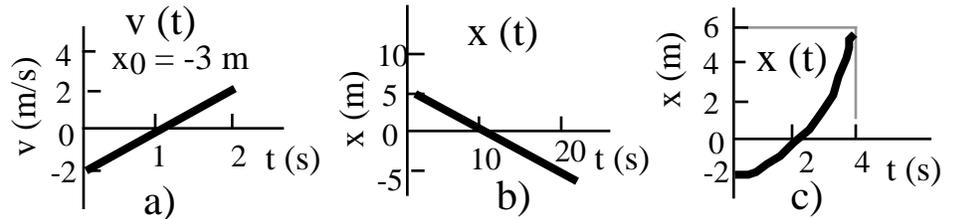


CUESTIONES

1) Tres partículas describen movimientos unidimensionales representados en las figuras. Determinar en cada caso las características del movimiento (x_0 , $x(t)$, v_0 , $v(t)$, $a(t)$ y el tipo de movimiento). Representar para cada una de ellas $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.



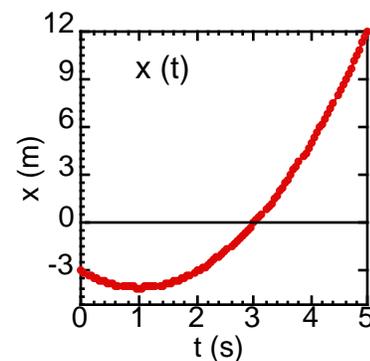
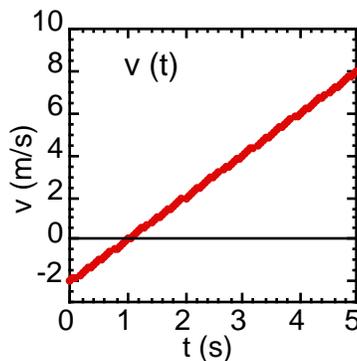
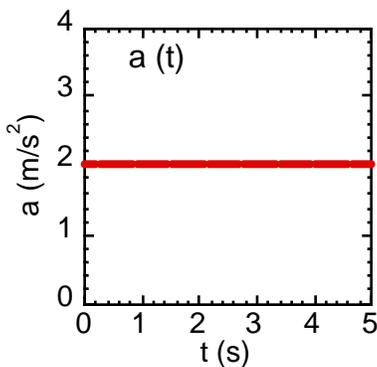
SOLUCION

a) La velocidad aumenta linealmente, por lo que es un movimiento uniformemente acelerado:

$$a = \Delta v / \Delta t = 4/2 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v_0 = -2 \text{ m/s} \Rightarrow v = -2 + 2t$$

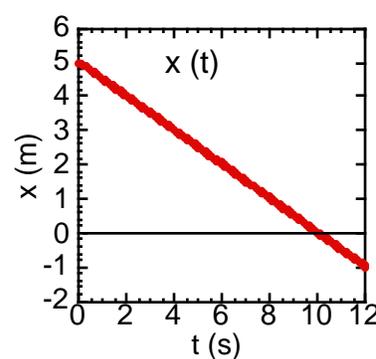
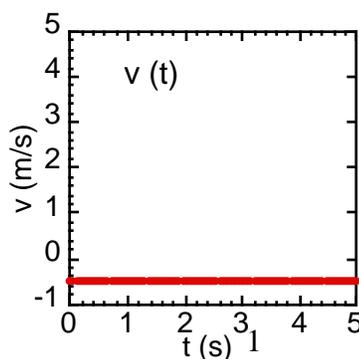
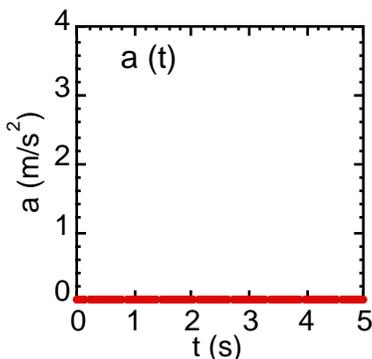
$$x_0 = -3 \text{ m} \Rightarrow x = -3 - 2t + t^2$$



b) La posición disminuye linealmente, por lo que la velocidad es constante y la $a = 0$ (es un movimiento uniforme):

$$v = \Delta x / \Delta t = -5/10 = -0.5 \text{ m/s}$$

$$x_0 = 5 \text{ m} \Rightarrow x = 5 - 0.5t$$



c) La posición aumenta de forma parabólica, por lo que es un movimiento uniformemente acelerado:

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2) a t^2$$

En la gráfica puede observarse que en $t = 0$ la pendiente es 0

$$\Rightarrow v_0 = 0 \text{ m/s}$$

Además,

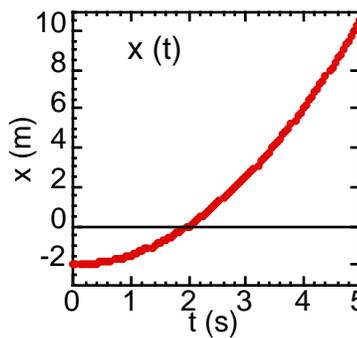
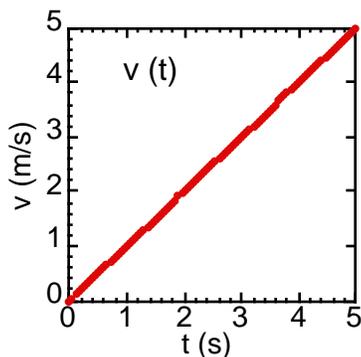
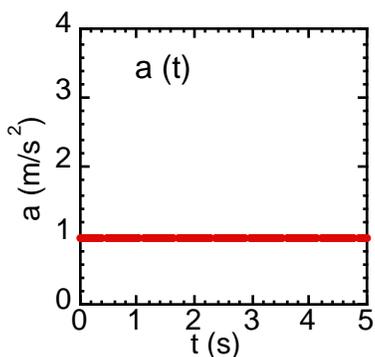
$$x_0 = -2 \text{ m}$$

por lo que para $t = 2 \text{ s}$, $0 = -2 + (1/2) a 2^2 \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$

Las ecuaciones de la posición y la velocidad son:

$$v = t$$

$$x = -2 + (1/2) t^2$$



2) Recordando que en la Tierra: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - 2(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$,

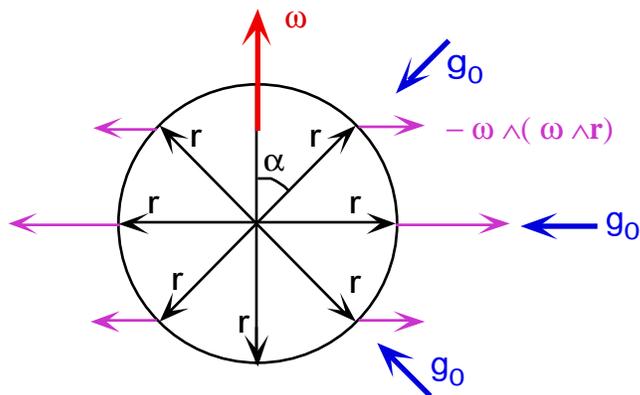
- Representa y explica como es la aceleración centrífuga; en que puntos de la superficie es máxima y mínima.
- Cuanto valen las componentes radial y transversal? En que punto de la superficie serán máximas y mínimas estas componentes. ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur?

SOLUCION

a) Al realizar el producto vectorial $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, vemos que la aceleración centrífuga se aleja perpendicular al eje de giro de la Tierra, y que su modulo vale:

$$|\mathbf{a}_{\text{cen}}| = |\boldsymbol{\omega}| |\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}| \sin 90 = |\boldsymbol{\omega}| |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin \alpha = |\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}| \sin \alpha$$

siendo α el ángulo que forma el vector de posición con el eje de giro (el complementario de la latitud). por lo tanto su módulo es máximo en el ecuador y cero en los polos



b) Proyectamos $-\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r})$, sobre la dirección radial y transversal.

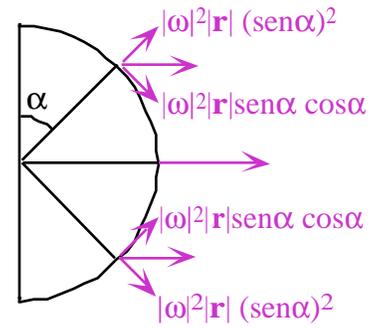
La componente radial vale: $|\omega|^2 |\mathbf{r}| (\text{sen}\alpha)^2$

y la componente transversal: $|\omega|^2 |\mathbf{r}| \text{sen}\alpha \text{ cos}\alpha$

Por lo que la componente radial es máxima en el ecuador y nula en los polos.

La componente transversal es nula tanto en el ecuador como en los polos, siendo máxima para $\alpha = 45^\circ$

La única diferencia entre el Hemisferio Norte y Sur, es que en el Norte la componente transversal va dirigida hacia el sur, mientras que en el Hemisferio Sur va dirigida hacia el norte.



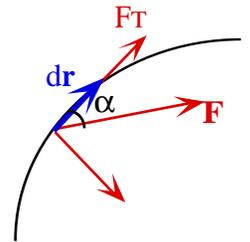
3) Explica y deduce de forma sencilla la relación que existe entre la fuerza y la energía potencial. Pon un ejemplo simple en el que partiendo de la energía potencial encuentras la fuerza asociada.

SOLUCION

El diferencial de trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} a lo largo de un $d\mathbf{r}$ es:

$$dW = \mathbf{F}d\mathbf{r} = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \text{sen}\alpha = |\mathbf{F}| \text{sen}\alpha |d\mathbf{r}| = F_t ds$$

donde $ds = |d\mathbf{r}|$



Además, si es una fuerza conservativa, el trabajo realizado es igual a la disminución de su energía potencial $dW = -dE_p$

Igualando ambas expresiones: $F_t ds = -dE_p \Rightarrow F_t = -\frac{dE_p}{ds}$

Si elegimos como dirección tangente la x: $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

De igual forma, si elegimos la y o la z, $F_y = -\frac{dE_p}{dy}$ o $F_z = -\frac{dE_p}{dz}$

Por lo que podemos escribir
$$\mathbf{F} = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \mathbf{k}\right)$$

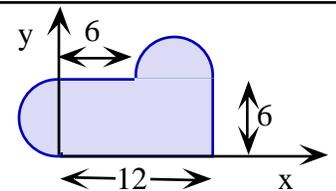
Un ejemplo sencillo es considerar la energía potencias gravitatoria en la superficie terrestre como $E_p = mgz$.

La fuerza asociada será:
$$\mathbf{F} = -\nabla(mgz) = -\left(\frac{\partial(mgz)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(mgz)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(mgz)}{\partial z} \mathbf{k}\right) = -(0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + mg \mathbf{k}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$$



4) Determina el centro de masas de la placa homogénea de la figura.



SOLUCION

La placa se supone la suma de tres placas, una rectangular y dos semicirculares.
 Por simetría, el centro de masas de la placa rectangular esta en el centro.

El centro de masas de la placa semicircular podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que:

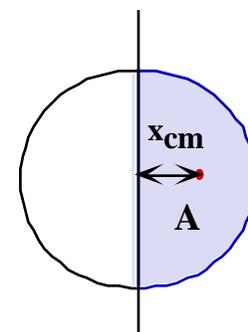
$$V = 2\pi x_{cm} A$$

Con $A = \text{área de la placa} \Rightarrow A = (1/2) \pi r^2$

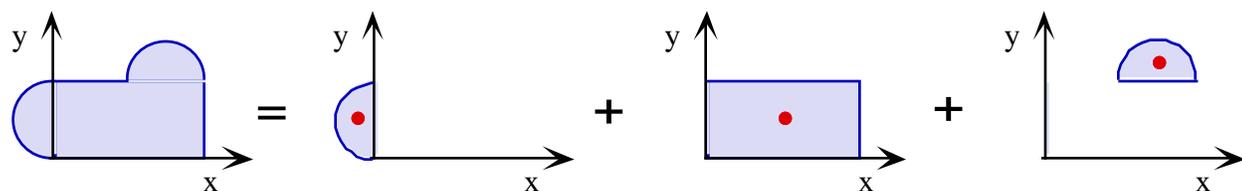
y $V = \text{volumen de la esfera que genera} \Rightarrow V = (4/3) \pi r^3$

Introduciendo estos valores en la ecuación: $(4/3) \pi r^3 = 2\pi x_{cm} (1/2) \pi r^2 \Rightarrow$

$$x_{cm} = (4r/3\pi) = (4/\pi)$$



Ahora descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$$A_1 = (1/2) \pi 3^2 = 4.5 \pi$$

$$A_2 = 12 * 6 = 72$$

$$A_3 = (1/2) \pi 3^2 = 4.5 \pi$$

$$x_{cm1} = -4/\pi$$

$$x_{cm2} = 6$$

$$x_{cm3} = 6 + 3 = 9$$

$$y_{cm1} = 3$$

$$y_{cm2} = 3$$

$$y_{cm3} = 6 + 4/\pi$$

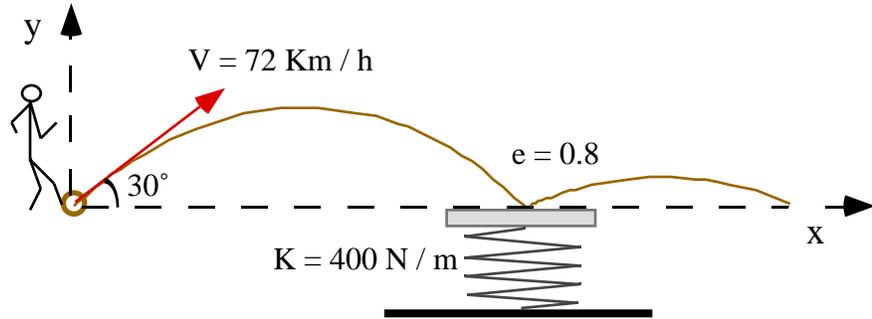
$$x_{cm} = \frac{\sum A_i x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{4.5\pi \left(-\frac{4}{\pi}\right) + 72 \cdot 6 + 4.5\pi \cdot 9}{4.5\pi + 72 + 4.5\pi} = \frac{541.23}{100.27} = 5.40$$

$$y_{cm} = \frac{\sum A_i y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{4.5\pi \cdot 3 + 72 \cdot 3 + 4.5\pi \left(6 + \frac{4}{\pi}\right)}{4.5\pi + 72 + 4.5\pi} = \frac{361.23}{100.27} = 3.60$$



PROBLEMAS

1) Un futbolista golpea un balón de $m = 0.5 \text{ kg}$ inicialmente en reposo, suministrándole una velocidad inicial de 72 km/h y formando un ángulo de 30° con la horizontal.



a) Si el pie está en contacto durante 5 milésimas de segundo y suponemos que la fuerza que actúa es constante, determinar vectorialmente la fuerza que ejerce el pie sobre el balón.

b) Determinar el alcance horizontal del balón y la altura máxima (despreciar el rozamiento del aire)

El balón golpea sobre una placa horizontal de masa $m = 4 \text{ kg}$ en reposo sobre un muelle de constante $K = 400 \text{ N/m}$ y masa despreciable. Suponemos que el coeficiente de restitución es de $e = 0.8$

c) Determinar la velocidad del balón después del choque y el ángulo que forma con la horizontal. ¿Cuál será la velocidad de la placa? ¿qué tipo de choque se produce?

d) Determinar la máxima compresión de la placa respecto a su posición de equilibrio. ¿Qué tipo de movimiento realizará la placa?

e) Escribir la ecuación del movimiento de la placa tomando como $t = 0$ el momento del choque.

SOLUCION

a) Primero pasamos la velocidad inicial (v_0) al sistema internacional y calculamos sus dos componentes:

$$v_0 = 72 \text{ km/h} * (1000 \text{ m/1 km}) * (1 \text{ h/3600 s}) = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos 30 = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 30 = 17.32 \text{ m/s}$$

Recordando la relación entre el incremento de momento y el Impulso y recordando que suponemos la fuerza constante:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt = \mathbf{F} \Delta t \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{m \Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{0.5 (17.32 \mathbf{i} + 10 \mathbf{j})}{0.005} = (1732 \mathbf{i} + 1000 \mathbf{j}) \text{ N}$$

b) Recordando que en el tiro parabólico $v_y = v_{0y} - gt$, y que en la altura máxima $v_y = 0 \Rightarrow$

$$0 = v_{0y} - gt_{y\max} \Rightarrow t_{y\max} = v_{0y} / g \quad (= 17.32/9.81 = 1.019 \text{ s})$$

Además, la relación entre la altura y el tiempo es $y = v_{0y} t - (1/2)gt^2$

$$\text{Sustituyendo el valor de } t_{y\max} \Rightarrow y_{\max} = (v_{0y})^2 / g - (1/2)g(v_{0y} / g)^2 = (1/2)(v_{0y})^2 / g = 5.097 \text{ m}$$

El alcance máximo se produce para un tiempo doble que el de la máxima altura: $t_{x\max} = 2 t_{y\max} = 2v_{0y} / g$

$$\text{Sustituyendo este valor en la ecuación } x = v_{0x} t \Rightarrow x_{\max} = v_{0x} t_{x\max} = 2 v_{0x} v_{0y} / g = 35.31 \text{ m}$$



c) En cuanto a las velocidades del balón antes del choque, la componente x es la misma que la inicial, ya que en la dirección x la velocidad permanece constante. La componente y también será igual a la inicial, pero cambiada de signo. Es decir $vb_x = v_{0x} = 17.32 \text{ m/s}$ y $vb_y = -v_{0y} = -10 \text{ m/s}$.

El choque es central oblicuo, por lo tanto la componente x de la velocidad no cambia en ninguno de los dos cuerpos, y solo se modifica la componente y. El choque es inelástico, ya que la energía no se conserva ($e \leq 1$). Planteamos las ecuaciones de conservación del momento y del coeficiente de restitución:

$$mb vb_y + mp vp_y = mb vb'_y + mp vp'_y$$

$$e = -\frac{vp'_y - vb'_y}{vp_y - vb_y} \Rightarrow e(vp_y - vb_y) = -(vp'_y - vb'_y)$$

Como la velocidad inicial de la placa es cero, $vp_y = 0$, las dos ecuaciones nos quedan:

$$mb vb_y = mb vb'_y + mp vp'_y$$

$$e vb_y = vp'_y - vb'_y$$

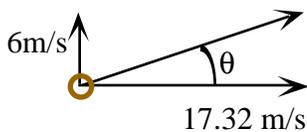
Sustituyendo los valores de e, las masas y vb_y :

$$0.5(-10) = 0.5 vb'_y + 4 vp'_y$$

$$0.8(-10) = vp'_y - vb'_y \Rightarrow vb'_y = 8 + vp'_y$$

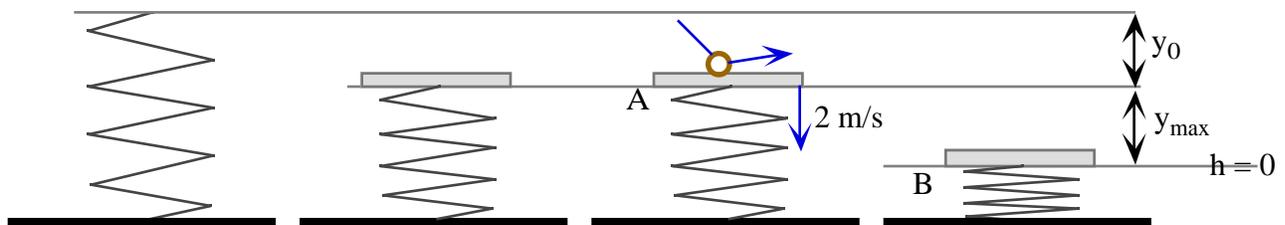
Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sencillo. Si despejamos vb'_y en la segunda ecuación y lo introducimos en la primera: $-5 = 0.5(8 + vp'_y) + 4 vp'_y \Rightarrow vp'_y = -9 / 4.5 = -2 \text{ m/s}$

Y para el balón: $vb'_y = 8 + vp'_y = 8 - 2 = 6 \text{ m/s}$



$$\text{tg } \theta = vb'_y / vb'_x \Rightarrow \begin{cases} |vb'| = 18.33 \text{ m/s} \\ \theta = 19.11^\circ \end{cases}$$

d) Al colocar la placa, el muelle se comprime un valor: y_0 , al golpear el balón, adquiere una energía cinética que lo comprime aún mas, tal como se muestra en la gráfica:



Aplicamos la conservación de la energía entre las posiciones A y B. Como la posición B es la de máxima compresión, la velocidad será 0, también tomamos en dicha posición $h = 0$:

$$1/2 Ky_0^2 + mg y_{\max} + 1/2 mv^2 = 1/2 K(y_0 + y_{\max})^2 \Rightarrow$$

$$1/2 Ky_0^2 + mg y_{\max} + 1/2 mv^2 = 1/2 Ky_0^2 + 1/2 Ky_{\max}^2 + K y_0 y_{\max}$$



Además, cuando la placa estaba en equilibrio sobre el muelle, $mg = K y_0 \Rightarrow y_0 = mg/K$, sustituyendo este valor de y_0 en la ecuación anterior:

$$mg y_{\max} + 1/2 mv^2 = 1/2 Ky_{\max}^2 + K (mg/K) y_{\max} \Rightarrow 1/2 mv^2 = 1/2 Ky_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{mv^2}{K}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2^2}{400}} = 0.2 \text{ m}$$

La placa realiza un movimiento armónico simple entorno a su posición inicial de equilibrio con una amplitud $A = 0.2 \text{ m}$

e) La frecuencia angular será $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10 \text{ rad/s}$

Si partimos de la ecuación general $y = A \text{ sen}(\omega t + \phi)$, en el momento en que el balón golpea a la placa, $t = 0$ e $y = 0$, por lo que $\text{sen}(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi$

Para saber cual de estos dos valores es el correcto, derivamos la ecuación general $\Rightarrow v_y = A\omega \text{ cos}(\omega t + \phi)$.

Como en $t = 0$, $v_y = -2$, (negativa y de magnitud máxima) $\Rightarrow \text{cos}(\phi) = -1 \Rightarrow \phi = \pi$

La ecuación será por tanto:

$$y = 0.2 \text{ sen}(10 t + \pi)$$

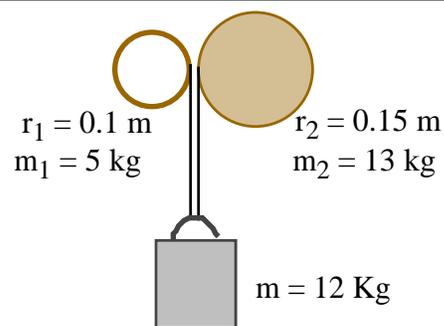
Si hubiéramos partido de $y = A \text{ cos}(\omega t + \phi)$, llegaríamos a que $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, y realizando un análisis similar con la velocidad, a que $\phi = \pi/2$, por lo que

$$y = 0.2 \text{ cos}(10 t + \pi/2)$$

Ambas ecuaciones son equivalentes.

2) El sistema que muestra la figura está constituido por un anillo de radio $r_1 = 0.1 \text{ m}$ y masa $m_1 = 5 \text{ kg}$, un cilindro homogéneo de radio $r_2 = 0.15 \text{ m}$ y masa $m_2 = 13 \text{ kg}$ y una masa $m = 12 \text{ kg}$. Soltamos esta última desde el reposo y la dejamos caer 6 m. Despreciando el rozamiento calcular:

- Los momentos de inercia del anillo y del cilindro.
- La velocidad final de la masa cuando ha descendido los 6 m.
- La aceleración.
- La aceleración angular del anillo y del cilindro.
- La tensión en ambas cuerdas.



SOLUCION

a) El anillo tiene toda su masa en el borde, a una distancia r_1 del eje, por lo que el momento de inercia es

$$I_1 = m_1 r_1^2 = 5 \cdot 0.1^2 = 0.05 \text{ kgm}^2$$



El cilindro, al ser homogéneo, tiene un momento de inercia igual al de un disco:

$$I_2 = (1/2) m_2 r_2^2 = (1/2) 13 \cdot 0.15^2 = 0.146 \text{ kgm}^2$$

b) La velocidad se puede calcular por energías, la pérdida de energía potencial se convierte en energía cinética de traslación y de rotación:

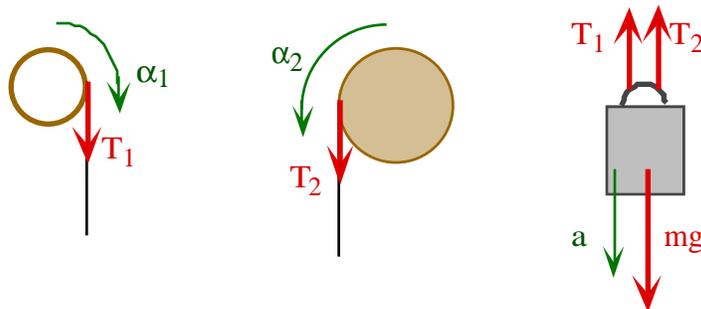
$$mgh = 1/2 mv^2 + 1/2 I_1 \omega_1^2 + 1/2 I_2 \omega_2^2$$

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la angular $\omega_1 = v/r_1$ y $\omega_2 = v/r_2$

$$mgh = 1/2 mv^2 + 1/2 I_1 (v/r_1)^2 + 1/2 I_2 (v/r_2)^2 = 1/2 v^2 (m + I_1/r_1^2 + I_2/r_2^2) = 1/2 v^2 (m + m_1 + m_2/2) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2 mgh}{m + m_1 + m_2/2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12 \cdot 9.81 \cdot 6}{12 + 5 + 13/2}} = 7.75 \text{ m/s}$$

c) Tenemos que aplicar $\Sigma F = ma$ en la masa y $\Sigma M = I\alpha$ para las dos poleas



$$r_1 T_1 = I_1 \alpha_1$$

$$\Rightarrow T_1 = I_1 [\alpha_1 / r_1] = m_1 r_1^2 [(a/r_1) / r_1] = m_1 a$$

$$r_2 T_2 = I_2 \alpha_2$$

$$\Rightarrow T_2 = I_2 [\alpha_2 / r_2] = (1/2)m_2 r_2^2 [(a/r_2) / r_2] = (1/2)m_2 a$$

$$mg - T_1 - T_2 = ma$$

Sustituyendo los valores de T_1 y T_2 en la 3ª ecuación:

$$mg - m_1 a - (1/2)m_2 a = ma \Rightarrow mg = (m + m_1 + (1/2)m_2) a \Rightarrow$$

$$a = \frac{mg}{m + m_1 + (1/2)m_2} = \frac{12 \cdot 9.81}{12 + 5 + (1/2)13} = 5.01 \text{ m/s}^2$$

d) $\alpha_1 = a/r_1 = 5.01 / 0.1 = 50.1 \text{ rad/s}^2$

$\alpha_2 = a/r_2 = 5.01 / 0.15 = 33.4 \text{ rad/s}^2$

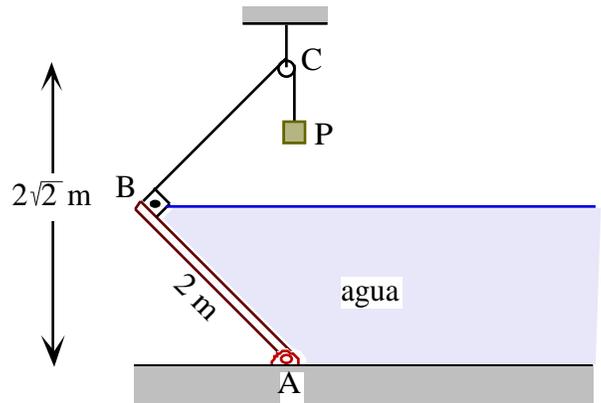
e) $T_1 = m_1 a = 5 \cdot 5.01 = 25.05 \text{ N}$

$T_2 = (1/2)m_2 a = (1/2)13 \cdot 5.01 = 32.56 \text{ N}$



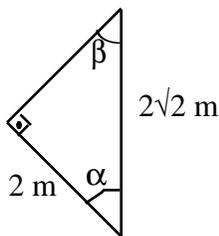
3) La compuerta AB de la figura de un peso de 200 kg, articulada en A, y cuyas dimensiones son $a = AB = 2\text{ m}$ y $b = 1\text{ m}$ (Longitud, normal al plano de la fig); está soportada por medio de una cadena BC que pasa por una polea de radio muy pequeño situada en C, sobre la vertical que pasa por A, y por medio de un peso P. En la posición de la figura:

- Determinar la presión absoluta en el fondo del embalse.
- Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta.
- Determinar el punto de aplicación de dicha fuerza.
- Representa las fuerzas que actúan sobre la compuerta
- Calcular P para que el sistema este en equilibrio.



SOLUCION

a) primer paso será determinar la altura de agua para lo cual representamos el triangulo ABC



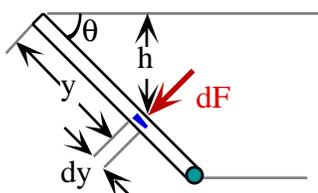
por el teorema del seno: $\frac{2}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 90} \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

La altura de agua es $h = 2 \cos 45 = \sqrt{2}\text{ m}$

La presión absoluta será: $P = P_{\text{atm}} + \rho g h = 1.013 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9.81 \cdot \sqrt{2} = 1.013 \cdot 10^5 + 0.139 \cdot 10^5 \Rightarrow$

$P = 1.152 \cdot 10^5 \text{ Pascales} = 1.137 \text{ atm}$

b) La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad h es $P = \rho g h$. Si consideramos una franja de la presa de anchura dy y longitud b, toda ella situada a una profundidad h, la fuerza que actúa sobre la misma será:



$dF = P ds = P b dy = \rho g h b dy = \rho g y \cos\theta b dy$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa. La "altura" de la compuerta es $L = AB = 2\text{ m}$:

$F = \int_0^L \rho g y \cos\theta b dy = \rho g \cos\theta b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^L = (1/2) \rho g \cos\theta b L^2 \Rightarrow$

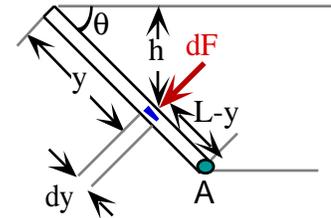
$F = (1/2) 10^3 \cdot 9.81 \cdot \cos 45 \cdot 1 \cdot 2^2 = 13873 \text{ N}$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento respecto al punto A de un dF actuando sobre una franja a una profundidad h será:

$$dM = dF (L-y) = \rho g y \cos\theta b dy (L-y)$$



donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^L \rho g y \cos\theta b (L-y) dy = \rho g \cos\theta b \int_0^L (Ly - y^2) dy = \rho g \cos\theta b \left(L \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^L - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^L \right) \Rightarrow$$

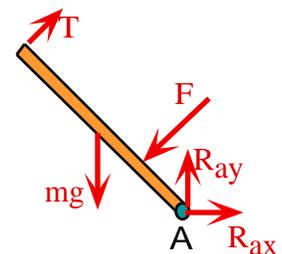
$$\boxed{M = \rho g \cos\theta b \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right) = \frac{1}{6} \rho g \cos\theta b L^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una distancia d respecto a la parte inferior de la presa a lo largo de la compuerta, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6) \rho g \cos\theta b L^3}{(1/2) \rho g \cos\theta b L^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3) L} \Rightarrow \boxed{d = 0.667 \text{ m}}$$

c) Las fuerzas que actúan sobre la compuerta son las representadas en la figura:



d) En principio, no es necesario determinar R_{ax} y R_{ay} , por lo que si calculamos momentos respecto al punto A, podremos despejar directamente T: como la compuerta está en equilibrio $\sum M_A = 0 \Rightarrow$

$$2 T - mg \cdot 1 \cdot \sin 45 - F (1/3) \cdot 2 = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{2\sqrt{2}} + \frac{F}{3} = 693.7 + 4624.3 = 5318 \text{ N}}$$

La tensión se propaga por la cuerda y soporta el peso P que esta en equilibrio, por lo que

$$P - T = 0 \Rightarrow \boxed{P = T = 5318 \text{ N}}$$

Que corresponde a una masa

$$\boxed{m = P/g = 542 \text{ kg}}$$

