EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 9-9-2005

CUESTIONES

---

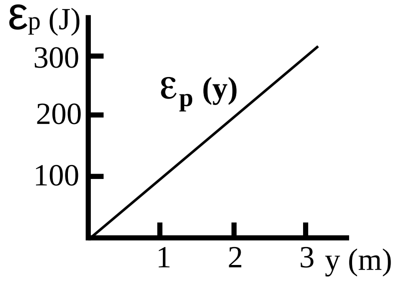
1) La gráfica muestra la energía potencial gravitatoria para un objeto de 10.2 kg cercano a la superficie terrestre; y = 0 corresponde al nivel del suelo. Supóngase que la energía mecánica del sistema es de 0.2 kJ. **A partir de la gráfica**, determinar:

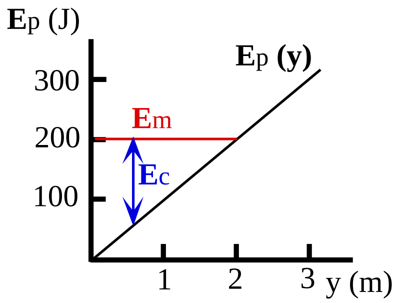
a) La altura máxima que alcanza el objeto

b) La energía cinética máxima del objeto y el punto donde se alcanza.

c) La posición del objeto cuando la $\mathcal{E}c = \mathcal{E}p$.

d) La fuerza sobre el objeto en cualquier posición.





SOLUCION

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial (Em = Ec + Ep) y es la máxima energía que puede tener el objeto. La energía mecánica es 0.2 kJ = 200J.

a) En la posición de máxima altura, el objeto estará en reposo y la energía cinética será cero; por lo que toda la energía mecánica es energía potencial. Esa situación se corresponde a una posición $\boxed{y = 2m}$

b) La energía cinética máxima se alcanza cuando la energía potencial es cero, su valor es igual a la energía mecánica: $\boxed{Ecmax = 200\ J}$, y se alcanza para $\boxed{y = 0}$

c) Como Ec + Ep = Em, si la energía cinética es igual a la energía potencial Ec = Ep = 100 J

Esta situación se alcanza en $\boxed{y = 1m}$

d) La fuerza es $\mathbf{F} = -\ Ep = \left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\,\mathbf{k} \right)$

En este caso como la Ep no depende ni de x ni de z, Fx = Fz = 0, y únicamente tiene componente y.

La fuerza es la pendiente de la curva Ep(y), y como es una recta, la pendiente es la misma y la fuerza no depende de la posición:

$$\boxed{Fy = -dEp/dy = -(200 - 0) / (2 - 0) = -100\ N}$$

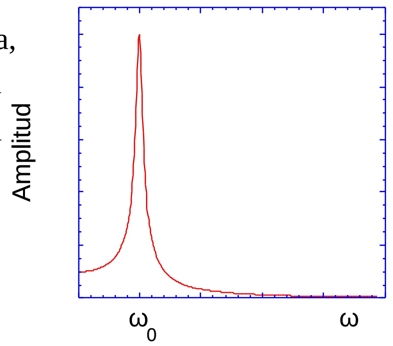
2) Explicar cualitativamente las oscilaciones forzadas: ¿Qué hace falta para que se produzcan? ¿Cómo es el movimiento resultante? Comentar lo mas característico y poner algún ejemplo.

SOLUCION

Si un objeto esta sometido a una fuerza elástica del tipo $F = -kx$, el objeto realiza un movimiento armónico simple de frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

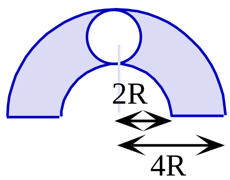
Si este objeto lo sometemos a una fuerza periódica de frecuencia ω ($F=F_0$ sen(ω t)), tras un período transitorio el objeto termina realizando un movimiento armónico simple de la misma frecuencia ω.

La amplitud de la oscilación depende de la frecuencia de la fuerza periódica, cuando ω tiende a ω_0 la amplitud aumenta, produciendo una resonancia. Si no hubiera amortiguamiento, para $\omega = \omega_0$ la amplitud seria infinita (toda la energía de la fuerza periódica es absorbida por el sistema).



Ejemplos de oscilaciones forzadas son un columpio impulsado periódicamente, las mareas gigantes que se producen en algunas bahías, la destrucción de puentes colgantes que han entrado en resonancia o el análogo eléctrico de la sintonización de la frecuencia que nos interesa cambiando la frecuencia natural de la oscilación al mover el dial.

3) Calcular la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura



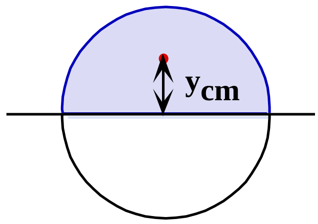
SOLUCION

La placa se puede suponer como una placa semicircular de radio 4R a la que le hemos restado una placa semicircular concéntrica de radio 2R y una placa circular de radio R.

Por simetría, el centro de masas de la placa circular esta en el centro.

El centro de masas de una placa semicircular de radio R podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que el volumen de un cuerpo de revolución (V) es igual al área generatriz (A) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el volumen: $V = 2\pi\, y_{CM}\, A$

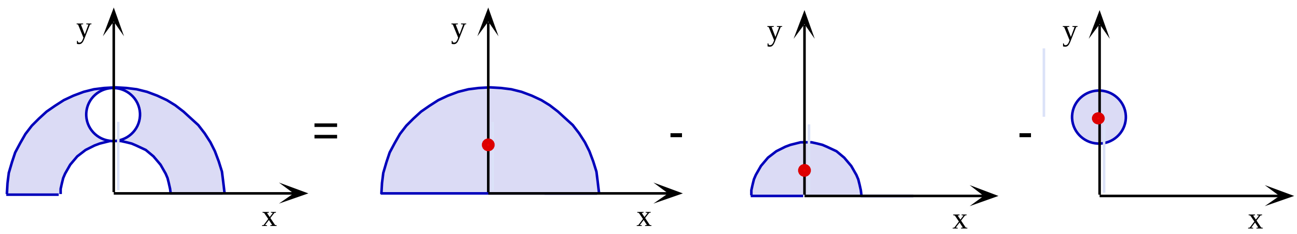
Aplicándolo a una placa semicircular de radio R:,



$A = 1/2\ (\pi R^2)$ y $V = 4/3\ \pi R^3$

$$\boxed{y_G} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi R^2} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$

Ahora descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$A_1 = (1/2)\ \pi(4R)^2 = 8\ \pi R^2$ $\quad$ $A_2 = (1/2)\ \pi(2R)^2 = 2\ \pi R^2$ $\quad$ $A_3 = \pi R^2$

$x_{cm1} = 0$ $\quad$ $x_{cm2} = 0$ $\quad$ $x_{cm3} = 0$

$y_{cm1} = 4\ (4R)/3\pi = 16R/3\pi$ $\quad$ $y_{cm2} = 4\ (2R)/3\pi = 8R/3\pi$ $\quad$ $y_{cm3} = 3R$

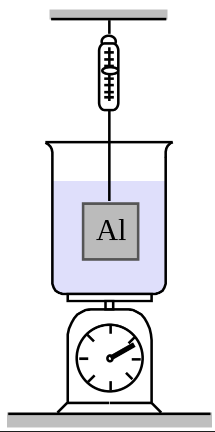
$$\boxed{x_{cm}} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{8\pi R^2 \cdot 0 \ -2\pi R^2 \cdot 0 \ -\pi R^2 \cdot 0}{8\pi R^2 - 2\pi R^2 - \pi R^2} = \frac{0}{5\pi R^2} = \boxed{0}$$

$$\boxed{y_{cm}} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{8\pi R^2 \cdot 16R/3\pi - 2\pi R^2 \cdot 8R/3\pi - \pi R^2 \cdot 3R}{8\pi R^2 - 2\pi R^2 - \pi R^2} = \boxed{1.777\ R}$$

---

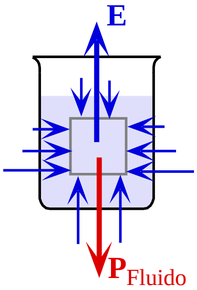
4) a) Enunciar y razonar el principio de Arquímedes.

b) Tenemos un bloque de aluminio de 2 kg (densidad 2.7 g/cm^3) colgado de una balanza de muelle (ver figura). Sobre una balanza de platillo descansa un recipiente de 1.5 kg en cuyo interior hay 1kg de agua. ¿Cuales serán las lecturas de las balanzas de muelle y de platillo cuando se sumerja el bloque de aluminio en el agua como se indica en la figura?

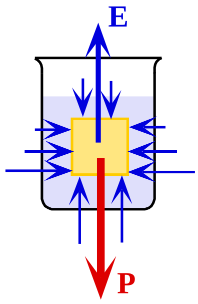


SOLUCION

a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.



Una demostración sencilla es considerar un fluido en reposo en el que aislamos mentalmente un volumen de fluido igual al volumen del objeto. Ese volumen de fluido esta en reposo, y sin embargo tiene un peso que actúa sobre su centro de masas. Este volumen imaginario esta en equilibrio debido a las fuerzas de la presión que ejerce el resto del fluido sobre su superficie: la presión es mayor en la parte inferior originando una fuerza neta (el empuje) que se opone al peso.

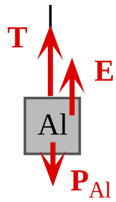


Si ahora sustituimos nuestro volumen imaginario por el objeto de igual forma, la presión en el fluido no cambia, por lo que las fuerzas que origina sobre la superficie del objeto son las mismas que en caso anterior y por lo tanto son iguales al peso del fluido desalojado, llevando sentido contrario.

b) Primero calculamos el empuje sobre el bloque de aluminio. Para calcularlo, hay que determinar el volumen del aluminio: $V_{al} = m_{al}/\rho_{al} = 2 / 2700 = 7.407\ 10^{-4}\ m^3$

$$E = V_{al}\ \rho_{ag}\ g = 7.4\ 10^{-4}\ 1000\ g = 0.74\ g\ \ N$$

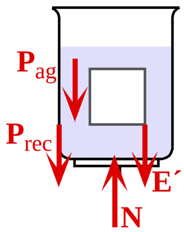
Sobre el bloque de aluminio actúan tres fuerzas, la tensión, el peso y el empuje. Como esta en equilibrio se cumple:



$$T + E - P_{al} = 0 \qquad T = P_{al} - E = 2\ g - 0.74\ g = 1.26\ g\ N$$

Lo que marca la balanza de muelle en kg es la T/g $\qquad m_{muelle} = 1.26$ kg

Si el agua ejerce un empuje E sobre el aluminio, el aluminio ejerce una reacción E´ sobre el agua. Las fuerzas que actúan sobre al base del platillo son el peso del agua, el peso del recipiente, E´ y la normal N.



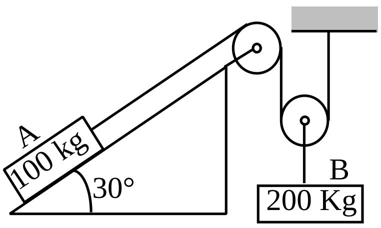
$$N - P_{ag} - P_{rec} - E' = 0 \qquad N = P_{ag} + P_{rec} + E' = 1\ g + 1.5\ g + 0.74\ g = 3.24\ g\ N$$

Lo que marca la balanza de platillo en kg es la N/g $\qquad m_{platillo} = 3.24$ kg

Como comprobación, entre las dos balanzas tienen que soportar todo el peso (aluminio, recipiente y agua. Efectivamente, la masa total de los tres objetos es de 4.5 kg, y lo que marcan las balanzas es

$$3.24 + 1.26 = 4.5\ kg$$

1) Los dos bloques de la figura parten del reposo. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo A y el plano inclinado es $\mu = 0.25$. Si se desprecia el peso de las poleas y de las cuerdas así como el rozamiento entre ambas:



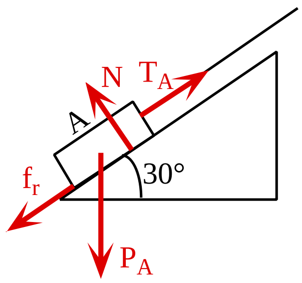
a) El cuerpo B ¿asciende o desciende? Razónalo
b) Representa todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A
c) Determina las aceleraciones de los dos cuerpos.
d) Determina las tensiones de las cuerdas.
e) ¿Qué velocidades llevan el cuerpo A y el cuerpo B cuando el B ha recorrido 50 cm?

SOLUCION

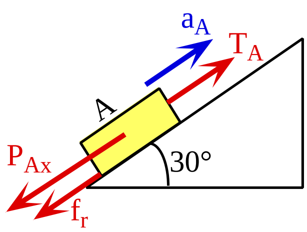
a) Si sujetamos el cuerpo A de forma que todo el sistema este en reposo, la tensión que sostiene a B es igual al peso, $T_B = 200$ g N. La tensión de la cuerda que tira de A será la mitad: $T_A = 100$ g N.
Esta tensión tira hacia arriba, mientras que $P_{Ax} = 100$ g sen30 = 50 g N tira en sentido contrario. La mayor de estas dos fuerzas nos indica cual va ha ser el sentido del movimiento cuando dejemos libre al cuerpo A. **Como es mayor T_A, el cuerpo tendera a subir**; en este momento empieza a entrar en juego la fuerza de rozamiento fr que se opone al movimiento.
Ahora para saber si realmente sube, o todo el sistema permanece en reposo, tenemos que ver si la T_A es mayor que $P_{Ax} + fr_{max}$ .Si es mayor, el sistema asciende, y si es menor el sistema permanece en reposo, ya que actuará una fuerza de rozamiento fr tal que $P_{Ax} + fr = T_A$.

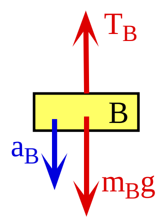
$fr_{max} = 100$ g cos30 $\mu = 21.65$ g N $\quad$ $\boxed{P_{Ax} + fr_{max} = 71.95 \text{ g N} < T_A}$ $\quad$ $\boxed{\text{A asciende y B desciende}}$

b)



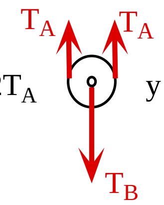
c) Aplicamos la segunda ley de Newton a los dos cuerpos:





A: $T_A - fr - m_A g \text{ sen30} = m_A a_A$
B: $m_B g - T_B = m_B a_B$

Considerando que $T_B = 2T_A$



y que $a_B = a_A/2$, sustituimos en las ecuaciones anteriores

A: $T_A - fr - m_A g \text{ sen30} = m_A\, a_A$ $\qquad$ $T_A = m_A\, a_A + m_A g \text{ sen30} + fr$ $\qquad$ (1)

B: $m_B g - 2T_A = m_B\, (a_A/2)$

Sustituyendo T_A en la ecuación inferior:

$m_B g - 2\,(m_A\, a_A + m_A g \text{ sen30} + fr) = m_B\, (a_A/2)$ $\qquad$ $m_B g - 2\, m_A\, a_A - 2m_A g \text{ sen30} - 2fr = (m_B/2)\, a_A$

$m_B g - 2m_A g \text{ sen30} - 2fr = (m_B/2)\, a_A + 2\, m_A\, a_A = [(m_B/2) + 2\, m_A]\, a_A$

$$\boxed{a_a} = \frac{[m_B - 2m_A(\text{sen30} + \mu\cos 30)]g}{\frac{m_B}{2} + 2\,m_A} = \frac{[200 - 2\cdot 100\cdot(\text{sen30} + 0.25\cos 30)]\cdot 9.81}{\frac{200}{2} + 2\cdot 100} = \boxed{1.854 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{a_B = a_A/2 = 0.927 \text{ m/s}^2}$$

c) Utilizando la ecuación de la tensión (1), $T_A = m_A\, a_A + m_A g \text{ sen30} + fr = m_A[a_A + g(\text{sen30} + \mu\cos 30)]$

$$\boxed{T_A = 100[1.854 + 9.81(\text{sen30} + 0.25\cos 30)] = 888.3 \text{ N}}$$

$$\boxed{T_B = 2T_A = 1776.6 \text{ N}}$$

d) Como es un movimiento uniformemente acelerado, se pueden utilizar la ecuación $v^2 - v_0^2 = 2ae$

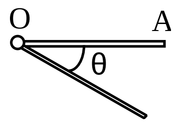
Los datos para el cuerpo B son: $v_0 = 0$, $a = 0.927 \text{ m/s}^2$ y $e = 0.5$ m

$v_B^2 = 2 \bullet 0.927 \bullet 0.5$ $\qquad$ $\boxed{v_B = 0.9628 \text{ m/s}}$

La relación entre velocidades es la misma que la relación entre aceleraciones, por lo que

$$\boxed{v_A = 2v_B = 1.926 \text{ m/s}}$$

2) Una varilla homogénea OA de masa m y longitud L, puede girar en un plano vertical en torno a un eje que pasa por O (ver figura).



a) Calcular el momento de inercia de la varilla respecto al eje que pasa por O.

b) Calcular la aceleración angular de la varilla en el instante en que se abandona desde la posición horizontal.

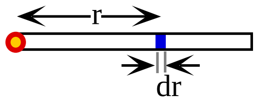
c) Calcular la velocidad angular y la aceleración angular cuando la varilla forma un ángulo θ con la horizontal.

d) Aplicar las ecuaciones encontradas en los tres apartados anteriores para determinar I, α(0), ω(θ) y α(θ) en el caso de m= 2kg, L = 0.5 m y θ = 30º.

SOLUCION

a) La definición de momento de inercia es $I = \int dm\, r^2$ con $dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dr$ (S = sección transversal de la barra)

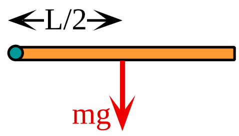
$$I = \int_0^L \rho\, S dr\, r^2 = \rho\, S \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}\rho\, S L^3$$



Donde ρ y S han salido fuera de la integral por ser una barra uniforme.

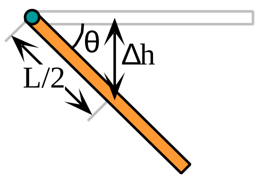
Como la masa de la barra es $m = \rho\, SL$, el momento de inercia se puede escribir como $\boxed{I = (1/3)\, mL^2}$

b) Para calcular la aceleración angular, utilizamos la ecuación $\sum M = I\alpha$. La única fuerza que produce momento sobre la varilla es el peso, situado en su centro de masas.



$$M = I\alpha \quad . \quad \alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)}{(1/3)\, mL^2} = \boxed{\frac{3g}{2\,L} = \frac{14.71}{L}\ \text{rad/s}^2}$$

c) La forma mas sencilla de determinar la velocidad angular es por energías. Respecto al eje, la varilla realiza un movimiento de rotación puro, por lo que la perdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética de rotación:

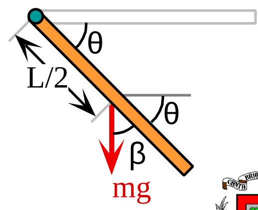


$$-\Delta E_p = \Delta E_c \qquad mg\,(-\Delta h) = (1/2)\, I\, (\omega^2 - \omega_0^2)$$

Teniendo en cuenta que parte del reposo $\omega_0 = 0$. Además la perdida de Ep se contabiliza en el centro de masas por lo que $-\Delta h = (L/2)\, \text{sen}\theta$. Con estas consideraciones la ecuación de la energía se transforma en:

$$Mg(L/2)\, \text{sen}\theta = (1/2)\, I\, \omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{m\, g\, L\, \text{sen}\theta}{\frac{1}{3} mL^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3\, g\ \text{sen}\theta}{L}}\ \text{rad/s}}$$

En cuanto a la aceleración angular, aplicamos de nuevo $M = I\alpha$.



$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)\, \text{sen}\beta}{(1/3)\, mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2\,L} = \boxed{14.71\frac{\cos\theta}{L}\ \text{rad/s}^2}$$

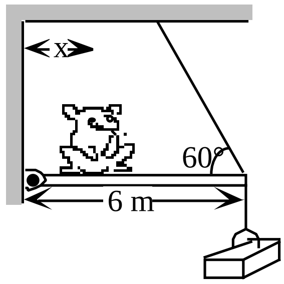
d) Si m= 2kg, L = 0.5 m y θ = 30º

$$\boxed{I = (1/3)\, 2\, (0.5)^2 = 0.1667 \text{ kgm}^2}$$

$$\boxed{\alpha(0) = (14.71/0.5) = 29.42 \text{ rad/s}^2}$$

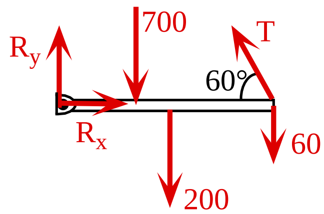
$$\boxed{\omega(30) = \sqrt{\frac{3 \cdot 9.81 \cdot \text{sen}30}{0.5}} = 5.42 \text{ rad/s}} \qquad \boxed{\alpha(30) = 14.71\frac{\cos 30}{0.5} = 25.48 \text{rad/s}^2}$$

3) Un oso hambriento de 700 N camina sobre una viga para obtener algunas golosinas que se encuentran colgando al final de ésta. La viga es uniforme, pesa 200 N y tiene una longitud de 6 m; las golosinas pesan 60 N.
a) Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga.
b) Encontrar la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza de reacción en el gozne cuando el oso se encuentra a x = 1 m.
c) Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900 N, ¿Cuál es la máxima distancia que puede caminar el oso antes de que se rompa el alambre?



SOLUCION

a) El diagrama de cuerpo libre es el representar todas las fuerzas que actúan sobre la viga:



b) Lo mas sencillo es comenzar con ∑M = 0, calculando los momentos respecto al gozne

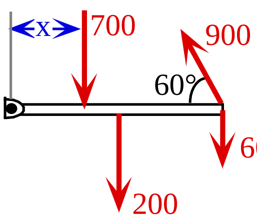
$$T\, L \text{ sen } 60 - 700\, x - 200\, (L/2) - 60\, L = 0$$

$$T\, 6 \text{ sen}60 = 700\ 1 - 200\ 3 - 60\ 6 \qquad \boxed{T = 319.5 \text{ N}}$$

∑Fx = 0 $Rx - T\cos 60 = 0$ $\boxed{Rx = T\cos 60 = 319.5 \cos 60 = 159.75 \text{ N}}$

∑Fy = 0 $Ry + T\text{sen}60 - 700 - 200 - 60 = 0$ $\boxed{Ry = 960 - 319.5 \text{ sen } 60 = 683.30 \text{ N}}$

c) Hay que determina el valor de x para el cual la tensión es la máxima de 900 N. Aplicando ∑M = 0 respecto al gozne:



$$900\, L \text{ sen } 60 - 700\, x - 200\, (L/2) - 60\, L = 0$$

$$700\, x = 900\ 6 \text{ sen}60 - 200\ 3 - 60\ 6 \qquad \boxed{x = 5.31 \text{ m}}$$