EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 8-2-2003, 9-9-2003

CUESTIONES

---

1) A partir del concepto de partícula libre y del principio de conservación del momento lineal para un sistema de dos partículas razonar y deducir las tres leyes de Newton.

SOLUCION

Las leyes de Newton son:

1º Ley: Todo cuerpo continua en sus estado inicial de reposo o de movimiento con velocidad uniforme a menos que sobre él actúe una fuerza externa neta o no equilibrada. Esto significa que si tenemos una partícula libre (no sujeta a ninguna interacción) ésta se mueve con velocidad constante: Ley de inercia.

2º Ley: La aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa y directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m \qquad\qquad \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

Para que se produzca una variación en la velocidad, es necesario aplicar una fuerza: $\Delta \mathbf{V}$ $\mathbf{F}$. La masa representa la inercia del cuerpo a cambiar su estado de movimiento.

3º Ley: Las fuerzas actúan siempre por pares. Si un objeto A ejerce una fuerza sobre un objeto B, este ejerce sobre el A una fuerza igual pero del sentido contrario.
Esta ley también se denomina ley de acción y reacción.

- Si tenemos una partícula libre, su momento lineal se conserva:

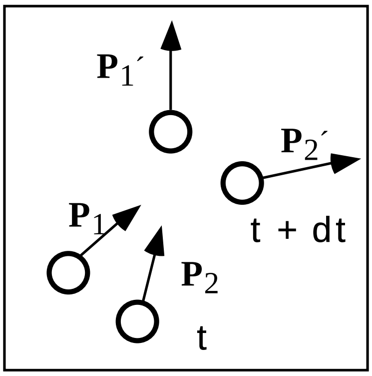
$$\mathbf{p} = \text{cte.} \qquad m\mathbf{v} = \text{cte.} \qquad \mathbf{v} = \text{cte} \ \ (1^{\text{o}} \text{ ley})$$

- Si tenemos dos partículas aisladas su momento lineal total también se conserva ($\mathbf{p}1 + \mathbf{p}2$ = cte). Si suponemos que estas dos partículas interaccionan durante un incremento de tiempo infinitesimal dt, su momento total antes y despues de la interacción va a ser el mismo:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$$

$$\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2)$$

$$d\mathbf{p}_1 = -d\mathbf{p}_2$$



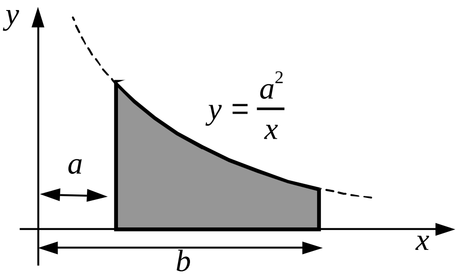
Dividiendo por dt:

$$d\mathbf{p}_1/dt = -d\mathbf{p}_2/dt$$

Definiendo $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\,d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{a}$ *(2º ley)* se llega a:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (3^{\text{o}}\ ley)$$

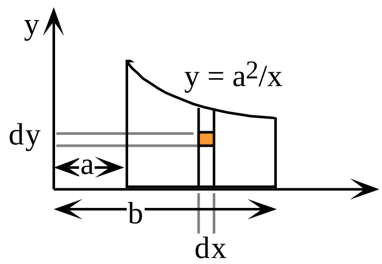
2) Una Una lámina de metal tiene la forma representada en la figura. Determinar las coordenadas de su C.M. en función de a y b.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} \qquad \text{e} \qquad y_{CM} = \frac{\int y\, dA}{\int dA}$$



con dA = dx dy. integramos primero dy entre 0 y a^2/x y posteriormente dx entre a y b

$$\boxed{\int x dA} = \iint x\, dxdy = \int_a^b xdx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b xdx\, [y]_0^{a^2/x} = \int_a^b xdx \frac{a^2}{x} = \int_a^b a^2 dx = a^2 [x]_a^b = \boxed{a^2(b-a)}$$

$$\boxed{\int y dA} = \iint y\, dxdy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} ydy = \int_a^b dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx \frac{a^4}{2x^2} = \int_a^b \frac{a^4}{2x^2} dx = \frac{a^4}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \boxed{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

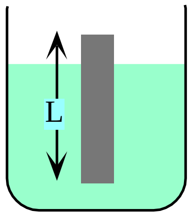
$$\boxed{\int dA} = \iint dxdy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b dx\, [y]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx \frac{a^2}{x} = a^2 [\mathrm{Ln}x]_a^b = a^2(\mathrm{Ln}b - \mathrm{Ln}a) = \boxed{a^2 \mathrm{Ln}(b/a)}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones iniciales:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{a^2(b-a)}{a^2 \mathrm{Ln}(b/a)} = \boxed{\frac{(b-a)}{\mathrm{Ln}(b/a)}}$$

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{a^2 \mathrm{Ln}(b/a)} = \frac{a^2\left(\frac{b-a}{ab}\right)}{2\mathrm{Ln}(b/a)} = \boxed{\frac{a(b-a)}{2b\mathrm{Ln}(b/a)}}$$

3) Un cilindro homogéneo y uniforme de densidad relativa ρ_{Cr} = 0.8 flota verticalmente en un líquido de densidad relativa ρ_{Lr} = 1.2.

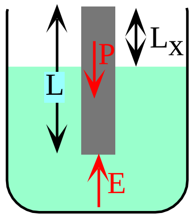


a) ¿Qué fracción de la longitud L del cilindro asoma por encima de la superficie del líquido? ¿Qué principio aplicamos?

Si situamos el recipiente en un cohete que acelera verticalmente hacia arriba con una aceleración a =g

b) ¿Cuál será ahora la fracción que asoma?

SOLUCION



a) Aplicamos el principio de Arquímedes: todo cuerpo sumergido experimenta una fuerza ascensorial igual al peso del fluido desalojado.

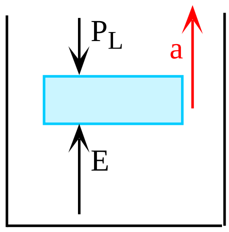
Si suponemos que el cilindro tiene una sección A y teniendo en cuenta que $\rho_C = \rho_{Cr}\,\rho_a$ y $\rho_L = \rho_{Lr}\,\rho_a$, al estar el cilindro en equilibrio,

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad \mathbf{P} + \mathbf{E} = 0 \qquad \mathbf{E} = -\mathbf{P} \qquad |\mathbf{E}| = |\mathbf{P}|$$

$$m_L\, g = m_C\, g \qquad V_L\, \rho_{Lr}\, \rho_a\, g = V_C\, \rho_{Cr}\, \rho_a\, g \qquad \cancel{A}(L-Lx)\, \rho_{Lr}\, \cancel{\rho_a}\, \cancel{g} = \cancel{A}L\, \rho_{Cr}\, \cancel{\rho_a}\, \cancel{g} \qquad (L-Lx)\, \rho_{Lr} = L\, \rho_{Cr}$$

$$L\,(\rho_{Lr} - \rho_{Cr}) = Lx\, \rho_{Lr} \qquad \boxed{\frac{Lx}{L} = \frac{\rho_{LR} - \rho_{CR}}{\rho_{LR}} = \frac{1.2 - 0.8}{1.2} = \frac{0.4}{1.2} = \frac{1}{3}}$$

Por lo que asoma 1/3 de la longitud total.



b) en el caso de estar todo el conjunto acelerando, se aplica el mismo principio, con la única diferencia de que ahora el cilindro esta acelerando y de que el empuje crece, el empuje es el peso "aparente" del fluido desalojado: E = m (g + a). Esto se puede demostrar fácilmente. Si nos fijamos en un elemento de imaginario de volumen dentro del mismo recipiente, ese elemento esta acelerando, y las únicas fuerzas que actúan sobre él son el peso y el empuje realizado por el resto del fluido el empuje es mayor que el peso

$$E - P_L = m_L a \qquad E = P_L + m_L a \qquad E = m_L g + m_L a \qquad E = m_L\,(g + a)$$

Aplicando ahora la 2ª ley de Newton al cilindro:

$$E - P_C = m_C a \qquad m_L\,(g + a) - m_C\, g = m_C\, a \qquad m_L\,(g + a) = m_C\,(g + a)$$

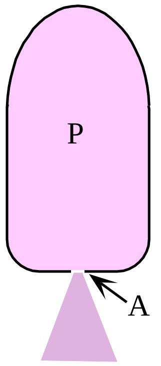
Esta ecuación es la misma que en el caso sin aceleración sustituyendo g por g+a. Como este termino aparece en ambos lados de la ecuación se elimina, y la solución es la misma que en el caso anterior, es decir que asoma una fracción

$$\boxed{\frac{Lx}{L} = \frac{1}{3}}$$

4) Tenemos un gas de densidad ρ encerrado en un recipiente a una presión P. Si realizamos un orificio de sección A en su parte inferior determinar:

a) la velocidad de salida del gas por el orificio. ¿Qué ecuación se utiliza y que aproximaciones tenemos que realizar

b) La fuerza propulsora generada por el gas al salir por el orificio.



SOLUCION

a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto cualquiera del interior del recipiente (1)y el orificio de salida (2)

$$P_1 + \rho g h_1 + (1/2)\,\rho v_1^2 \quad = \quad P_2 + \rho g h_2 + (1/2)\,\rho v_2^2$$

La primera aproximación consiste en suponer la sección del recipiente mucho mayor que la sección del orificio de salida $v_1 = 0$, además sabemos que $P_1 = P$ y $P_2 = \text{Patm}$

$$P + \rho g h_1 = \text{Patm} + \rho g h_2 + (1/2)\,\rho v_2^2 \qquad v_2^2 = (2/\rho)\,[(P - \text{Patm}) + \rho g(h_1 - h_2)]$$

Como en un gas la densidad es muy pequeña, el incremento de presión debido a la altura es muy pequeño por lo que .la siguiente aproximación consiste en despreciar el termino $\rho g(h_1 - h_2)]$ frente al de diferencia de presiones

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2(P - \text{Patm})}{\rho}}}$$

b) Aplicando la 2ª ley de Newton $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ a un sistema de masa variable que expulsa partículas que pasan de tener una velocidad inicial 0 a una velocidad final **v:** $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt = (dm)\mathbf{v}/dt$

con $dm = \rho\, d\text{Volumen} = \rho\, A\, dL$, siendo dL el espacio que recorren las partículas en un dt. Sustituyendo en la ecuación de la fuerza:

$$F = \frac{dm\, v}{dt} = \frac{\rho\ a\, dL\, v}{dt} = \rho\, a\, v \frac{dL}{dt} = \rho\, a\, vv = \rho\, a\, v^2$$

Finalmente tomamos como v el valor de la velocidad de salida v_2 determinado anteriormente

$$F = \rho A \frac{2(P - \text{Patm})}{\rho} \qquad \boxed{F = 2A\,(P - \text{Patm})}$$

PROBLEMAS

---

1) Una partícula de masa m, que se puede mover a lo largo del eje x, está sometida a una fuerza que deriva de la función energía potencial :

$$Ep(x) = Ax^2 - Bx^3 \quad \text{donde A y B son constantes positivas}$$

Encontrar:
a) Posiciones de equilibrio, indicando su carácter estable o inestable.
b) La expresión de la fuerza.
c) La frecuencia de pequeñas oscilaciones ($x \rightarrow 0$) alrededor de la posición de equilibrio estable.
d) Energía que debemos de comunicar a la partícula para que "escape" de la posición de equilibrio estable.
e) Si la partícula oscila con pequeña amplitud y además está sometida a una fuerza de amortiguamiento $F = -bv$, donde v es la velocidad de la partícula ¿Cuál es la nueva frecuencia de oscilación? ¿Cuánto ha disminuido la amplitud cuando la masa ha completado 10 oscilaciones?
Datos: $A = 5$ N m^{-1}, $B = 2$ N m^{-2}, $b = 4$ N s m^{-1}, $m = 2$ kg
Nota: solución de amortiguamiento débil: $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_A t + \alpha)$, con $\gamma = b/2m$ y $\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

SOLUCION

a) Las posiciones de equilibrio corresponden a máximos y mínimos de la energía potencial, ya que en los máximos y los mínimos la fuerza es 0.
Los máximos y mínimos corresponden a posiciones donde la derivada de la Ep sea cero:

$$dEp/dx = d(Ax^2 - Bx^3)/dx = 2Ax - 3Bx^2 = x(2A - 3Bx) = 0$$

Tiene dos soluciones 1ª) $\boxed{x = 0}$

2ª) $2A - 3Bx = 0 \qquad x = 2A/3B = 2\ 5/3\ 2 \qquad \boxed{x = 5/3}$

Las posiciones de equilibrio estable son las correspondientes a los mínimos de la Ep, ya que ante cualquier desviación de la posición de equilibrio aparece una fuerza que nos devuelve a la misma. Por el contrario, las posiciones de equilibrio inestable corresponden a los máximos, ya que ante cualquier desviación de la posición de equilibrio, aparece una fuerza que nos aleja de la misma. Para saber si son máximos o mínimos calculamos el valor de la derivada segunda en las posiciones de equilibrio, si la si la derivada segunda es positiva es un mínimo (equilibrio estable) mientras que si la derivada segunda es negativa, estamos ante un máximo (equilibrio inestable).

$$d^2Ep/dx^2 = d(2Ax - 3Bx^2)/dx = 2A - 6Bx$$

Para $\boxed{x = 0}$ $\quad d^2Ep/dx^2 = 2A = 2\ 5 = 10 > 0$ mínimo $\boxed{\text{estable}}$
Para $\boxed{x = 2A/3B}$ $\quad d^2Ep/dx^2 = 2A - 6B(2A/3B) = 2A - 4A = -2A = -10 < 0$ máximo $\boxed{\text{inestable}}$

b) La fuerza se define como menos el gradiente de la Ep

$$F = - \nabla Ep = - \left(\frac{\partial Ep}{\partial x} i + \frac{\partial Ep}{\partial y} j + \frac{\partial Ep}{\partial z} k \right)$$

En este caso la Ep solo depende de x, por lo que la fuerza solo tiene componente a lo largo del eje x

$$F = Fx = - \frac{\partial Ep}{\partial x} = - \frac{\partial (Ax^2 - Bx^3)}{\partial x} = -2Ax + 3Bx^2 = -10x + 6x^2$$

c) Cuando la partícula está muy próxima a la posición de equilibrio estable, x 0, por lo que el termino x^2 se puede considerar despreciable respecto al termino en x. La fuerza se puede aproximar a $F = -2Ax$, es decir, la fuerza es del tipo $F = -Kx$ con $K = 2A = 2\ 5 = 10\ N\ m^{-1}$.
Este tipo de fuerza da origen a un movimiento armónico simple con una frecuencia angular

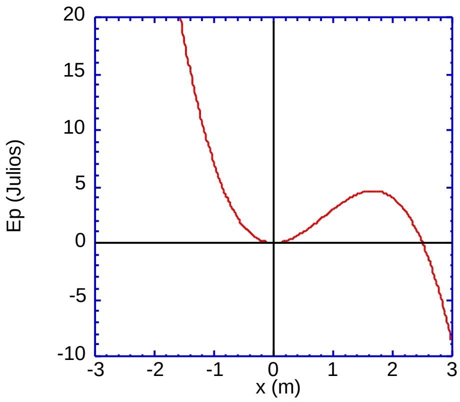
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5} = 2.24 \text{ rad/s}$$

Como $\omega = 2\pi/T$ el período vale $T = 2\pi/\omega = 2.81$ s y la frecuencia

$$\nu = 1/T = 0.356\ s^{-1}$$

d) Si representamos en una grafica la función Ep en función de x, vemos que para que escape de la situación de equilibrio estable, tiene que tener una energía superior a la del máximo correspondiente a la posición de equilibrio inestable.

$E = Ep(5/3) = A(5/3)^2 – B(5/3)^3 = 5(5/3)^2 – 2(5/3)^3 =$ 4.63 Julios



e) En esta nueva situación de amortiguamiento débil, la frecuencia angular vale:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{2} - \left(\frac{4}{2\ 2}\right)^2} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \text{ rad/s}$$

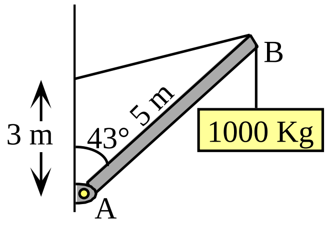
y el período: $T_A = 2\pi/\omega_A = \pi = 3.1416$ s $\quad \nu_A = 1/T_A = 0.318\ s^{-1}$

En 10 oscilaciones, el tiempo transcurrido es $10\ T_A = 10\ \pi = 31.416$ s

Como la solución es $x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_A t + \alpha)$, con $\gamma = b/2m = 4/(2\ 2) = 1 s^{-1}$, la amplitud valdrá

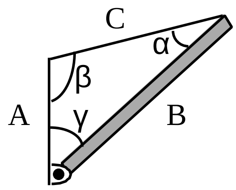
$$A_A = Ae^{-\gamma t} = Ae^{-1\ 31.46} = 2.17\ 10^{-14}\ A$$

2) Una barra cuyo peso es despreciable, puede girar alrededor de un eje A sujeto a la pared. Su extremo B está amarrado al punto C por un hilo ideal, y de dicho extremo se cuelga una masa de 1000 kg. Sabiendo que AB = 5 m y el ángulo que forma la barra con la pared en A de 43°, determinar:



a) El valor de la tensión T en el hilo.
b) Modulo y dirección de la reacción e el punto A. ¿Cuál es el valor de la fuerza de compresión que se produce en la barra?
Si la barra tiene una masa de 100 kg determinar:
c) La tensión del hilo y la reacción en el punto A.
d) La aceleración angular inicial de la barra al cortar simultáneamente las dos cuerdas que van a su extremo (la que viene de la pared y la que sujeta a la masa de 1000 kg). ($I = 1/3\ mL^2$)

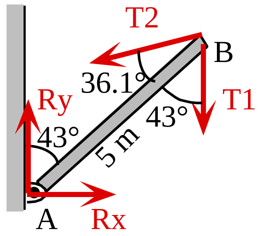
SOLUCION



a) Primero resolvemos el triangulo formado por la barra, la cuerda y la pared:
Aplicando el teorema del coseno:

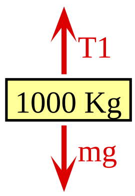
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma} = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 43} = 3.47\ \text{m}$$

Aplicando el teorema de los senos $\dfrac{A}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{B}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{C}{\text{sen}\,\gamma}$ $\quad \alpha = 36.1°$ y $\beta = 100.9°$



Las fuerzas que actúan sobre la barra están representadas en rojo.
Para determinar cuanto vale T1, nos fijamos en la masa de 1000 kg, que esta en reposo, y por lo tanto la tensión es igual al peso:

$$\boxed{T_1 = 1000\ g = 9810\ \text{N}}$$



Aplicando $\sum M_A = 0$ Rx y Ry no producen momento por lo que:

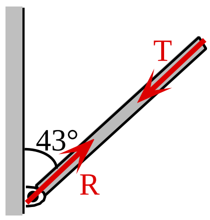
$$T_1\ 5\ \text{sen}\ 43 - T_2\ 5\ \text{sen}\ 36.1 = 0 \qquad \boxed{T_2 = 11355\ \text{N}}$$

b) Para determinar las reacciones en el punto A aplicamos

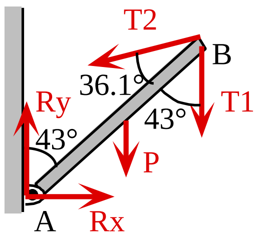
$$\sum F_x = 0 \qquad R_x - T_2 \text{sen}\ 79.1 = 0 \qquad R_x = 11355\ \text{sen}79.1 \qquad \boxed{R_x = 11150\ \text{N}}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_y - T_1 - T_2 \cos 79.1 = 0 \qquad R_y = 9810 + 11355\cos 79.1 \qquad \boxed{R_y = 11957\ \text{N}}$$

El modulo de la reacción es $\boxed{R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = 16349\ \text{N}}$
y el ángulo que forma R con la pared es $\text{tg}\theta = Rx/Ry$ $\quad \theta = 43°$, es decir que lleva la dirección de la barra. La suma de las dos tensiones en el punto A también tiene que llevar la dirección de la barra, y tener el mismo modulo que la reacción en A. Por lo tanto la fuerza de compresión es igual al modulo de R = 16349 N



c) En este caso, las fuerzas que actúan sobre la barra son:

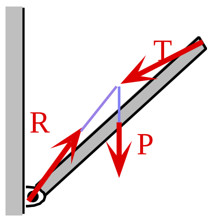


$\sum M_A = 0$ $\quad T_1\, 5 \text{ sen } 43 + P\, 2.5 \text{ sen } 43 - T_2\, 5 \text{ sen } 36.1 = 0$ $\quad \boxed{T_2 = 11923 \text{ N}}$

$\sum F_x = 0$ $\quad R_x - T_2 \text{ sen } 79.1 = 0$ $\quad R_x = 11923 \text{ sen} 79.1$ $\quad \boxed{R_x = 11708 \text{ N}}$

$\sum F_y = 0$ $\quad R_y - P - T_1 - T_2 \cos 79.1 = 0$ $\quad R_y = 9810 + 981 + 11923 \cos 79.1$ $\quad \boxed{R_y = 13045 \text{ N}}$

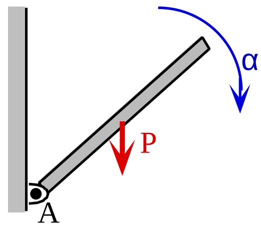
En este caso $R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2} = 17528$ N
y el ángulo que forma R con la pared es tg θ = Rx/Ry $\boxed{\theta = 41.9^\circ}$, por lo que ahora R no lleva la dirección de la barra. Si suponemos que solo actúan tres fuerzas, estas se tienen que cortar en un punto, tal como muestra la figura.



d) Utilizamos $\sum M_A = I\alpha$.

Con $\quad I = (1/3)\, m\, L^2 = (1/3)\, 100\, 5^2 = 833.3 \text{ kgm}^2$

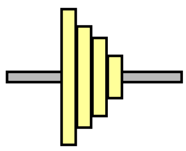
El único momento es el debido al peso de la barra $M_A = P\, 2.5 \text{ sen } 43$ por lo que despejando α



$$\alpha = \frac{100\ 9.81\ 2.5 \text{ sen } 43}{833.3} = \boxed{2.01 \text{ rad/s}^2}$$

---

3) Tenemos un conjunto de cuatro poleas unidas entre si que pueden girar entorno a un eje, tal como muestra la figura.

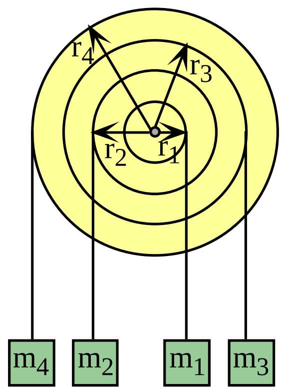


a) Determinar: el momento de inercia del conjunto. Considerar las poleas como discos uniformes.
Si de cada polea enrollamos cuerdas de las que penden masas, tal como muestra la figura,

b) Calcular el valor de la masa m_4 para que el sistema esté en equilibrio estático.

c) Si cortamos la cuerda que sujeta a la masa m_4, determinar las ecuaciones de la aceleración angular de las poleas α y de las tensiones de las cuerdas T_i (en función de las masas, los radios, g y el momento de inercia del conjunto de poleas). Posteriormente, usando dichas ecuaciones determinar los valores numéricos de α y de T_i.

d) Si todas las masas estaban inicialmente a 2 m del suelo antes de cortar la cuerda, al cortar la cuerda, que dos masas (de entre las cuatro) llegan primero al suelo, y con que diferencia de tiempos lo hacen.



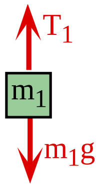
Datos: $\quad r_1 = 10$ cm, $m_{P1} = 2$ kg, $m_1 = 100$ kg
$r_2 = 20$ cm, $m_{P2} = 5$ kg, $m_2 = 50$ kg
$r_3 = 30$ cm, $m_{P3} = 10$ kg $m_3 = 40$ kg
$r_4 = 40$ cm, $m_{P4} = 20$ kg $m_4 = ????$

SOLUCION

a) El momento de inercia de un cilindro es $I = (1/2)mr^2$. En este caso tenemos 4 cilindros unidos y el momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia:

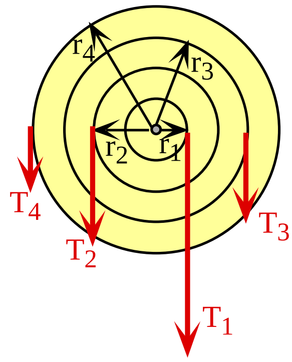
$$\boxed{I} = \sum Ii = (1/2)2\ (0.1)^2 + (1/2)5\ (0.2)^2 + (1/2)10\ (0.3)^2 + (1/2)20\ (0.4)^2 = \boxed{2.16\ \text{kg m}^2}$$

.



b) Si el conjunto esta en estado estático, las masas no se mueven, por lo que las tensiones de las cuerdas serán iguales a los pesos de las masas que cuelgan de ellas.

$$\sum F = 0 \qquad T_1 = m_1\ g,\ T_2 = m_2\ g,\ T_3 = m_3\ g \text{ y } T_4 = m_4\ g,$$



Estas tensiones, a su vez, actúan sobre las poleas originando momentos. La suma de todos los momentos tiene que ser cero, ya que las poleas no giran:

$$\sum M = 0 \qquad m_1gr_1 + m_3gr_3 - m_2gr_2 - m_4gr_4 = 0$$

$$\boxed{m_4 = (100\ 0.1 + 40\ 0.3 - 50\ 0.2)/0.3 = 30\ \text{kg}}$$

Hemos considerado positivos los momentos que tratan de girar las poleas en sentido horario y negativos los que tratan de girarlas en sentido antihorario.

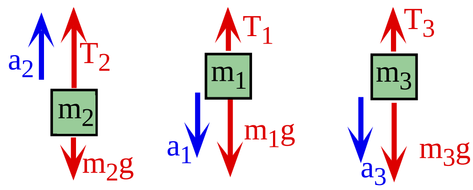
c) Al cortar la cuerda unida a la masa m_4 los momentos no se cancelan y el sistema empezara a girar con una aceleración angular α., mientras que las masas empezaran a desplazarse con una aceleración lineal $a_i = \alpha\ r_i$

Tenemos cuatro incógnitas: las tres tensiones y la aceleración angular α.. Por lo tanto tenemos que plantear cuatro ecuaciones, tres para las traslaciones de las masas y una para la rotación de la polea:

$$m_1g - T_1 = m_1a_1 \qquad T_1 = m_1g - m_1a_1 \qquad \boxed{T_1 = m_1(g - \alpha\ r_1)}$$

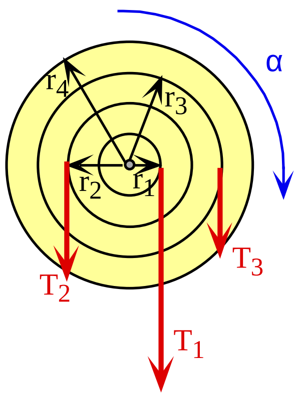
$$m_3g - T_3 = m_3a_3 \qquad T_3 = m_3g - m_3a_3 \qquad \boxed{T_3 = m_3(g - \alpha\ r_3)}$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2 \qquad T_2 = m_2g + m_2a_2 \qquad \boxed{T_2 = m_2(g + \alpha\ r_2)}$$



$$T_1r_1 + T_3r_3 - T_2r_2 = I\alpha$$

Substituyendo las tensiones en esta ecuación



$$m_1(g - \alpha\ r_1)\ r_1 + m_3(g - \alpha\ r_3)\ r_3 - m_2(g + \alpha\ r_2)r_2 = I\alpha$$

$$m_1g\ r_1 + m_3g\ r_3 - m_2g\ r_2 = I\alpha + m_1r_1^2\alpha + m_2r_2^2\alpha + m_3r_3^2\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{(m_1r_1 + m_3r_3 - m_2r_2)g}{I + m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2}}$$

sustituyendo los valores de I, las masas y los radios:

$$\alpha = \frac{(100\ 0.1 + 40\ 0.3 - 50\ 0.2)\ 9.81}{2.16 + 100\ 0.1^2 + 50\ 0.2^2 + 40\ 0.3^2} = 13.44 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones de las tensiones:

$T_1 = 100\ (9.81 - 13.44\ 0.1)$ $\quad T_1 = 846.6$ N

$T_3 = 40\ (9.81 - 13.44\ 0.3)$ $\quad T_3 = 231.1$ N

$T_2 = 50\ (9.81 + 13.44\ 0.2)$ $\quad T_2 = 624.9$ N

d) Las aceleraciones de las masas serán:

$a_1 = \alpha\ r_1 = 13.44\ 0.1 = 1.344 \text{ ms}^{-2}$

$a_2 = \alpha\ r_2 = 13.44\ 0.2 = 2.688 \text{ ms}^{-2}$ (ascendente)

$a_3 = \alpha\ r_3 = 13.44\ 0.3 = 4.032 \text{ ms}^{-2}$

$a_4 = g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ (caída libre)

Las masas que primero llegan al suelo son m_4 y después m_3.
El movimiento es uniformemente acelerado por lo que $e = v_0 t + (1/2)at^2$;
además como todas las masas parten del reposo, $v_0 = 0$ y el espacio a recorrer es $e = 2$metros

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

aplicándolo a m_4 y m_3:

$$t_4 = \sqrt{\frac{2\ 2}{9.81}} = 0.639 \text{ s}$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\ 2}{4.032}} = 0.996 \text{ s}$$

y la diferencia de tiempos es $t_3 - t_4 = 0.996 - 0.639 = 0.357$ s