EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 7-2-2004

CUESTIONES

1) Los vectores (–3, 2, –1), (1, –3, 5) y (2, 1, –4), están aplicados en los puntos a (2, 1, 2), b (–1, 0, 1) y c (1, 2, 0) respectivamente. Calcular:

a) La resultante.
b) El momento resultante respecto del origen.
c) El momento resultante respecto del punto P (5, 8, –3).

SOLUCION

a) La resultante es la suma de los vectores:

$$\mathbf{A} = (-3,\ 2,\ -1)$$
$$\mathbf{B} = (1,\ -3,\ 5)$$
$$\mathbf{C} = (2,\ 1,\ -4),$$
$$\boxed{\mathbf{R} = (0,\ 0,\ 0)}$$

b) El momento resultante es la suma de los momentos

$$\mathbf{M}_o\mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-1-4) + \mathbf{j}\,(-6+2) + \mathbf{k}\,(4+3) = -5\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_o\mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(0+3) + \mathbf{j}\,(1+5) + \mathbf{k}\,(3-0) = 3\,\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_o\mathbf{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-8-0) + \mathbf{j}\,(0+4) + \mathbf{k}\,(1-4) = -8\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

El momento resultante es la suma de los momentos: $\boxed{\sum \mathbf{M}_o = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

c) La relación entre el momento resultante respecto al origen O y respecto a un punto P es

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O - \mathbf{OP}\ \ \mathbf{R}$$

Como la resultante es nula $\mathbf{R} = 0$, $\sum \mathbf{M}_P = \sum \mathbf{M}_O$ $\boxed{\mathbf{M}_P = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

2) Si tenemos dos sistemas de referencia, uno que rota respecto a otro con una velocidad angular ω constante, ¿Es posible distinguir cual de los dos sistemas esta rotando? Explica por que y da un ejemplo de como podrías hacerlo. Encuentra la relación entre las velocidades de una misma partícula, v y v´, observadas en cada uno de los sistemas (recuerda que la derivada respecto del tiempo de un vector **i** que rota con una velocidad angular ω es $d\mathbf{i}/dt = \omega \quad \mathbf{i}$).

SOLUCION

Si, ya que el sistema que rota no es inercial y aparecen fuerzas ficticias. Una forma de distinguirlo sería con un péndulo de Foucault, ya que en un sistema que rota, el plano de oscilación del péndulo gira respecta al sistema, mientras que en sistema que no rota, el plano permanece constante. Otra forma para distinguirlo seria usando un giróscopo.

Observador O utilizando el sistema de referencia (x, y, z): $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\, i + \frac{dy}{dt}\, j + \frac{dz}{dt}\, k$

Observador O´ utilizando el sistema de referencia (x´, y´,z´): $\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\, i' + \frac{dy'}{dt}\, j' + \frac{dz'}{dt}\, k'$

Observador O utilizando el sistema (x´, y´,z´). Para este observador los vectores unitarios i´, j´y k´ están rotando por lo que su derivada es diferente de 0. $\mathbf{v} = \frac{dx'}{dt}\, i' + x'\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\, j' + y'\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\, k' + z'\frac{dk'}{dt} =$

$$\frac{dx'}{dt}\, i' + \frac{dy'}{dt}\, j' + \frac{dz'}{dt}\, k' + x'\frac{di'}{dt} + y'\frac{dj'}{dt} + z'\frac{dk'}{dt} =$$

(Los tres primeros téminos corresponden a ***v´****)*: $\mathbf{v}' + x'(\omega \wedge i') + y'(\omega \wedge j') + z'(\omega \wedge k') =$

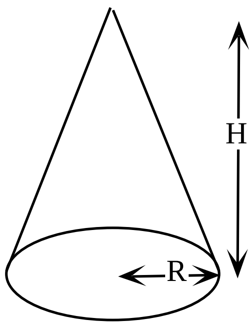
(Las coordenadas pasan a multiplicar los vectores unitarios) $\mathbf{v}' + (\omega \wedge x'\, i') + (\omega \wedge y'\, j') + (\omega \wedge z'\, k') =$

(Sacamos factor común a ω) $\mathbf{v}' + \omega \wedge (x'\, i' + y'\, j' + z'\, k') =$

(r = r´) $\mathbf{v}' + \omega \wedge r' = \mathbf{v}' + \omega \wedge r$

Por lo tanto: $\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \wedge r}$

3) Calcular el centro de masas de un cono homogéneo de altura H y radio en la base R.

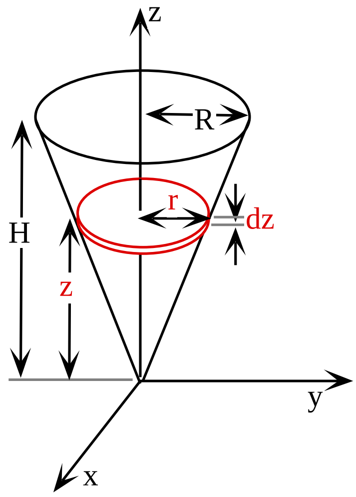


SOLUCION

Por simetría, el centro de masas estará a lo largo del eje

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{cm} = 0 \\ y_{cm} = 0 \end{array}}$$

Como el cono es homogéneo, en lugar de masas utilizamos volúmenes, así por definición: $z_{cm} = \dfrac{\int_V z\, dV}{\int_V dV}$



Para calcular z_{cm}, descomponemos el cono en un conjunto de discos de radio r. Cada disco estará situado a una altura z por lo que su centro de masas estará situado en z.

En este caso $dV = \pi r^2\, dz$

El radio depende de z, la relación es $r/z = R/H$ $\qquad r = zR/H$

Introduciendo estos valores en la ecuación anterior

$$z_{cm} = \frac{\int_0^H \pi r^2 z\, dz}{\int_0^H \pi r^2 dz} = \frac{\int_0^H \pi \left(\frac{zR}{H}\right)^2 z\, dz}{\int_0^H \pi \left(\frac{zR}{H}\right)^2 dz} = \frac{\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H z^3 dz}{\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H z^2 dz} = \frac{\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H}{\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^H} = \frac{\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left[\frac{H^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right]}{\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left[\frac{H^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]}$$

$$z_{cm} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2 H^2}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \qquad \boxed{z_{cm} = \frac{3}{4}\, H}$$

El centro de masas esta a 3H/4 del vértice y a H/4 de la base.

---

4) Enunciar y demostrar el teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos (busca un ejemplo sencillo en el que se pueda aplicar dicho teorema y aplícalo).

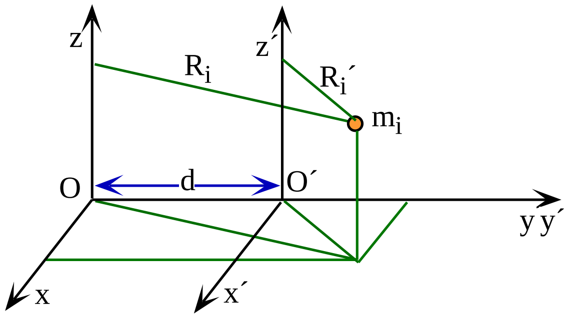
SOLUCION

El teorema de Steiner dice que el momento de inercia respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masas mas el producto de la masa por la distancia entre ejes al cuadrado

$$\boxed{I = I_{CM} + md^2}$$

Demostración:

Consideremos un sistemas de referencia O´(x´, y´, z´) con origen en el centro de masas, y otro O (x, y, z) separado una distancia d, con los tres ejes paralelos al primero y de forma que los ejes y e y´ se superpongan ver figura.



La distancia al cuadrado de una masa m_i cualquiera al eje z´ es : $R_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2$

mientras que la distancia al eje z es: $R_i^2 = x_i'^2 + (y_i'+d)^2 = x_i'^2 + y_i'^2 + d^2 + 2\, y_i' d = R_i'^2 + d^2 + 2\, y_i' d$

El momento de inercia respecto al eje z será: $I_z = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i\, [R_i'^2 + d^2 + 2\, y_i' d]$

$$I_z = \sum m_i R_i'^2 + \sum m_i d^2 + \sum m_i\; 2\, y_i' d = I_{CM} + d^2(\sum m_i) + 2d \cancel{\sum m_i y_i'}$$

Llamando $m = \sum m_i$, y considerando que $\sum m_i y_i' = m\, y_{CM}'$, donde y_{CM}' es la coordenada y del centro de masas en el sistema de referencia centro de masas, por lo que $y_{CM}' = 0$ $\sum m_i\; y_i' = 0$, nos queda

$$\boxed{I = I_{CM} + md^2}$$

Un ejemplo de aplicación puede ser el momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto a un eje perpendicular que pase por su centro: $I = (1/2)\, mr^2$. El momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el borde del disco es $I = (1/2)\, mr^2. + mr^2 = (3/2)\, mr^2$

Otro ejemplo en el de una varilla homogénea de longitud L. El momento de inercia respecto de un eje perpendicular que pase por su centro es $I = (1/12)\, mL^2$. El momento de inercia respecto de un eje paralelo al primero, que pase por un extremo de la misma será: es $I = (1/12)\, mL^2 + m(L/2)^2 = (1/3)\, mL^2$

1) Disponemos de un muelle vertical de K = 1000 N/m, longitud L_1 = 110 cm y masa despreciable sobre el que colocamos una lámina de 10 kg.

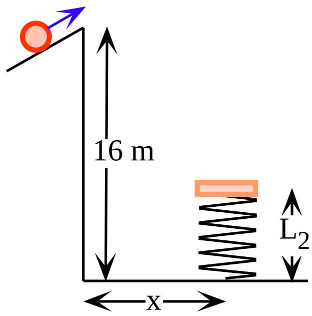
a) ¿Cuál es la longitud del muelle L_2 una vez colocada dicha masa?

Desde una azotea de 16 m de altura se lanza un balón de 1 kg a una velocidad de 20 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal.

b) ¿A que distancia x debemos colocar el muelle para que el balón caiga sobre la lámina?

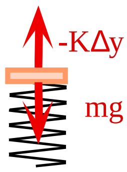
c) Una vez que el balón choca con la lámina, determinar las velocidades de ambos (e = 0.8) y la energía perdida en el choque.

d) ¿Cuál será la mínima longitud del muelle L_3?



SOLUCION

a) Al colocar la masa el muelle se comprime un valor Δy. Como el sistema queda en equilibrio, el peso es equilibrado por la fuerza del muelle:



$$mg + (-K\,\Delta y) = 0 \qquad \Delta y = mg / K = 10\ 9.81 / 1000 = 0.0981 \text{ m}$$

Por lo que $\boxed{L_2 = L_1 - \Delta y = 110 - 9.81 = 100.2 \text{ cm}}$

b) Las componentes iniciales de la velocidad son

$$v_{0x} = v_0 \cos 30 = 20\ \sqrt{3}/2 = 17.32 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } 30 = 20\ 1/2 = 10 \text{ m/s}$$

En la dirección vertical la ecuación de la trayectoria es $y = y_0 + v_{0y}\,t + 1/2\ a\ t^2$

$$1.02 = 16 + 10\,t + 1/2\,(-9.81)\,t^2 \qquad -4.905\,t^2 + 10\,t + 14.98 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 293.91}}{9.81} = \begin{cases} -1.004 \text{ s} \\ 3.043 \text{ s} \end{cases}$$

la solución real corresponde al tiempo positivo, por lo tanto $t = 3.043$ s

En este tiempo el balón recorre una distancia horizontal: $\boxed{\Delta x = v_{0x}\,t = 17.32\ 3.043 = 52.70 \text{ m}}$

c) Antes del choque, el balón llevará unas velocidades $v_x = v_{0x} = 17.32$ m/s

$$v_y = v_{0y} - gt = 10 - 9.81\ 3.043 = -19.85 \text{ m/s}$$

la línea de choque va en la dirección vertical, por lo que "el choque" se produce a lo largo de esta dirección:

Conservación del momento: $m_b\,v_{by} + m_l\,v_{ly} = m_b\,v'_{by} + m_l\,v'_{ly}$ $\qquad 1\,(-19.85) + 0 = 1\,v'_{by} + 10\,v'_{ly}$ (1.1)

Coeficiente de restitución: $e = -\dfrac{(v'_{ly} - v'_{by})}{(v_{ly} - v_{by})}$ $\qquad 0.8 = -\dfrac{(v'_{ly} - v'_{by})}{(0 - (-19.85))}$ $\qquad 15.88 = v'_{by} - v'_{ly}$ (1.2)

Multiplicando la ecuación (1.2) por 10 y sumándole la ecuación (1.1):

$$158.8 - 19.85 = 10\, v'_{by} + v'_{by}$$ $\boxed{v'_{by} = 12.63 \text{ m/s}}$

Sustituyendo esta velocidad en la ecuación (1.2): $\boxed{v'_{ly} = -3.25 \text{ m/s}}$

en la dirección horizontal las velocidades del balón y la placa no cambian

$$\boxed{\begin{array}{l} v'_{bx} = v_{bx} = 17.32 \text{ m/s} \\ v'_{lx} = v_{lx} = 0 \text{ m/s} \end{array}}$$

El módulo de la velocidad del balón antes del choque es $v_b = \sqrt{19.85^2 + 17.32^2} = 26.34$ m/s

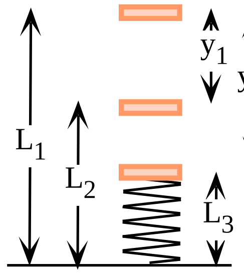
Y después del choque $v'_b = \sqrt{12.63^2 + 17.32^2} = 21.44$ m/s

Durante el choque, no se producen cambios ni de energía potencial gravitatoria ni elástica, solo de energía cinética.

$$Eci = (1/2)\, m_b\, v_b^2 = (1/2)\; 1\;\; 26.34^2 = 346.9 \text{ Julios}$$

$$Ecf = (1/2)\, m_b\, v'^2_b + (1/2)\, m_l\, v'^2_l = (1/2)\; 1\;\; 21.44^2 + (1/2)\; 10\;\; 3.25^2 = 282.6 \text{ Julios}$$

La energía perdida en el choque es $\boxed{Eci - Ecf} = 346.9 - 282.6 = 64.3$ Julios.



d) Para encontrar la mínima longitud del muelle, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica de la lámina entre el punto inmediatamente después del choque y el punto de máxima compresión, donde la energía cinética será cero. Tenemos que recordar que en la posición inicial (inmediatamente después del choque) el muelle esta comprimido una longitud y_1, por lo que ya tenemos energía potencial elástica.

$$m_l g L_2 + 1/2\, m_l\, v'^2_l + 1/2\;\; K\, y_1^2 = 1/2\;\; k\, y_2^2 + mgL_3$$

$$m_l g(L_2 - L_3) + 1/2\, m_l\, v'^2_l + 1/2\;\; K\, y_1^2 = 1/2\;\; k\, y_2^2$$

$$m_l g(y_2 - y_1) + 1/2\, m_l\, v'^2_l + 1/2\;\; K\, x_1^2 = 1/2\;\; k\, y_2^2$$

$$10\;\; 9.81\, (y_2 - 0.0981) + 1/2\; 10\;\; 3.25^2 + 1/2\;\; 1000\;\; 0.0981^2 = 1/2\;\; 1000\, y_2^2$$

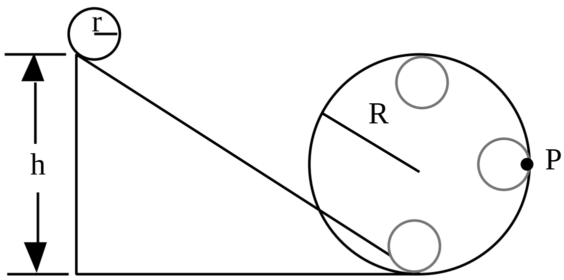
$$500\, x_2^2 - 98.1\, x_2 - 48.00 = 0$$

$$\boxed{y_2} = \frac{98.1 \pm \sqrt{98.1^2 + 96000}}{1000} = \begin{cases} \boxed{0.423 \text{ m}} \\ -0.227 \text{ m} \end{cases}$$

y $\boxed{L_3} = L_1 - y_2 = 1.1 - 0.423 = \boxed{0.677 \text{ m}}$

---

2) Una esfera sólida de masa m y radio r rueda sin resbalar a lo largo del carril que se muestra en la figura. Si parte del reposo, encontrar:



a) Las velocidades con las que llega a la parte inferior y la parte superior del lazo circular.

b) La velocidad mínima que tiene que llevar en la parte superior del lazo para no caer.

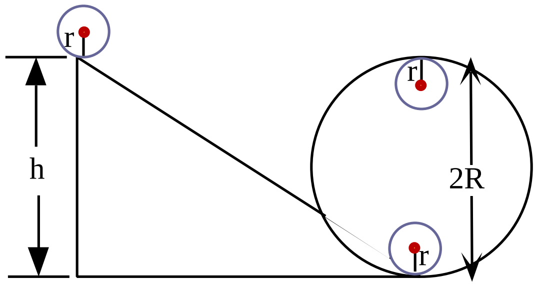
c) ¿Cuál es el valor mínimo de h de modo que la esfera complete la vuelta?

d) ¿Cuales son las componentes de las fuerzas que actúan sobre la esfera en el punto P si h = 3R?

e) Calcular numéricamente las velocidades del apartado a) y las fuerzas del d) para R = 1m, r = 20 cm y h = 3R.

SOLUCION

a) Como la esfera rueda sin deslizar, no hay perdida de energía por fricción y por lo tanto podemos aplicar el principio de conservación de la energía, considerando para la energía potencial gravitatoria, la posición del centro de masas.



Parte inferior: $mg\,(h + r) = mg\,r + 1/2\; mv^2 + 1/2\;\; I\omega^2$ (recordando que $\omega = v/r$)

$mg\,h \;=\; 1/2\; mv^2 + 1/2\;\; 2/5\; mr^2\;(v/r)^2$ (dividiendo por la masa)

$g\,h \;=\; 1/2\; v^2 + 1/5\; v^2 \;=\; 7/10\; v^2$ $\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}}$

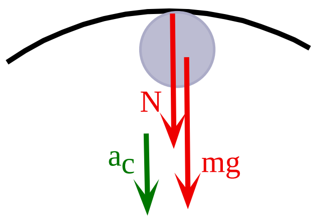
Parte superior: $mg\,(h + r) = mg\,(2R\text{-}r) + 1/2\; mv^2 + 1/2\;\; I\omega^2$ (recordando que $\omega = v/r$)

$mg\,[h\text{-}\,2(R\text{-}r)] \;=\; 1/2\; mv^2 + 1/2\;\; 2/5\; mr^2\;(v/r)^2$ (dividiendo por la masa)

$g\,[h\text{-}\,2(R\text{-}r)] \;=\; 1/2\; v^2 + 1/5\; v^2 \;=\; 7/10\; v^2$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} g\,[\,h - 2\,(\,R - r\,)\,]}} \qquad (2.1)$$

b) En la parte superior del lazo, las únicas fuerzas que actúan son la normal y el peso, ambas dirigidas hacia el centro de la circunferencia, por lo que en ese punto la única aceleración es la centrípeta.



Al aplicar $\sum F = m\, a_{cm}$, hay que considerar que el centro de masas realiza un movimiento circular de radio R-r.

$$mg + N = m\, v^2/(R\text{-}r) \qquad N = m\, v^2/(R\text{-}r) - mg$$

La condición de que la esfera pase sin caer es que haga contacto con la superficie, es decir $N \geq 0$

$$m\, v^2/(R\text{-}r) - mg \geq 0 \qquad v^2/(R\text{-}r) \;\geq\; g \qquad \boxed{v^2 \;\geq\; g\,(R - r)} \quad (2.2)$$

b) En la ecuación anterior (2.2) hemos determinado la velocidad mínima, y en la (2.1) se relaciona la velocidad con la altura. Combinando ambas ecuaciones

$$10/7\;\; g\,[h\text{-}\,2(R - r)] \;\;\geq\;\; g\,(R - r)$$

$$[h\text{-}\,2(R - r)] \;\;\geq\;\; 7/10\,(R - r)$$

$$h \;\geq\; 7/10\,(R - r) + 2\,(R - r)$$

$$\boxed{h \;\geq\; (27/10)\;\;(R - r)}$$

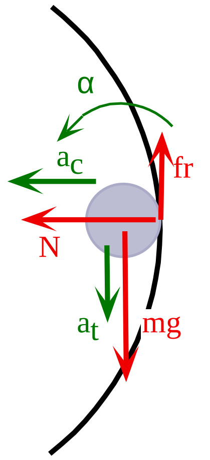
c) Primero calculamos la velocidad en ese punto por energías:

punto P: $mg\,(h + r) = mg\,R + 1/2\; mv^2 + 1/2\;\; I\omega^2$ (recordando que $\omega = v/r$)

$$mg\,(h + r - R) = 1/2\ mv^2 + 1/2\ \ 2/5\ mr^2\ (v/r)^2 \qquad \text{(dividiendo por la masa)}$$

$$g\,(h + r - R) = 1/2\ v^2 + 1/5\ v^2 = 7/10\ v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7} g(h + r - R)}$$

Si h = 3R $\quad v = \sqrt{\frac{10}{7} g(3R + r - R)} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} g(2R + r)}}$



En el punto P actúan inicialmente el peso y la Normal, y la esfera tendrá aceleración centrípeta (asociada a la fuerza norma) y aceleración tangencial (asociada al peso). Al tener aceleración tangencial (la velocidad de la esfera disminuye al ir ascendiendo) también tiene aceleración angular (la velocidad angular disminuye al ascender). Por lo tanto, respecto al centro de masas cada vez gira mas despacio, (α negativo) por lo que tiene que actuar un momento que se oponga al giro de la esfera, y este momento solo puede estar originado por la fuerza de rozamiento.

Peso $\boxed{P = mg}$

Normal $\quad N = m\,a_c = mv^2/(R-r) \qquad \boxed{N = \frac{10}{7}\,\frac{mg\,(2R + r)}{(R - r)}}$

Para determinar la fuerza de rozamiento, tenemos que estudiar la aceleración tangencial (que va en la dirección vertical $a_t = a_y$) y la angular simultáneamente:

$\sum Fy = m\,a_y \qquad$ (para simplificar: $a_y = a$) $\qquad mg - fr = ma \qquad$ (2.3)

$\sum M = I\alpha \qquad (\alpha = a/r) \qquad fr\ r = (2/5)\ mr^2\ (a/r) \qquad a = (5/2)\ (fr/m) \qquad$ (2.4)

sustituyendo este valor de a en la ecuación (2.3) $\quad mg - fr = m\,(5/2)\ (fr/m) = (5/2)\ fr \qquad mg = (7/2)\ fr$

$$\boxed{fr = (2/7)\ mg}$$

d) Para R = 1 m , r = 20 cm y h = 3R

Parte inferior: $\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = \sqrt{\frac{10}{7}\ 9.81\ 3} = 6.48\ \text{m/s}}$

Parte superior: $\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} g[h - 2(R - r)]} = v = \sqrt{\frac{10}{7}\ 9.81[3 - 2(1 - 0.2)]} = 4.43\ \text{m/s}}$

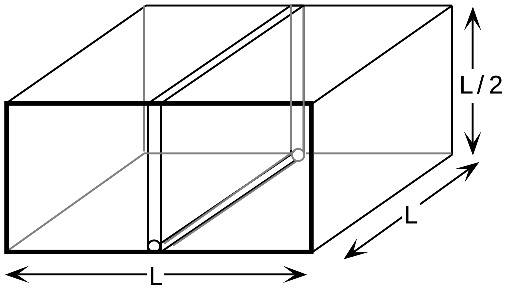
Las fuerzas quedaran en función de la masa m.

$\boxed{P = mg = 9.81\ m\ \ N}$

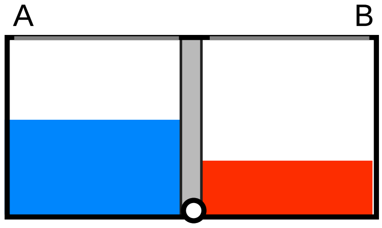
$\boxed{N = \frac{10}{7}\,\frac{mg\,(2R + r)}{(R - r)} = \frac{10}{7}\,\frac{m\,9.81\,(2 + 0.2)}{(1 - 0.2)} = 38.54\ m\ \ N}$

$\boxed{fr = (2/7)\ mg = (2/7)\ m\ 9.81 = 2.8\ m\ \ N}$

3) Un recipiente cuadrado de lado L = 1 m y altura L/2 = 0.5 m (medidas interiores), esta dividido en dos partes iguales por una placa de acero de 4mm de espesor. Dicha placa está unida al recipiente por un eje en su parte inferior (ver figura). Vertemos 249 litros de agua en la parte izquierda y 124.5 litros de mercurio (ρ_{HG} = 13.6 g/cm^3) en la derecha.



a) ¿Cuál es la presión en el fondo del recipiente en los dos lados?
b) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre la placa y el punto de aplicación?
c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el mercurio sobre la placa y el punto de aplicación?
d) Determinar la fuerza total ejercida sobre la placa y el punto de aplicación
Para que la placa no gire, tenemos que unirla mediante un cable a uno de los lados del recipiente. ¿A que lado habrá que unirla, y cuanto valdrá la tensión?



Si la densidad del acero es ρ_a = 7 g/cm^3,
e) ¿Cuánto pesará la placa?
f) ¿Cuál será la reacción en el eje?
Al cortar el cable la placa empieza a girar
g) ¿Cuál será la aceleración angular inicial?

SOLUCION

a) Primero calculamos las alturas alcanzadas por el agua y el mercurio:

$$\boxed{h_a} = V_a / S = \frac{249\ 10^{-3}\ m^3}{(1 \times 0.498)\ m^2} = \boxed{0.5\ m}$$

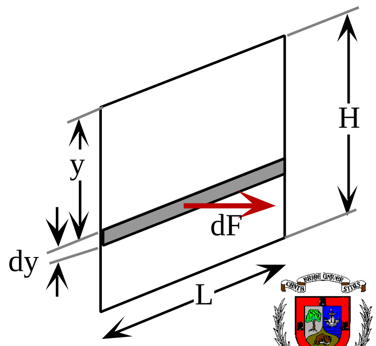
$$\boxed{h_{Hg}} = V_{Hg} / S = \frac{124.5\ 10^{-3}\ m^3}{(1 \times 0.498)\ m^2} = \boxed{0.25\ m}$$

La presión manométrica será:

$$P_a = \rho_a\ g\ h_a = 1000\ 9.81\ \ 0.5 = 4905 \text{ Pascales} = 0.0968 \text{ atm}$$

$$P_{Hg} = \rho_{Hg}\ g\ h_{hg} = 13600\ 9.81\ \ 0.25 = 33354 \text{ Pascales} = 0.329 \text{ atm}$$

b) La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



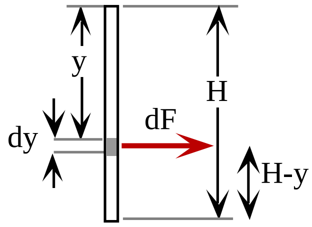
$$dF = Pds = PLdy = \rho_a gy\ Ldy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F} = \int_0^H \rho\ g\, y\, L\, dy = \rho\ g\ L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H = \boxed{(1/2)\,\rho\ g\ L\, H^2} \qquad \boxed{F_a} = (1/2)\, 10^3\ 9.81\ 1\ 0.5^2 \boxed{= 1226.25\ \text{N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento respecto a un punto del fondo de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:



$$dM = dF(H-y) = \rho g y\ L dy\ (H-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^H \rho\ g y L\ (H-y)\, dy = \rho\ gL \int_0^H (H\, y - y^2)\, dy = \rho\ gL\left(H\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^H\right) = \rho\ gL\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right)$$

$$\boxed{M = (1/6)\,\rho g L H^3} \qquad (3.1)$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6)\,\rho\ g\ L\ H^3}{(1/2)\,\rho\ g\ L\ H^2} \qquad \boxed{d = (1/3)\ H} \qquad \boxed{d_a = 0.1667\ \text{m}}$$

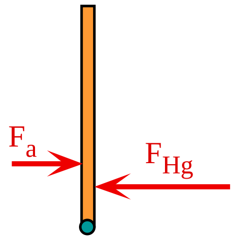
c) En el caso del mercurio las ecuaciones son las mismas cambiando únicamente la densidad y el valor de la altura H (H = 0.25 m).

$$F = (1/2)\,\rho g L H^2 \qquad \boxed{F_{Hg}} = (1/2)\ 13.6\ 10^3\ 9.81\ 1\ 0.25^2 \boxed{= 4169.25\ \text{N}}$$

$$d = (1/3)\ H \qquad \boxed{d_{Hg} = 0.08333\ \text{m}}$$

d) la fuerza total ejercida por los fluidos sobre la placa es

$$F_T = F_a - F_{Hg} = 1226.25 - 4169.25 = -2943 \text{ N}$$

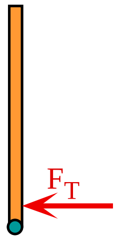


es una fuerza de 2943 N dirigida hacia el sentido negativo del eje x.

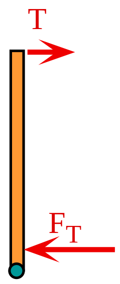
El punto de aplicación estará a una distancia d tal que

$$d\,F_T = d_a\,F_a - d_{Hg}\,F_{Hg} \qquad d = (d_a\,F_a - d_{Hg}\,F_{Hg}) / F_T$$

$$d = (204.4 - 347.4) / (-2943) = 0.0486 \text{ m}$$



si observamos en la figura la fuerza resultante y el punto de aplicación, vemos que trata de girar la placa en sentido antihorario, por lo que para que no gire, tendremos que unir el extremo superior de la placa al lado B.

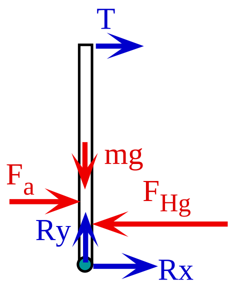


El valor de la tensión la calculamos aplicando las leyes de la estática, y en particular como la placa no puede rotar, $\sum M = 0$.
Calculamos los momentos respecto al eje y considerando que el cable forma 90 grados con la placa,

$$(L/2)\,T + d\,F_T = 0 \qquad T = -(d\,F_T)/(L/2) \qquad T = -(0.0486\ \ -2943)\ /\ 0.5 \qquad T = 286.1 \text{ N}$$

e) La masa de la placa será el producto del volumen por la densidad:

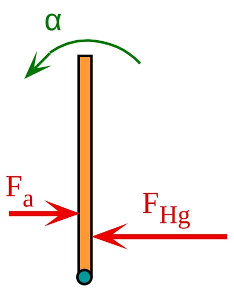
$$m = V\,\rho_{acero} = 1 \times 0.5 \times 0.004 \times 7\ \ 10^3 = 14 \text{ kg}$$



f) la reacción en el eje se calcula aplicando las leyes de la estática, y en particular como la placa no se traslada

$$\sum fx = 0 \qquad F_T + T + Rx = 0 \qquad Rx = -(T + F_T) = -(286.1 - 2943) = 2656.9 \text{ N}$$

$$\sum fy = 0 \qquad Peso + Ry = 0 \qquad Ry = -Peso = -(-14\ \ 9.81) = 137.34 \text{ N}$$



g) El momento respecto al eje originado por el agua y el mercurio es diferente de cero. Este momento inicialmente es compensado por el cable. Al cortar este, la placa comenzara a girar. La ecuación de la rotación es

$$\sum M = I\,\alpha \qquad \alpha = \sum M / I$$

$$\alpha = \frac{d_a F_a - d_{Hg} F_{Hg}}{\frac{1}{3}\, m_P\, L_P^2} = \frac{0.1667\ \ 1226.25\ \ -0.08333\ \ 4169.25}{\frac{1}{3}\ 14\ \ 0.5^2} = \frac{204.4\ - 347.4}{1.1667} = 122.6 \text{ rad/s}$$