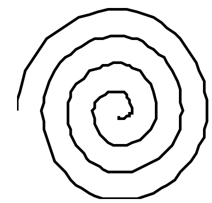
EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 9-9-2004

CUESTIONES

1) Suponer que un objeto sigue una trayectoria en espiral mientras viaja con una velocidad de módulo constante (suponer que parte del centro);
a) ¿Es constante la velocidad del objeto?
b) ¿Es constante su aceleración?
c) ¿Es constante el módulo de la aceleración?
d) Si el módulo de la aceleración no fuese constante ¿Aumenta o disminuye?
Razonar todas las respuestas.



SOLUCION

a) No, la velocidad es un vector y aunque el modulo permanezca constante, la dirección de la velocidad cambia con el tiempo, ya que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

b) No, ya que la velocidad varia con el tiempo. La aceleración tiene dos componentes intrínsecas: la aceleración tangencial ($a_T = d|\mathbf{v}|/dT$)y la aceleración normal ($a_N = v^2/\rho$); la a_T es nula, pero la a_N es diferente de cero.

c) No, ya que aunque el modulo de la velocidad es constante, el radio de curvatura ρ depende de la posición, por lo que la a_N también depende de la posición y por lo tanto del tiempo.

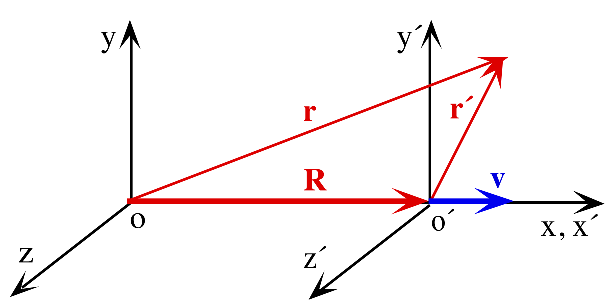
d) Disminuye, ya que el modulo de la velocidad es constante, y el radio de curvatura ρ aumenta con el tiempo, por lo que la a_N ($= v^2/\rho$) se va haciendo mas pequeña.

2) Relación entre las coordenadas espaciales, velocidades y aceleraciones en el movimiento relativo de traslación uniforme (Transformaciones Galileanas). ¿Cuando no se pueden utilizar estas trasformaciones, y hay que utilizar las de Lorentz? Da una idea de porqué.

SOLUCION

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$

Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será $\mathbf{R} = \mathbf{oo'} = \mathbf{v}t = vt\,\mathbf{i}$



La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´**.

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}' \Rightarrow \begin{cases} Vx = v + V'x \\ Vy = V'y \\ Vz = V'z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad. Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: $d\mathbf{v}/dt = 0$ y $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a}'$ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales).

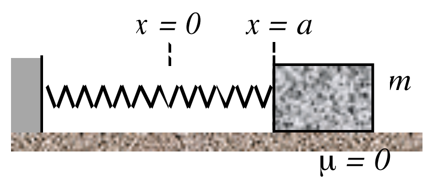
Las transformaciones de Galileo dejan de ser validas cuando las velocidades entre los sistemas de referencia se acercan a la velocidad de la luz. En ese caso tenemos que utilizar las transformaciones de Lorentz. La razón esta en que la luz tiene que llevar la misma velocidad para los dos sistemas de referencia, y esto solo se cumple si aplicamos las transformaciones de Lorentz.

Para velocidades de desplazamiento entre sistemas pequeñas (v << c) aunque apliquemos las transformaciones de Galileo, la luz lleva prácticamente la misma velocidad c para los dos sistemas. Sin embargo, si v tiende a c, al aplicar las transformaciones de Galileo, encontraríamos claramente diferentes velocidades para la luz en los dos sistemas y ello nos obliga a utilizar Lorentz.

---

3) Teniendo en cuenta que las fuerzas ejercidas por los muelles son de tipo elástico:

a) Obtener la expresión de la energía potencial elástica asociada a este tipo de fuerzas conservativas.



Se suelta la masa m desde la posición indicada en la figura:

b) Representar la curva de la energía potencial del sistema en función del alargamiento x del muelle.

c) Señalar en la gráfica los puntos de equilibrio y el sentido de la fuerza en cada intervalo del eje X.

d) ¿Qué tipo de movimiento realizará la masa?

SOLUCION

a) Las fuerzas elásticas son conservativas, por lo que $dW = -dEp$.

Para obtener la expresión de la energía potencial, integramos esta expresión entre dos posiciones, por ejemplo entre el origen, x = 0, y una posición final x = a.

Para ello, recordemos que la definición de trabajo es $dW = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$, y como el movimiento se realiza en una dimensión, podemos suponer que esta es la x: $dW = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -kx\,\mathbf{i}\;dx\,\mathbf{i} = -kx\,dx$

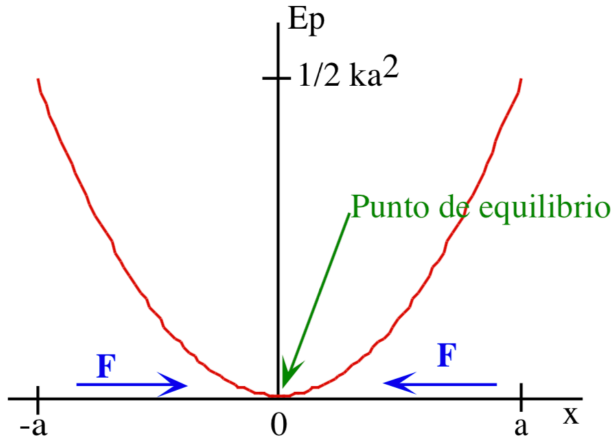
Integrando: $\int_0^a -dEp = \int_0^a - kx\,dx \;\Rightarrow\; \left[Ep\right]_0^a = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^a \;\Rightarrow\; Ep_a - Ep_0 = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}k0^2$

Por lo que $Ep_a = Ep_0 + (1/2)ka^2$. Si suponemos que la energía potencial en el origen vale 0 ($Ep_0 = 0$), en el punto a la energía es:

$$Ep_a = (1/2)ka^2$$

si consideramos que este valor a puede tomar cualquier valor x del eje X, $\boxed{Ep_x = (1/2)\,kx^2}$ lo que nos da la expresión final de la energía potencial en función de la posición x que ocupa la masa.

b) La curva de energía potencial será una parábola, con un valor máximo de x = a:

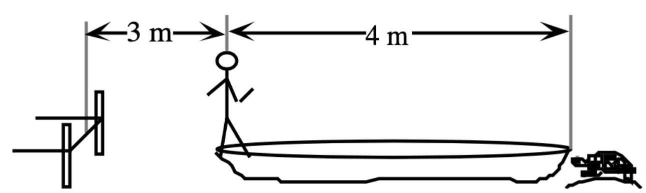


c) El puntos de equilibrio será el x = 0.
Como F = -∇Ep, en el intervalo [–a,0] la fuerza es positiva, mientras que en el [0,a] la fuerza lleva sentido negativo.

d) La masa oscila entre las posiciones –a y a realizando un movimiento armónico simple ($x = a \text{ sen } (\omega t + \theta_0)$)

4) Un niño de 40 kg se encuentra de pie en el extremo de una barca de 70 kg que mide 4 m. Inicialmente la barca se encuentra a 3 m del muelle. El niño ve a una tortuga sobre una roca que pega al otro extremo de la barca, y comienza a caminar hacia dicho punto para alcanzar la tortuga. Despreciando el rozamiento entre la barca y el agua:

a) Describir el movimiento del sistema (el niño y la barca).
b) ¿Cual es la posición del centro de masas del sistema niño-barca respecto del muelle?
c) ¿Dónde se encuentra el niño respecto del muelle cuando llega al otro extremo de la barca?
d) ¿ Podrá alcanzar a la tortuga? (suponer que puede extender su brazo 1 m más allá del extremo de la barca).



SOLUCION

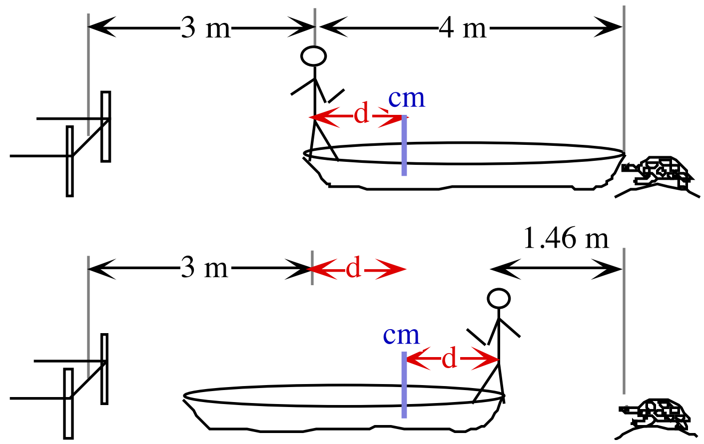
a) Al avanzar el niño hacia la tortuga, con sus pies impulsa a la barca en sentido contrario. Al despreciar el rozamiento entre la barca y el agua, el sistema barca-niño, es un sistema aislado, no existiendo fuerzas externas. Recordando que $\sum \mathbf{F}ext = m\mathbf{a}_{cm}$, como $\sum \mathbf{F}ext = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_{cm} = 0$, por lo que si el centro de masas estaba inicialmente en reposo, sigue en reposo. Es decir, cuando el niño se mueve el centro de masas del sistema barca-niño, no cambia de posición.

b) Respecto del muelle, el centro de masas (cm) del niño esta a 3 m, y el de la barca, por simetría, en el centro de la barca, es decir a 5 m:

$$\boxed{x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{40\ 3\ +\ 70\ 5}{40\ +\ 70} = 4.27\ \text{m}}$$

c) La distancia inicial entre el niño y el cm es: d= 4.27 – 3 = 1.27 m. Cuando el niño camina y se va al otro extremo de la barca, por simetría, la distancia entre el cm y el niño es también d =1.27 m. Como el centro de masas no cambia de posición respecto del muelle, la distancia desde el muelle al niño es 4.27 + 1.27 $\boxed{= 5.54\text{ m}}$.

d) La mano del niño alcanza 1 m mas allá de la barca, por lo que llega a 5.54 +1 = 6.54 m, menos de los 7 m necesarios para alcanzar la tortuga.



PROBLEMAS

---

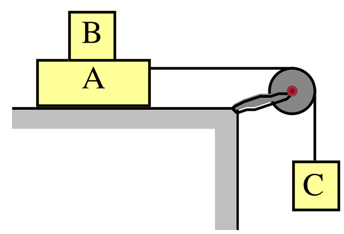
1) Un bloque B de masa m_B descansa sobre el A, de masa m_A, que a su vez está sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento dinámico entre A y la superficie horizontal es μ_d y el coeficiente de rozamiento estático entre A y B es μ_e . Un hilo atado a A pasa por una polea, sin masa ni rozamiento, con el bloque C colgado en el otro extremo.

a) ¿Cuál es la aceleración máxima del sistema que hace que A y B se muevan juntos cuando el sistema se libera desde el reposo?

b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en dicho caso?

c) ¿Qué valor de masa m_C debe tener C para producir esta aceleración?

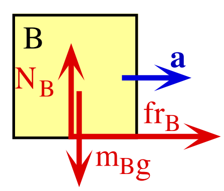
Expresar los resultados en función de m_A, m_B, μ_e y μ_d.



SOLUCION

a) La fuerza que acelera al cuerpo B es la de rozamiento con el A. Cuando no hay deslizamiento, Fr_B puede tomar cualquier valor entro 0 y la máxima, $fr_{Bmax} = \mu_e N_B$. Como hay una fuerza máxima que le puede acelerar, solo podrá llevar una aceleración máxima. Por la segunda ley de Newton:

$$fr_{Bmax} = ma_{max} \Rightarrow \mu_e N_B = ma_{max}$$



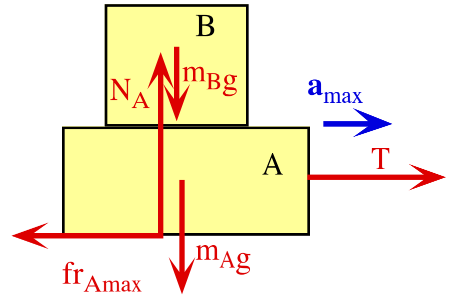
La única incógnita es N_B. En la dirección vertical, no hay aceleración por lo que

$$N_B - m_Bg = 0 \Rightarrow N_B = m_Bg$$

Sustituyendo este valor de N_B en la formula anterior $\mu_e m_Bg = ma_{max} \Rightarrow \boxed{a_{max} = \mu_e g}$

Cuando la tensión hace que A tenga una aceleración superior al valor que hemos calculado, el cuerpo B no puede alcanzar dicha aceleración y desliza hacia atrás respecto del cuerpo A.

b) Si A y B se mueven unidos, los podemos considerar como un único bloque de masa la suma de las dos: $m_A + m_B$. La normal en la superficie horizontal N_A, se opone a su peso: $N_A = m_A g + m_B g$



En la dirección horizontal, solo actúan la tensión y la fuerza de rozamiento que, como hay deslizamiento, será la máxima

$$fr_{Amax} = \mu_d N_A = \mu_d (m_A + m_B)g$$

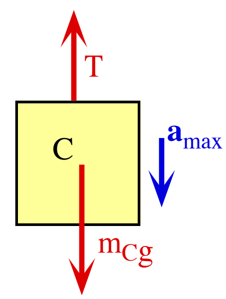
Aplicando la 2ª ley de Newton: $T - fr_{Amax} = (m_A + m_B)\, a_{max} \Rightarrow T = (m_A + m_B)\, a_{max} + fr_{Amax}$

Y sustituyendo los valores de a_{max} y fr_{Amax}

$$T = (m_A + m_B)\,\mu_e g + \mu_d (m_A + m_B)g$$

Sacando factor común

$$\boxed{T = (m_A + m_B)\, g\, (\mu_e + \mu_d)}$$



c) La tensión T esta originada por el cuerpo C. Cuando los bloques A y B llevan una aceleración a_{max}, el C lleva la misma aceleración. Aplicando la 2ª ley de Newton a dicho cuerpo:

$$m_c g - T = m_c\, a_{max} \quad \Rightarrow \quad m_c\,(g - a_{max}) = T \quad \Rightarrow$$

$$m_c\,(g - \mu_e g) = (m_A + m_B)\, g\, (\mu_e + \mu_d) \Rightarrow$$

$$m_c\,(1 - \mu_e)\, g = (m_A + m_B)\, g\, (\mu_e + \mu_d) \Rightarrow \quad \boxed{m_C = (m_A + m_B)\frac{(\mu_e + \mu_d)}{(1 - \mu_e)}}$$

---

2) Un cilindro homogéneo pesado tiene un masa m y un radio R. Se ve acelerado por una fuerza T que se aplica mediante una cuerda arrollada a lo largo de un tambor ligero de radio r unido al cilindro (ver figura). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar.

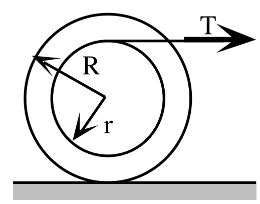
a) Representar todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro

b) Hallar la fuerza de rozamiento.

c) Hallar la aceleración a del centro del cilindro.

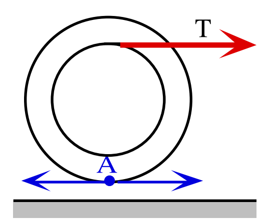
d) Es posible escoger r de modo que a sea mayor que T/m? ¿Cómo?

e) ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento en la circunstancia descrita en el apartado d?

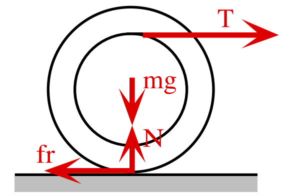


SOLUCION

a) La tensión produce una traslación del centro de masas y una rotación entorno al mismo. En ausencia de suelo, dependiendo del valor de r, el efecto de la rotación es mayor o menor que el de la traslación por lo que el punto A podría tratar de ir hacia la izquierda o derecha respectivamente. El suelo ejerce una fuerza de rozamiento que evita que dicho punto "deslice", y podrá llevar el mismo sentido que la tensión o el contrario dependiendo de que A trate de ir hacia la izquierda o hacia la derecha respectivamente.



Si suponemos que el punto A trata de moverse (deslizar) en la dirección de la tensión, la fuerza de rozamiento se opone a este movimiento (deslizamiento), por lo que las fuerzas que actúan son las de la figura:



b) Traslación: $T - f_r = ma_{cm} \quad \Rightarrow \quad a_{cm} = (T - f_r)/m \qquad (2.1)$

Rotación: $Tr + f_r R = I\alpha \quad \Rightarrow \quad Tr + f_r R = (1/2)mR^2 (a_{cm}/R) \qquad (2.2)$

Hemos utilizado las relaciones $I = (1/2)mR^2$ y como rueda sin deslizar: $\alpha = a_{cm}/R$. Sustituyendo a_{cm} (ecuación 2.1) en la ecuación 2.2:

$$Tr + f_r R = (1/2)mR^2 (T - f_r)/Rm = (1/2)R (T - f_r) = RT/2 - Rf_r/2 \Rightarrow$$

Pasando los términos con f_r al primer miembro de la ecuación y los de T al segundo:

$$f_r R + Rf_r/2 = RT/2 - Tr \Rightarrow f_r (R + R/2) = T (R/2 - r) \Rightarrow f_r (3/2)R = T (R/2 - r) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_r = T\frac{(R - 2r)}{3R}} \qquad (2.3)$$

c) Introduciendo el valor de la f_r en la ecuación 2.1

$$a_{cm} = (T - f_r)/m = \frac{T - T\frac{(R - 2r)}{3R}}{m} = \frac{T\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} = \frac{T\left(\frac{2}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} \Rightarrow$$

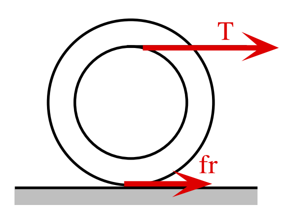
$$\boxed{a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)}$$

d) si $a_{cm} > T/m \Rightarrow (2/3)\ (1 + (r/R)) > 1 \Rightarrow 1 + (r/R) > (3/2) \Rightarrow (r/R) > (1/2) \Rightarrow$

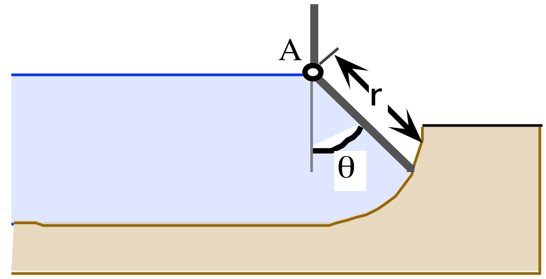
$$\boxed{r > (R/2)}$$

Por lo tanto si el posible, siempre que $r > (R/2)$.

d) El que la a_{cm} sea mayor que T/m solo puede ser debido a que existe otra fuerza que acelera aun mas el centro de masas del cilindro al actuar en la misma dirección que la tensión, y esta fuerza es la f_r. Así pues, cuando $r > (R/2)$ la f_r lleva el mismo sentido que la tensión.

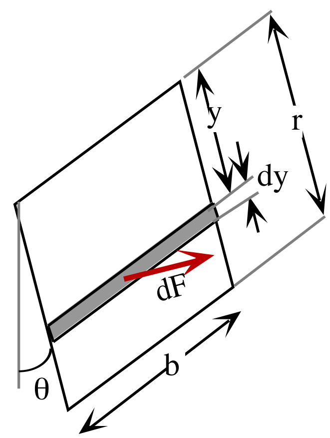


3) Una compuerta uniforme rectangular de masa M, altura r y anchura b está sujeta por goznes en A. Si el líquido de densidad ρ alcanza una altura r, determinar:



a) La fuerza que el líquido ejerce sobre la compuerta (en función de ρ, g, b, r y θ).
b) El punto de aplicación de la fuerza resultante (en función de r).
c) El ángulo que alcanza la compuerta respecto de la vertical, θ (en función de ρ, b, r y M).
Si el líquido es agua, r = 2 m, b = 0.5 m y M = 1000 kg, **calcular numéricamente**:
d) La presión debida al agua en el fondo del recipiente.
e) La fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta y el ángulo θ utilizando las ecuaciones encontradas en los apartados a y c respectivamente.

SOLUCION



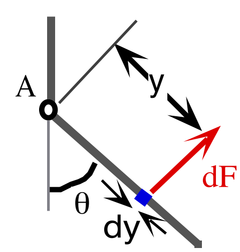
a) Consideramos una franja de la compuerta de grosor dy y longitud b situada a una distancia y del gozne y por lo tanto a una profundidad ycosθ, la fuerza que actúa sobre la misma será la presión ejercida por el agua (P = ρgycosθ) multiplicada por la superficie:

$$dF = Pds = Pbdy = \rho g y\cos\theta \; bdy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la compuerta:

$$F = \int_0^r dF = \int_0^r \rho g y\cos\theta \; bdy = \rho g b\cos\theta \int_0^r y dy = \rho g b\cos\theta \left[\frac{y}{2}\right]_0^r = \boxed{\frac{1}{2}\rho g b\cos\theta \; r^2}$$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento <u>respecto al punto A</u> de un dF actuando sobre una franja de anchura dy a una distancia y será:

$$dM = dF\, y = \rho g y\cos\theta \; bdy \; y$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

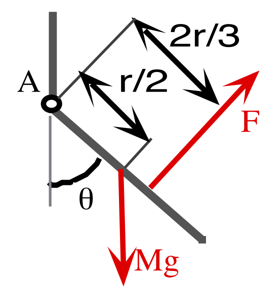
$$M \;=\; \int_0^r dM \;=\; \int_0^r \rho g y \cos\theta \, b dy\, y \;=\; \rho g b \cos\theta \int_0^r y^2 dy \;=\; \rho g b\cos\theta \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^r \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{M = (1/3)\, \rho g b \cos\theta\, r^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una distancia d respecto al gozne A de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d \;=\; \frac{M}{F} \;=\; \frac{(1/3)\ \rho\ g\ b\cos\theta\ r^3}{(1/2)\ \rho\ g\ b\cos\theta\ r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = (2/3)r}$$



d) La compuerta es uniforme, por lo que el punto de aplicación del peso esta situado en el centro de la misma, a una distancia r/2 del gozne.

En el equilibrio, la compuerta no rota, por lo que $\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow$

$$Mg\ (r/2)\ \mathrm{sen}\theta \ - \ F\ (2/3) r \ \mathrm{sen}\ 90 = 0 \ \Rightarrow$$

$$Mg\ (r/2)\ \mathrm{sen}\theta \;=\; (1/2)\ \rho g b \cos\theta\ r^2\ (2/3)\ r \Rightarrow \quad M\ (\mathrm{sen}\theta/\cos\theta) = \rho b r^2\ (2/3) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\theta \;=\; \frac{2\rho b r^2}{3M}}$$

d) La presión debida al agua a una profundidad H es $\rho g H$, en nuestro caso H = r:

$$P = \rho g r \;=\; 10^3\ \ 9.81\ \ 2 = 19.62\ 10^3\ \text{Pascales} = 0.1937\ \text{atm}$$

e) $\quad F = (1/2)\ \rho g b \cos\theta\ r^2 = (1/2)\ 10^3\ \ 9.81\ 0.5\ \cos\theta\ 2^2 \;=\; 9810 \cos\theta\ \ \text{N}$

$$\mathrm{tg}\theta \;=\; \frac{2\rho b r^2}{3M} \;=\; \frac{2\ 1000\ 0.5\ 2^2}{3\ 1000} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \mathrm{arctg}\ (4/3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 53.13°}$$

Si sustituimos este valor del ángulo en la ecuación de la fuerza: $F = \ 9810 \cos(53.13) \;=\; 5886\ \text{N}$