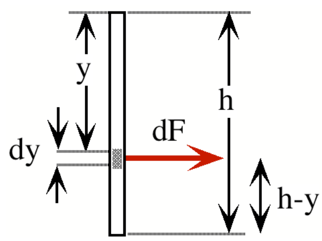


$$dF = Pds = PLdy = \rho gy\ Ldy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F_{BC}} = \int_0^h \rho\, g\, y\, L\, dy\ =\ \rho\, g\ \ L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h\ \ \boxed{=\ (1/2)\,\rho\, g\ \ L\, h^2} \Rightarrow \boxed{F_{BC}} = (1/2)\ 10^3\bullet 9.81\bullet 1.2\bullet (0.45)^2\ \boxed{= 1192\ \text{N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento <u>respecto a un punto del fondo</u> B de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM = dF(h-y) = \rho g y\, L dy\, (h-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^h \rho\, g y L\, (h-y)\, dy = \rho\, g L \int_0^h (hy - y^2)\, dy = \rho\, g L\left(h\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \right) = \rho\, g L\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow$$

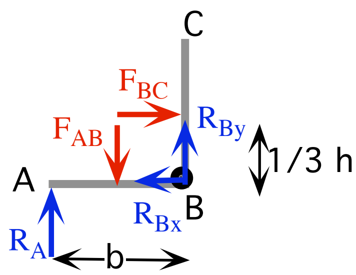
$$\boxed{M = (1/6)\, \rho g L h^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$F_{BC} d = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F_{BC}} = \frac{(1/6)\, \rho\, g\, L\, h^3}{(1/2)\, \rho\, g\, L\, h^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3)\, h = 0.15 \text{ m}}$$

c) Las fuerzas que actúa sobre la placa se muestran en la figura:



Calculando momentos respecto al punto B; $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow$

$$R_A b + F_{BC}(h/3) - F_{AB}\,(b/2) = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = F_{AB}/2 - F_{BC}(h/3b) = 3175/2 - 1192(0.45/3 \cdot 0.6) \Rightarrow \boxed{R_A = 1289.5 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - R_{Bx} = 0 \Rightarrow \boxed{R_{Bx} = F_{BC} = 1192 \text{ N}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{By} + R_A - F_{AB} = 0 \Rightarrow R_{By} = F_{AB} - R_A \Rightarrow \boxed{R_{By} = 3175 - 1289.5 = 1885.5 \text{ N}}$$

d) Si $R_A = 0 \Rightarrow F_{BC}(h/3) - F_{AB}\,(b/2) = 0 \Rightarrow (1/2)\, \rho\, g\, L\, h^2\, (h/3) = \rho\, g\, h\, L\, b\, (b/2) \Rightarrow$

Dividiendo por $\rho\, g\, L$: $\Rightarrow (1/6)\, h^3 = (1/2)\, b^2 h \Rightarrow h^2 = 3\, b^2 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{3}\, b}$