EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 12-2-2007

CUESTIONES

---

1) La aceleración de un cuerpo que se mueve en línea recta viene dada por $a = 2 - t$ con a en m/s^2 y t en s. Sabiendo que el cuerpo parte del reposo en la posición $x = 5$, hallar:

a) La expresión de la velocidad y la posición en función el tiempo.
b) El instante en el que la velocidad es nula.
c) Representar a y v en función del tiempo.

SOLUCION:

a) Recordando que $a = dv/dt \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int dv = \int a\,dt + c_1$

Sustituyendo el valor de la aceleración dentro de la integral

$$\int dv = \int (2 - t)\,dt + c_1 \quad \Rightarrow v = 2t - t^2/2 + c_1$$

Para determinar c1 imponemos que para $t = 0$, $v = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + c1 \Rightarrow c_1 = 0$, por lo tanto

$$\boxed{v = 2t - t^2/2}$$

Para determinar la posición, partimos de $v = dx/dt \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int dx = \int v\,dt + c_2$

Sustituyendo el valor de la velocidad dentro de la integral

$$\int dx = \int (2t - \frac{t^2}{2})\,dt + c_2 \quad \Rightarrow x = 2\,t^2/2 - t^3/6 + c_2$$

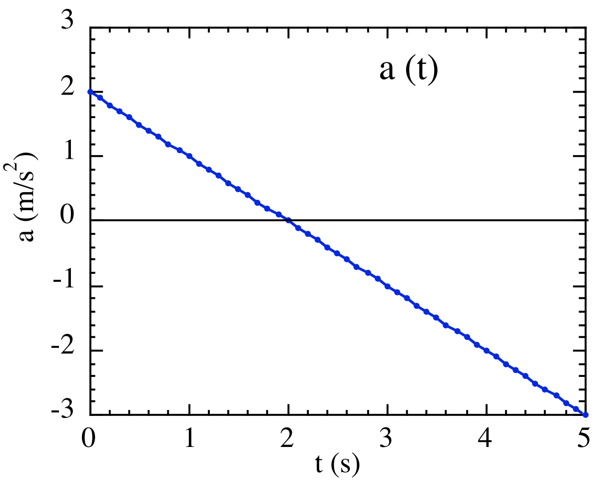
Para determinar c_2 imponemos que para $t = 0$, $x = 5 \Rightarrow 5 = 0 - 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 5$, por lo tanto

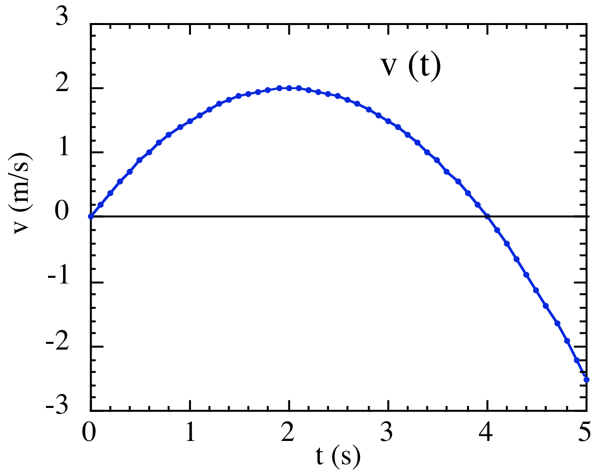
$$\boxed{x = 5 + t^2 - \frac{t^3}{6}}$$

b) Si la velocidad es nula $\Rightarrow 0 = 2t - t^2/2 = (2 - t/2)\,t \Rightarrow$ hay dos posibilidades,

$$t = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 0}$$
$$2 - t/2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

c)



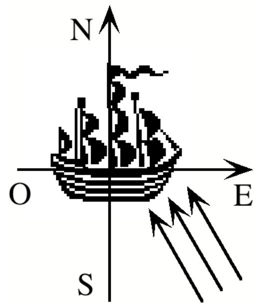


---

2) Un barco navega siguiendo el ecuador hacia el Este con una velocidad de 30 km/h. Desde el Sudeste hacia el ecuador sopla un viento con una velocidad de 15 km/h formando un ángulo de 60˚ con el ecuador.

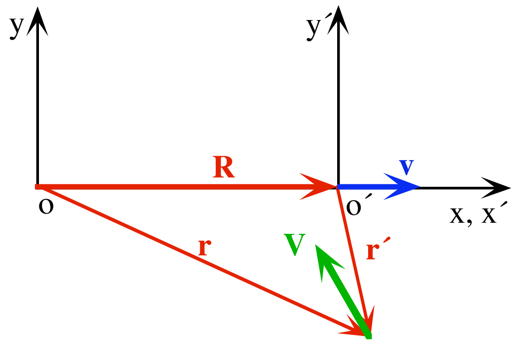
d) Hallar la velocidad del viento respecto al barco.

e) Calcular el ángulo entre el ecuador y la dirección del viento en el sistema de referencia ligado al barco.



SOLUCION:

a) Supongamos que tenemos un sistemas de referencia fijo (OXY) y otro situado en el barco (O´X´Y´) de forma que ambos tengan los ejes paralelos. Si el eje x es paralelo al ecuador, el sistema O´X´Y´ se moverá con una velocidad **v** = v**i** .



Tal como vimos en teoría, la posición de una partícula respecto al sistema O viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema O´ el vector de posición será **r´**.

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$

Derivando obteníamos la relación vectorial entre las velocidades:

$$\boxed{\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}} \qquad (2.1)$$

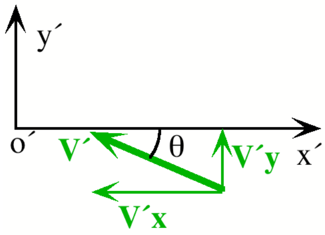
Con $\mathbf{v} = 30\ \mathbf{i}$ km/h

$\mathbf{V} = (-15 \cos 60\ \mathbf{i} + 15 \text{ sen } 60\ \mathbf{j})$ km/h

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.1)

$$\boxed{\mathbf{V'}} = (-15 \cos 60\, \mathbf{i} + 15 \,\text{sen}\, 60\, \mathbf{j}) - 30\, \mathbf{i} = \boxed{(-37.5\, \mathbf{i} + 12.99\, \mathbf{j})\ \text{km/h}}$$

$$\boxed{|\mathbf{V'}| = 39.68\ \text{km/h}}$$

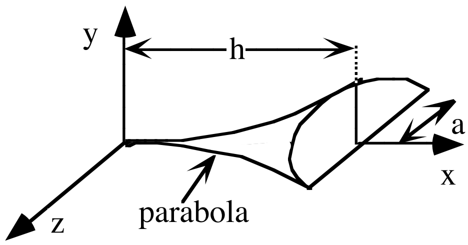


b) Si el ángulo que forma la dirección del viento con el ecuador es θ, su tangente vale:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{V'y}{|V'x|} = \frac{12.99}{37.7} = 0.3464 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 19.1°}$$

---

3) Determinar el centro de masas del cuerpo homogéneo de la figura. Nota: en un semidisco de radio r, el centro de masas está a una distancia de $4r/3\pi$ de la base.



SOLUCION:

Podemos suponer el cuerpo como la suma de una infinidad de semidiscos de espesor dx y radio r situados en una coordenada x tal que

$$r = y = Kx^2 \qquad (3.1)$$

el centro de masas de cada uno de estos semidiscos estará en $\begin{cases} x_{CM} = x \\ y_{CM} = 4r/3\pi \\ z_{CM} = 0 \end{cases}$ (3.2)

El volumen de estos semidiscos es $dV = (1/2)\,\pi\, r^2\, dx$ (3.3)

El valor de r se puede poner en función de x utilizando la ecuación (3.1) $r = Kx^2$, además, el último semidisco está en un aposición $x = h$ y tiene un radio $r = a$, por lo que se cumple $a = Kh^2, \Rightarrow K = a / h^2$. Con estos datos, la ecuación (3.3) se convierte en:

$$dV = (1/2)\,\pi\,(K\,x^2)^2\, dx = (1/2)\,\pi\,((a/h^2)x^2)^2\, dx = (1/2)\,\pi\,(a^2/h^4)x^4\, dx \qquad (3.4)$$

Ahora utilizamos las expresiones:

$$x_{CM} = \frac{\int x_{CM}\, dV}{\int dV} \tag{3.5}$$

$$y_{CM} = \frac{\int y_{CM}\, dV}{\int dV} \tag{3.6}$$

$$z_{CM} = \frac{\int z_{CM}\, dV}{\int dV} \tag{3.7}$$

donde:

$$\int dV = \int_0^h \frac{\pi a^2 x^4 dx}{2h^4} = \frac{\pi a^2}{2h^4}\int_0^h x^4 dx = \frac{\pi a^2}{2h^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^h = \frac{\pi a^2}{2h^4}\frac{h^5}{5} = \boxed{\frac{1}{10}\pi a^2 h}$$

$$\int x_{CM}\, dV = \int_0^h x\,\frac{\pi a^2 x^4 dx}{2h^4} = \frac{\pi a^2}{2h^4}\int_0^h x^5 dx = \frac{\pi a^2}{2h^4}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^h = \frac{\pi a^2}{2h^4}\frac{h^6}{6} = \boxed{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2}$$

$$\int y_{CM}\, dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi}\frac{\pi a^2 x^4 dx}{2h^4} = \int_0^h \frac{4Kx^2}{3\pi}\frac{\pi a^2 x^4 dx}{2h^4} = \int_0^h \frac{4(a/h^2)x^2}{3\pi}\frac{\pi a^2 x^4 dx}{2h^4} =$$

$$\frac{2\, a^3}{3h^6}\int_0^h x^6 dx == \frac{2\, a^3}{3h^6}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^h = \frac{2\, a^3}{3h^6}\frac{h^7}{7} = \boxed{\frac{2}{21}\, a^3 h}$$

$$\int z_{CM}\, dV = \int 0\, dV = \boxed{0}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7)

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\int x_{CM}\, dV}{\int dV} = \frac{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2}{\frac{1}{10}\pi a^2 h} = \boxed{\frac{5}{6}h}$$

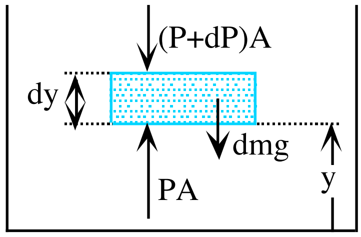
$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y_{CM}\, dV}{\int dV} = \frac{\frac{2}{21}\, a^3 h}{\frac{1}{10}\pi a^2 h} = \boxed{\frac{20\, a}{21\, \pi}}$$

$$\boxed{z_{CM}} = \frac{\int z_{CM}\, dV}{\int dV} = \frac{0}{\frac{1}{10}\pi a^2 h} = \boxed{0}$$

4) Explicar y deducir la Ecuación Fundamental de la Estática de Fluidos a partir de las leyes de Newton.

SOLUCION

Si tenemos un fluido que está en reposo, las fuerzas que se ejercen sobre un elemento cualquiera de dicho fluido, deben de ser cero. Consideramos un elemento imaginario en forma de disco, con sus dos caras paralelas de superficie A perpendiculares a la dirección vertical, y un grosor dy. Sobre este elemento actúa la fuerza de la gravedad, como no se mueve, tiene que haber una fuerza que compense al peso. Esta fuerza solo puede estar originada por las diferencias de presión entre la parte inferior y superior del disco. El peso del disco es: $dmg = \rho dVg = \rho Adyg$



Si suponemos que a una altura y la presión es P y a una altura y+dy la presión es P+dP, las fuerzas que se ejercen sobre el disco son las mostradas en la figura.

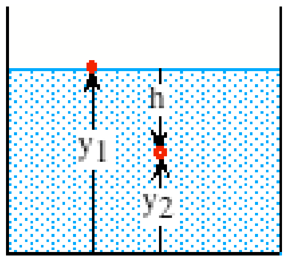
Como $\sum Fy = 0 \Rightarrow PA - (P + dP)A - \rho Adyg = 0 \Rightarrow dP = -\rho\, g\, dy = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dp}{dy} = -\rho g}$

Esta es la ecuación fundamental de la hidrostática en su forma diferencial. El signo – indica que la presión disminuye al aumentar y o lo que es lo mismo, al aumentar la altura. Para calcular variaciones de presión dentro del fluido, tenemos que integrar entre dos puntos. Si consideramos el punto 1 (y_1) en la superficie libre y el punto 2 (y_2) a una profundidad h, la relación entre las presiones será:

$$dP = -\rho g\, dy = 0 \Rightarrow \int_1^2 dP = -\int_1^2 \rho\, gdy \Rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$P_2 = P_1 - \rho g(y_2 - y_1)$$

Si definimos la profundidad h como $h = -\Delta y = -(y_2 - y_1)$ la ecuación anterior se transforma en

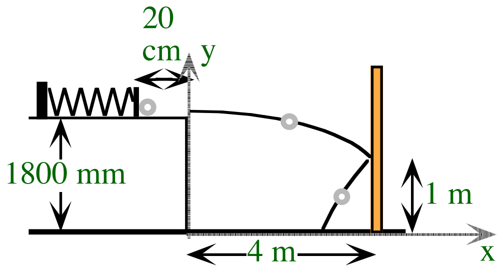


$$\boxed{P_2 = P_1 + \rho gh}$$

PROBLEMAS

---

1) Tenemos un muelle sobre una superficie horizontal a una altura de 1800 mm y una pared vertical lisa a 4 m de distancia. Utilizamos el muelle para lanzar una bola de 2 kg de peso, para lo cual, lo comprimimos 20 cm. Sabiendo que la bola choca con la pared a una altura de 1 m y que el coeficiente de restitución entre ambos es de e = 0.5, determinar:



a) La constante del muelle.
b) El punto del eje x en el cual la bola llega al suelo.
c) Angulo que forma la trayectoria con la horizontal en dicho punto.
d) Ecuación de la trayectoria que sigue la bola desde que abandona el muelle hasta que choca contra la pared.

SOLUCION:

a) En la dirección vertical, el movimiento es uniformemente acelerado $\Rightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2 \Rightarrow$

$$1.8 = 1 + 0 + (1/2)\,(-9.81)\, t^2 \;\Rightarrow\; t^2 = (2\bullet 0.8)/\,9.81 \;\Rightarrow\; \boxed{t\ =\ 0.4039\ s}$$

Este es el tiempo que la pelota tarda en llegar desde el muelle (y = 1.8 m) hasta la pared (y = 1 m).

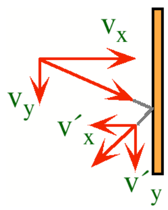
En la dirección horizontal, el movimiento es uniforme $\Rightarrow$ $v_x = x/t\ = 4\,/\,0.4039 \Rightarrow$ $\boxed{v_x = 9.9034\ m/s}$

Cuando la bola sale despedida por el muelle, solo tiene velocidad horizontal: v_x = 9.9045 m/s. Para calcular la constante del muelle, utilizamos el que la energía potencial elástica del muelle se convierte en energía cinética:

$$1/2\ \ Kx^2\ = 1/2\ mv^2 \;\Rightarrow\; \boxed{K = \ mv^2/\,x^2\ =\ 2\bullet\,(9.9045)^2/\,(0.2)^2 =\ \ 4905\ N/m}$$

b) Las componentes de la velocidad de la bola al llegar a la pared son:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_x = \qquad\qquad\qquad\qquad = \ \ 9.9045\ m/s \\ v_y = -\ g\ t = -9.81\bullet 0.4039 = -\ 3.9623\ m/s \end{array}}$$



El choque que realiza la bola contra la pared es oblicuo, por lo que en la dirección y la velocidad no cambia,

$$\boxed{v'_y = v_y = -\ 3.9623\ m/s}$$

mientras que en la dirección x hay que aplicar la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\ \frac{v'_x - v'_{Px}}{v_x - v_{Px}} \qquad \text{con } v'_{Px} = v_{Px} =\ 0 \quad \Rightarrow \quad e = -\ \frac{v'_x}{v_x} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{v'_x = -\ e\ v_x\ \ = -\ 0.5\bullet 9.9045\ m/s\ \ =\ \ -\ 4.9523\ \ m/s}$$

para calcular el tiempo que tarda en llegar de la pared (y = 1 m) al suelo(y = 0 m), recordamos que en la dirección vertical el movimiento es uniformemente acelerado $\Rightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2 \Rightarrow$

$$0 = 1 - 3.9623\, t + (1/2)\,(-9.81)\, t^2 \quad \Rightarrow \quad 4.905\, t^2 + 3.9623\, t - 1 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado con dos soluciones: una negativa, y la otra $\boxed{t = 0.2019 \text{ s}}$

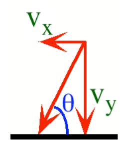
El espacio en la dirección x que recorre desde la pared es $\Delta x = v_x t = -4.9523 \bullet 0.2019 = -0.9999$ m $\Rightarrow$

la coordenada x es $\boxed{x = 4 - 0.999 = 3.0001 \text{ m}}$

c) Al llegar al suelo, las velocidades son: $v_x = -4.9523$ m/s

$v_y = -3.9623 - 9.81 \bullet 0.2019 = -5.9429$ m/s

y $\operatorname{tg}\theta = -v_y / -v_x = 5.9429 / 4.9523 \Rightarrow \boxed{\theta = 50.19°}$



d) $x = 9.9034\, t \quad \Rightarrow \quad t = x/9.903$

$y = 1.8 - (1/2)\, 9.81\, t^2 \quad \Rightarrow$ (sustituyendo t) $\Rightarrow \quad \Rightarrow \boxed{y = 1.8 - 0.05\, x^2}$

---

2) Suponga que a un disco sólido de radio R se le da una velocidad angular ω_0 respecto de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta un superficie horizontal áspera en donde se suelta. Además, suponga que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ.

a) ¿Cuál es la velocidad angular del disco una vez que se establece el movimiento de rotación puro?

b) Encontrar la fracción de energía cinética que se pierde desde que se libera el disco hasta que alcanza el movimiento de rotación puro.

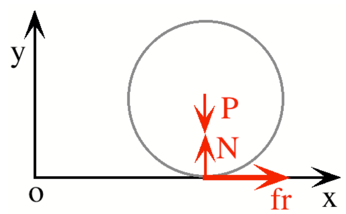
c) Calcular el tiempo que tarda en alcanzar dicho movimiento en función de R, ω_0, μ y g.

d) Calcular la distancia que recorre el disco antes de tener un movimiento de rodadura puro en función de R, ω_0, μ y g.

e) Calcular numéricamente los apartados a), c) y d) (velocidad angular, tiempo y distancia) cuando R = 10 cm, ω_0 = 300 rad/s y μ= 0.2.

SOLUCION:

a) Al apoyar el disco, las fuerzas que actúan son el peso, la normal y la fuerza de rozamiento. Si calculamos el momento de estas fuerzas respecto al origen de coordenadas, el momento del peso y la normal son iguales en magnitud pero tienen sentidos opuestos, así que se cancelan. Por otra parte, la fuerza de rozamiento pasa por el origen por lo que su momento es nulo.



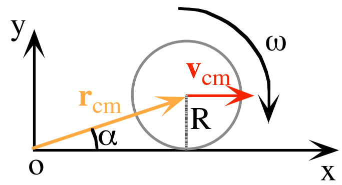
Como el momento total respecto al origen es nulo, el momento angular respecto al origen se conserva.

El momento angular respecto al origen es el momento angular respecto al centro de masas ($I\omega$) mas el momento angular asociado a la traslación del centro de masas $\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}$:

$$L = I\omega + \mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \wedge m\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}$$

Todos los momentos llevan siempre la misma dirección, la perpendicular al plano, por lo que nos quedamos con sus componentes y los tratamos como escalares:

En el **estado inicial**, $\mathbf{v}_{\mathbf{cm}} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{L_0 = I\,|\boldsymbol{\omega}_0| = I\omega_0 = (1/2)mR^2\,\omega_0}$



Cuando **el disco rueda sin deslizar**, se cumple que $|\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}| = \omega R$ y el momento angular será:

$$L = I|\omega| + |\mathbf{r}_{\mathbf{cm}} \wedge m\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}| = I\,\omega + m\,|\mathbf{r}_{\mathbf{cm}}|\,|\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}|\cos\alpha = (1/2)mR^2\,\omega + m\,R\,|\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}| \Rightarrow$$

$$\boxed{L = (1/2)mR^2\,\omega + m\,R\,\omega R = (3/2)mR^2\,\omega}$$

Igualando el momento angular inicial y final: $(1/2)mR^2\,\omega_0 = (3/2)mR^2\,\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 / 3}$

b) Inicialmente la energía es solo de rotación: $\boxed{Ec_0 = (1/2)\,I\,\omega_0^2 = (1/2)\,(1/2)mR^2\,\omega_0^2 = (1/4)mR^2\,\omega_0^2}$

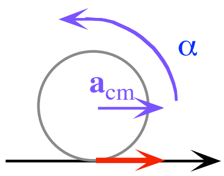
Cuando **el disco rueda sin deslizar** la energía es la suma de energía cinética de rotación respecto al centro de masas mas energía cinética de traslación del centro de masas:

$$Ec_f = (1/2)\,I\,\omega^2 + (1/2)m\,(v_{cm})^2 = (1/2)\,(1/2)mR^2\omega^2 + (1/2)m\,(\omega R)^2 = (3/4)\,mR^2\omega^2$$

$$= (3/4)\,mR^2(\omega_0/3)^2 = \boxed{(3/12)\,mR^2\omega_0^2}$$

La fracción de energía cinética que se pierde en tanto por ciento es :

$$\boxed{Eper. = 100\,\frac{Ec_0 - Ec_f}{Ec_0} = 100\,\frac{(1/4)\,\cancel{mR^2\omega_0^2} - (1/12)\,\cancel{mR^2\omega_0^2}}{(1/4)\,\cancel{mR^2\omega_0^2}} = 100\,\frac{(2/12)}{(1/4)} = 100\,\frac{8}{12} = 66.6\%}$$



c) Durante el periodo en el que el disco esta derrapando sobre el suelo, actúa la fuerza de rozamiento. Esta fuerza por una parte crea un momento respecto al centro de masas que hace que la velocidad angular disminuya, y por otra , origina un impulso, que hace que el centro de masas adquiera velocidad. La fuerza de rozamiento solo actúa hasta que $|\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}| = \omega R$, es ese instante, el disco comienza a rodar sin deslizar con $\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}$ constante y ω constante.

El impulso de la fuerza de rozamiento es igual al incremento de momento lineal:

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{P} = m\,(\mathbf{v}_{\mathbf{cm}} - 0) = m\,\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}$$

Aunque ambas magnitudes son vectoriales, al llevar siempre en la misma dirección, las tratamos como escalares:

$$\cancel{m}\, v_{cm} = I = fr\,t = \mu N\,t = \mu \cancel{m} g\,t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{v_{cm}}{\mu g} = \frac{\omega R}{\mu g} = \frac{(1/3)\omega_0 R}{\mu g} = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}}$$

d) Aplicando $\sum \mathbf{f} = m\mathbf{a}_{\mathbf{cm}}$ y teniendo en cuenta que la única fuerza neta es la fuerza de rozamiento, que actúa a lo largo de la dirección x:

$$\cancel{m} a_{cm} = fr = \mu \cancel{m} g \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = \mu g$$

esta aceleración es constante y solo actúa durante del tiempo que el cilindro esta derrapando. Por lo tanto podemos aplicar las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$\boxed{e = \cancel{v_{cm0}\, t} + (1/2) a_{cm} t^2 = \frac{1}{2}\,\mu g \left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{\omega_0^2 R^2}{18\,\mu g}}$$

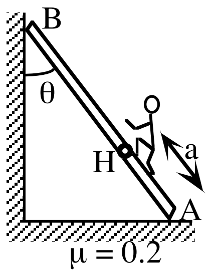
e) $\omega = \omega_0 / 3 = 300/100 = 100$ rad/s

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g} = \frac{300 \bullet 0.1}{3 \bullet 0.2 \bullet 9.81} = 5.097 \text{ s}$$

$$e = \frac{\omega_0^2 R^2}{18\,\mu g} = \frac{300^2 \bullet 0.1^2}{18 \bullet 0.2 \bullet 9.81} = 25.48 \text{ m}$$

---

3) En una escalera homogénea de masa m_1 y longitud 2L está apoyada entre una pared vertical lisa y el suelo, teniendo con este último un coeficiente de rozamiento μ. Un hombre de masa m_2 sube por la escalera hasta un peldaño H, tal que AH = a.



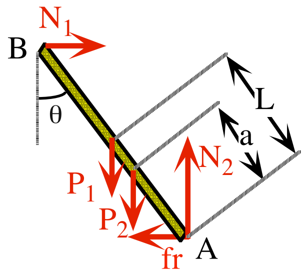
a) ¿Cuál es el valor máximo del ángulo θ que forma la escalera con la pared para que la escalera no resbale.

b) ¿Cuál debe ser el ángulo si queremos que el hombre suba hasta el extremo superior B?

c) Particularizar las apartados anteriores para μ = 0.2, m_1 = 10 kg, m_2 = 70 kg, L = 3 m y a = 1m.

SOLUCION:

a) Primero representamos todas las fuerzas que actúan sobre la escalera:



A continuación aplicamos las condiciones de equilibrio:

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow N_2 - P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow \boxed{N_2 = P_1 + P_2} \qquad (3.1)$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow N_1 - fr = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = fr} \qquad (3.2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow N_1\, 2L \cos\theta - P_1\, L\, \text{sen}\theta - P_2\, a\, \text{sen}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{P_1\, L\, \text{sen}\theta + P_2\, a\, \text{sen}\theta}{2L \cos\theta} = \boxed{\text{tg}\theta \frac{P_1\, L + P_2\, a}{2L}} \qquad (3.3)$$

Igualando las ecuaciones (3.2) y (3.3) $\quad fr = \text{tg}\theta \dfrac{P_1\, L + P_2\, a}{2L}$

Si ahora tenemos en cuenta que la fr que actúa siempre tiene que ser menor o igual que la máxima que puede actuar:

$$fr \leq fr_{max} = \mu\, N_2 = \mu\,(P_1 + P_2) \Rightarrow \text{tg}\theta \frac{P_1\, L + P_2\, a}{2L} \leq \mu\,(P_1 + P_2) \Rightarrow \text{tg}\theta \leq \frac{\mu\,(P_1 + P_2)\, 2L}{P_1\, L + P_2\, a}$$

y teniendo en cuenta que $P_1 = m_1 g$ y que $P_2 = m_2 g$, y sacando factor común a g

$$\boxed{\text{tg}\theta \leq \frac{\mu\,(m_1 + m_2)\, 2L}{m_1\, L + m_2\, a}} \qquad (3.4)$$

b) Si el hombre está en el extremo superior de la escalera, a = 2L. Sustituimos este valor en la ecuación anterior:

$$\text{tg}\theta \leq \frac{\mu\,(m_1 + m_2)\, 2L}{m_1\, L + m_2\, 2L} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\theta \leq \frac{2\mu\,(m_1 + m_2)}{m_1 + 2\, m_2}} \qquad (3.5)$$

c) Sustituimos los datos que nos dan en las ecuaciones (3.4) y (3.5)

$$\text{caso a): } \text{tg}\theta \leq \frac{\mu\,(m_1 + m_2)\, 2L}{m_1\, L + m_2\, a} = \frac{0.2(10 + 70)\, 2 \bullet 3}{10 \bullet 3 + 70 \bullet 1} = 0.96 \Rightarrow \boxed{\theta \leq 43.8°}$$

$$\text{caso b): } \text{tg}\theta \leq \frac{2\mu\,(m_1 + m_2)}{m_1 + 2\, m_2} = \frac{2 \bullet 0.2\,(10 + 70)}{10 + 2 \bullet 70} = 0.2133 \Rightarrow \boxed{\theta \leq 12.0°}$$