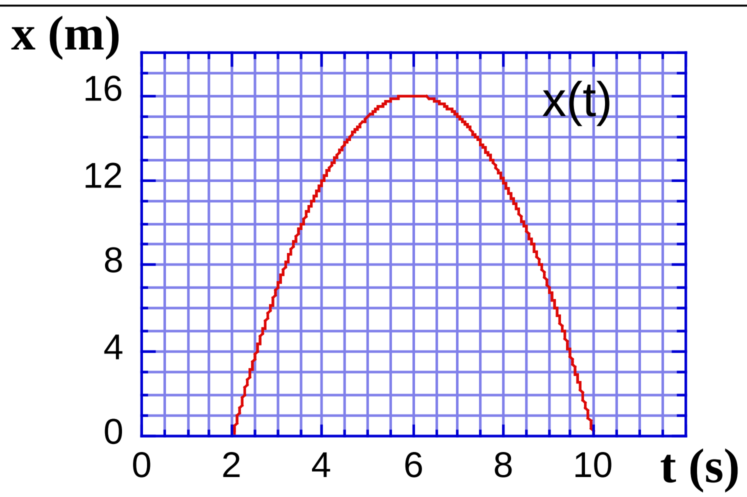
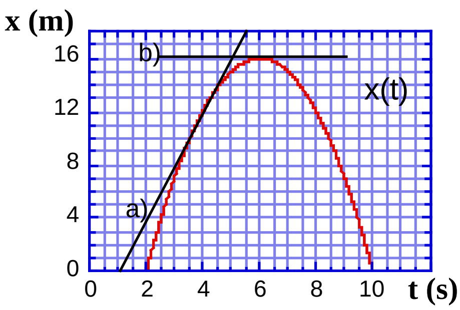
EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 9-2-2002 y 10-9-2002

CUESTIONES

1) Una partícula describe el movimiento unidimensional representado en la figura. **a)** Determinar gráficamente la velocidad instantánea para t = 4s. **b)** ¿En qué momento la velocidad instantánea se anula?. **c)**¿Cuál es la velocidad media en el intervalo entre 2 y 10 segundos?. Si la gráfica representa una parábola **d)** determinar las ecuaciones del movimiento x(t), v(t) y a(t) y representa gráficamente las dos últimas.



SOLUCION



a) La velocidad instantánea es la pendiente de la tangente a la curva x(t) en t = 4s

$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{18 - 0}{5.5 - 1} = \frac{18}{4.5} = 4\ \text{m/s}}$$

b) La velocidad instantánea se anula cuando la tg a la curva tiene pendiente nula, es decir para $\boxed{t = 6\ \text{s.}}$

c) La velocidad media se define como $$\boxed{v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{0 - 0}{10 - 2} = 0}$$

d) Cuando la variación de x con el tiempo es una parábola, el movimiento es uniformemente acelerado, por lo tanto sigue la ecuación general: $x = x_0 + v_0 t + 1/2\ at^2$

para determinar x_0, v_0 y a, (3 incógnitas) tenemos que plantear la ecuación general en 3 puntos diferentes de nuestra curva:

t = 2 s, x = 0 m	$0 = x_0 + v_0 2 + 1/2\ a2^2$	$0 = x_0 + 2v_0 + 2a$
t = 6 s, x = 16 m	$16 = x_0 + v_0 6 + 1/2\ a6^2$	$16 = x_0 + 6v_0 + 18a$
t = 10 s, x = 0 m	$0 = x_0 + v_0 10 + 1/2\ a10^2$	$10 = x_0 + 10v_0 + 50a$

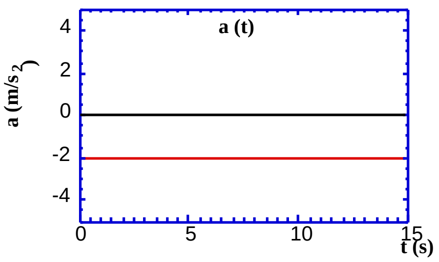
Resolviendo el sistema, se encuentra que: $a = -2\ \text{m/s}^2$, $v_0 = 12$ m/s y $x_0 = -20$ m por lo que la ecuaciones que nos piden son:

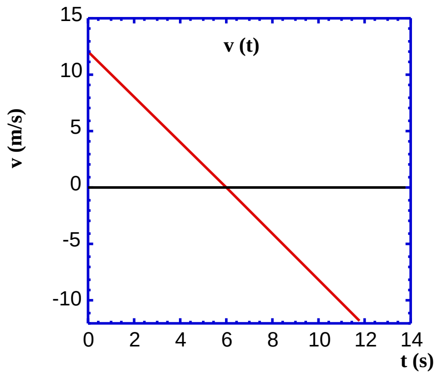
$$\boxed{x = -20 + 12t - t^2 \ \text{(m)}} \qquad (1)$$

$$v = dx/dt \qquad \boxed{v = 12 - 2t \qquad \text{(m/s)}}$$

$$a = dv/dt \qquad \boxed{a = -2 \qquad \text{(m/s}^2\text{)}}$$

y las gráficas:





Otra forma de encontrar la ecuación x(t) es partiendo del hecho de que es una parábola negativa con ceros en t = 2s y t = 10s, por lo que la curva se puede escribir como x = -K (t-2) (t-10). Para encontrar la constante K damos valores para el punto t = 6 s, x = 16 m: 16 = -K (6 - 2) (6 - 10) K = 1. Sustituyendo este valor de K en la ecuación anterior, se llega a la ecuación (1).

Finalmente, de forma análoga, como la parábola está centrada en t = 6 s y el máximo en x = 16 m, se podría escribir $x = -K(t-6)^2 + 16$. Para encontrar la constante K damos valores para el punto t = 2 s, x = 0 m: $0 = -K(2-6)^2 + 16$ K = 1, y de nuevo llegamos a la ecuación (1).

---

2) Una nave espacial viaja de la Tierra a un asteroide situado a una distancia de 5 años luz (distancia propia, medida por un observador en la Tierra). Si el tiempo empleado en llegar al asteroide medido por un reloj en la propia nave es de 1 año, **a)** ¿A que velocidad viaja la nave? **b)** Cuál es le tiempo transcurrido para un observador terrestre? $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$

SOLUCION

a) Visto por un observador terrestre, la nave recorre una longitud (que es propia) L´= 5 c

Para este mismo observador, el tiempo que tarda en recorrerla, es un tiempo no propio, y estará relacionado con el tiempo medido en la nave de la forma: t = γ t´ (t´= 1 año)

La velocidad que lleva la nave será el espacio dividido por el tiempo:

$$v = \frac{L'}{t} = \frac{L'}{\gamma t'} = \frac{5c}{\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}1} = 5c\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \qquad v^2 = 25c^2\left[1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = 25c^2 - 25v^2$$

$$26v^2 = 25c^2 \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{25}{26}}\,c} \qquad \boxed{v = 0.9806\ c}$$

b) Como ya hemos señalado en el apartado anterior, $t = \gamma\, t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{25}{26}\right)^2}}\ 1$ $\boxed{t = 5.099 \text{ años}}$

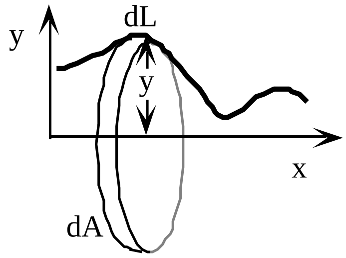
---

3) Enunciar y demostrar los teoremas de Pappus-Guldin. Poner un ejemplo de aplicación para cada uno.

SOLUCION

Permiten calcular centros de masas de curvas y superficies planas.

a) El área de una superficie de revolución (A) es igual a la longitud de la curva generatriz (L) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas de la curva cuando se engendra la superficie. Nota: la curva no puede cortar al eje de giro.

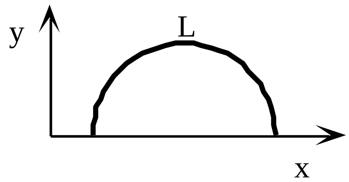


El dA generado por un dl al girar es: $dA = 2\pi y\, dL$; integrando para toda la longitud: $A = \int 2\pi y\, dL = 2\pi \int y\, dL$.

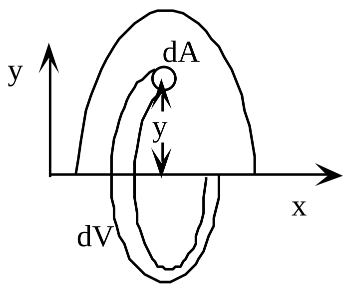
Por definición $y_G = \dfrac{\int y dL}{L}$ por lo que $\boxed{A = 2\pi\, y_G\, L}$

Ejemplo: alambre semicircular,

$L = 1/2\,(2\pi R) = \pi R$ y $A = 4\pi R^2$ $\qquad y_G = \dfrac{A}{2\pi L} = \dfrac{4\pi R^2}{2\pi\pi R} = \boxed{\dfrac{2R}{\pi}}$



b) El volumen de un cuerpo de revolución (V) es igual al área generatriz (A) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el volumen.
Nota: el área no puede cortar al eje de giro.

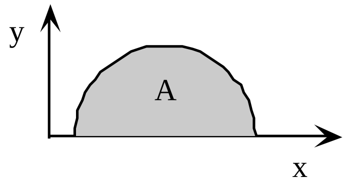


El dV generado por un da al girar es : $dV = 2\pi y\, dA$, integrando para todo el área: $V = \int 2\pi y\, dA = 2\pi \int y\, dA$.

Por definición $y_G = \dfrac{\int y dA}{A}$ por lo que $\boxed{V = 2\pi\, y_G\, A}$

Ejemplo: Placa semicircular,

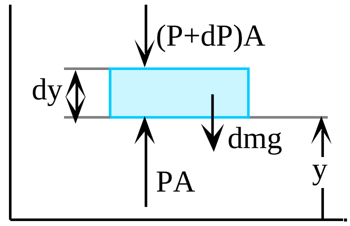
$A = 1/2\,(\pi R^2)$ y $V = 4/3\,\pi R^3$ $\qquad y_G = \dfrac{V}{2\pi A} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi\, \frac{1}{2}\pi R^2} = \boxed{\dfrac{4R}{3\pi}}$



4) Explicar y deducir la Ecuación Fundamental de la Estática de Fluidos a partir de las leyes de Newton.

SOLUCION

Si tenemos un fluido que está en reposo, las fuerzas que se ejercen sobre un elemento cualquiera de dicho fluido, deben de ser cero. Consideramos un elemento imaginario en forma de disco, con sus dos caras paralelas de superficie A perpendiculares a la dirección vertical, y un grosor dy. Sobre este elemento actúa la fuerza de la gravedad, como no se mueve, tiene que haber una fuerza que compense al peso. Esta fuerza solo puede estar originada por las diferencias de presión entre la parte inferior y superior del disco.
El peso del disco es: $dmg = \rho dVg = \rho Adyg$

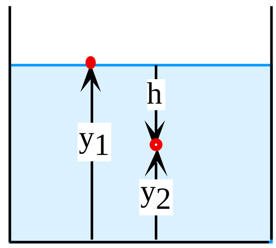


Si suponemos que a una altura y la presión es P y a una altura y+dy la presión es P+dP, las fuerzas que se ejercen sobre el disco son las mostradas en la figura.

Como $\sum Fy = 0$ $\quad PA - (P + dP)A - \rho Adyg = 0 \quad dP = -\rho gdy = 0$ $\quad \boxed{\dfrac{dp}{dy} = -\rho g}$

Esta es la ecuación fundamental de la hidrostática en su forma diferencial. El signo – indica que la presión disminuye al aumentar y o lo que es lo mismo, al aumentar la altura. Para calcular variaciones de presión dentro del fluido, tenemos que integrar entre dos puntos. Si consideramos el punto 1 (y_1) en la superficie libre y el punto 2 (y_2) a una profundidad h, la relación entre las presiones será:

$$dP = -\rho gdy = 0 \qquad \int_1^2 dP = -\int_1^2 \rho\, gdy \qquad P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \qquad P_2 = P_1 - \rho g(y_2 - y_1)$$



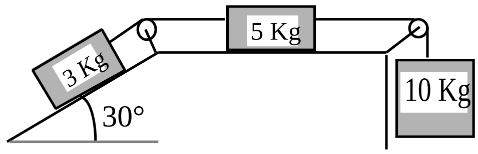
Si definimos la profundidad h como $h = -\Delta y = -(y_2 - y_1)$ la ecuación anterior se transforma en

$$\boxed{P_2 = P_1 + \rho gh}$$

PROBLEMAS

---

1) Los tres bloques de la figura están conectados por medio de cuerdas ligeras que pasan por poleas de masa despreciable. La aceleración del sistema es de 2 m/seg^2 y las superficies son rugosas.

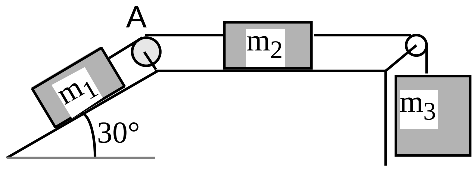


a) Representar las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques

b) Calcular las tensiones de las cuerdas.

c) Calcular el coeficiente de rozamiento entre los bloques y la superficie (suponiendo μ igual para los dos bloques)

Si tenemos un sistema similar pero ahora suponemos que la polea A es un cilindro uniforme de masa mp que gira acoplado con la cuerda:

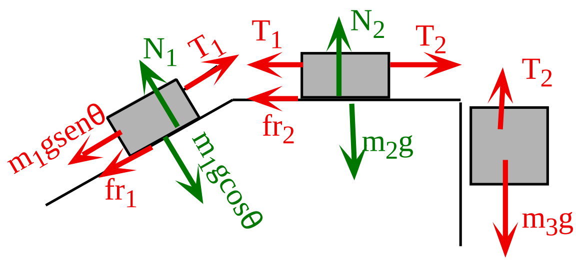


d) Determinar la aceleración del sistema en función de las masas de los cuerpos (m_1, m_2, m_3), la masa de la polea (mp), el coeficiente de rozamiento(μ) y la gravedad(g).

e) Utilizando el valor del coeficiente de rozamiento calculado en el apartado c), masas para los cuerpos iguales a las del apartado anterior (m_1 = 3 kg, m_2 = 5 kg y m_3 = 10 kg) y masa de la polea mp = 10 kg, determinar numéricamente la aceleración del sistema y las tensiones en las cuerdas.

SOLUCION

a) Las fuerzas que actúan sobre los diferentes cuerpos son:



b y c) Aplicamos la 2ª ley de Newton (∑**F** =m**a**) a cada uno de los cuerpos. Primero lo aplicamos al cuerpo 1 y al cuerpo 2 en la dirección perpendicular a la superficie, en la cual la a = 0

$$N_1 - m_1 g \cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = m_1 g \cos\theta \quad \rightarrow \quad fr_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos\theta$$
$$N_2 - m_2 g = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = m_2 g \quad \rightarrow \quad fr_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$$

A continuación aplicamos la segunda ley en la dirección del movimiento:

(1.1) $T_1 - m_1 g \,\text{sen}\theta - fr_1 = m_1 a$

(1.2) $T_2 - T_1 - fr_2 = m_2 a$

(1.3) $m_3 g - T_2 = m_3 a$ $\qquad \boxed{T_2 = m_3(g - a) = 10\,(9.81 - 2) = 78.1 \text{ N}}$

En la ecuación (1.1) despejamos T_1:

(1.4) $T_1 = m_1 a + m_1 g \,\text{sen}\theta + fr_1$

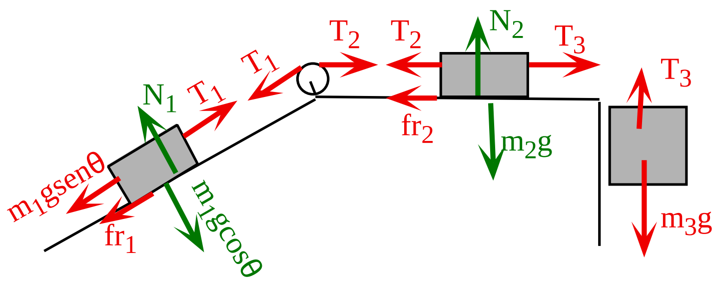
y lo sustituimos en el ecuación (1.2) :

$T_2 - m_1 a - m_1 g \,\text{sen}\theta - fr_1 - fr_2 = m_2 a$ $\qquad 78.1 - 3\cdot 2 - 3\cdot 9.81 \,\text{sen}30 - \mu\, 3\cdot 9.81 \cos 30 - \mu 5\cdot 9.81 = 5\cdot 2$

$78.1 - 6 - 14.715 - \mu\, 25.487 - \mu\, 49.05 = 10 \qquad 47.385 = \mu\,(25.487 + 49.05) \qquad \boxed{\mu = 0.6357}$

Con este valor de μ utilizamos (1.4) para calcular T_1: $T_1 = 3\cdot 2 + 3\cdot 9.81 \mathrm{sen}30 + 0.637\cdot 3\cdot 9.81\cos 30 = 36.95\ \mathrm{N}$

d) Las fuerzas que intervienen directamente en el movimiento son las representadas en rojo. La única diferencia respecto a los apartados anteriores radica en que la tensión de la cuerda es diferente a ambos lados de la polea, ya que la polea sufre una aceleración angular.



Podemos plantear tres ecuaciones para las traslaciones de las masas ($\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$) y una ecuación para el giro de la polea ($\sum M = I\alpha$).

Si el radio de la polea es R, el momento de la tensión será T·R; como actúan dos tensiones opuestas

$(T_2 - T_1)\, R = I\alpha$ pero como $\alpha = a/R$, e $I = 1/2\ M_p R^2$, la ecuación anterior se transforma en:

$(T_2 - T_1)\, R = 1/2\ M_p R^2\, a/R \qquad (T_2 - T_1) = 1/2\ M_p\, a$

Escribiendo las tres ecuaciones de la traslación mas la que acabamos de encontrar para la rotación:

(1.5) $T_1 - m_1 g\, \mathrm{sen}\theta - fr_1 = m_1 a$

(1.6) $T_3 - T_2 - fr_2 = m_2 a$

(1.7) $m_3 g - T_3 = m_3 a$

(1.8) $T_2 - T_1 = 1/2\ M_p\, a$

sumamos las 4 ecuaciones, las T se van en el 1º miembro mientras que en el 2ª sacamos factor común a la aceleración

$- m_1 g\, \mathrm{sen}\theta - fr_1 - fr_2 + m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3 + 1/2\ M_p)\, a$

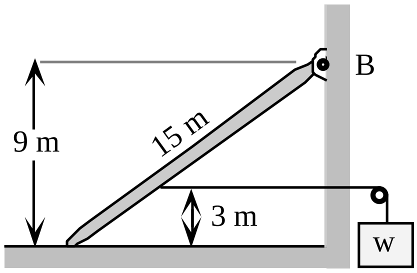
$$a = \frac{[m_3 - m_1\mathrm{sen}\theta - \mu m_1\cos\theta - \mu m_2]\, g}{m_1 + m_2 + m_3 + (1/2)M_p} = \frac{[10 - 3\mathrm{sen}30 - 0.6357\,(3\cos 30 + 5)]\ 9.81}{3 + 5 + 10 + (1/2)10} \qquad \boxed{a = 1.565\ \mathrm{m/s^2}}$$

De la ecuación (1.5) $T_1 = m_1 a + m_1 g\, \mathrm{sen}\theta + fr_1 = 3 * 1.564 + 3\cdot 9.81\ \mathrm{sen}30 + 0.6357\cdot 9.81\cos 30 = 35.61\ \mathrm{N}$

De la ecuación (1.7) $T_3 = m_3(g - a) = 10\,(9.81 - 1.565) = 82.45\ \mathrm{N}$

e la ecuación (1.8) $T_2 = T_1 + 1/2\ M_p\, a = 35.61 + (1/2)\, 10\cdot 1.565 = 43.435\ \mathrm{N}$

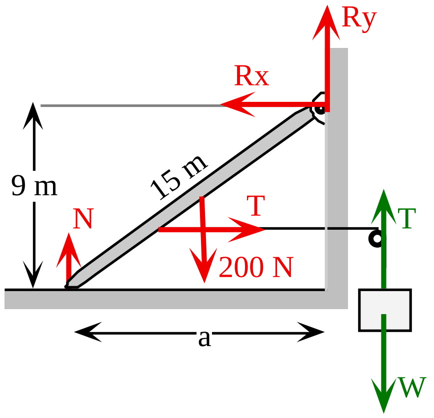
2) Un extremo de una barra de 15 m de longitud y 200 N de peso descansa sobre un piso liso. En el otro extremo tiene una bisagra en la pared a 9 m por encima del suelo. La tensión de la cuerda horizontal se puede ajustar cambiando el contrapeso W.



a) Representar las fuerzas que actúan sobre la varilla.
b) Determinar el valor de dichas en función de W.
c) ¿Existe algún valor de W para el que la reacción en B sea perpendicular a la pared?
d) Calcula el valor de estas fuerzas para W = 400 N
e) ¿Existe algún valor de W para que la reacción en B este dirigida a lo largo de la barra?
f) Si de repente hacemos desaparecer el suelo, ¿Cuál sería la aceleración angular inicial de la barra para W = 400 N ? ($I = 1/3\ mL^2$)

SOLUCION

a) Las fuerzas que actúan sobre la barra están representadas en rojo



b) Primero determinamos la longitud del lado inferior (a) del triangulo rectángulo formado por la barra, el suelo y la pared. Por Pitágoras, $a = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ m. Además sabemos que como el contrapeso está en reposo, la tensión de la cuerda T = W.
Para calcular el sumatorio de momentos respecto al eje, recordamos que la mínima distancia de la recta soporte de la tensión al eje es de 6 m , y que la mínima distancia del peso de la barra al eje es también de 6 m.

(2.1) $\sum M = 0$ $\quad N\,12 - T\,6 - 200 \cdot 6 = 0 \quad N = (1200 + 6T)/12 = 100 + T/2 \quad \boxed{N = 100 + W/2}$

(2.2) $\sum Fx = 0$ $\quad T - Rx = 0 \quad \boxed{Rx = T = W}$

(2.3) $\sum Fy = 0$ $\quad Ry + N - 200 = 0 \quad Ry = 200 - N = 200 - 100 - W/2 \quad \boxed{Ry = 100 - W/2}$

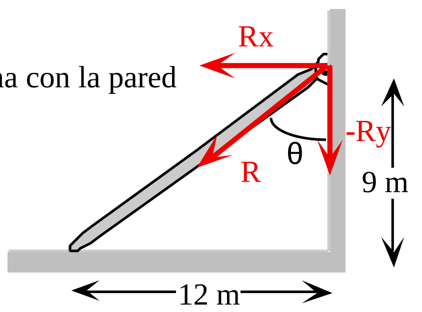
c) Si la reacción es perpendicular a la pared, Ry = 0 $\quad 100 - W/2 = 0 \quad \boxed{W = 200\ N}$

d) Solo tenemos que sustituir en las ecuaciones del apartado b el valor W = 400 N:

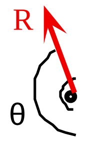
$$\boxed{\begin{array}{l} N = 100 + W/2 = 100 + 400/2 = 300\ N \\ Rx = W = 400\ N \\ Ry = 100 - W/2 = 100 - 400/2 = -100\ N \end{array}}$$

e) Si la reacción estuviera dirigida a lo largo de la barra, el ángulo que forma con la pared θ seria el mismo que forma la barra, por lo tanto $tg\theta = \dfrac{Rx}{-Ry} = \dfrac{12}{9}$

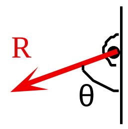
$$\frac{W}{W/2 - 100} = \frac{12}{9} \qquad 9W = 6W - 1200 \qquad W = -400\ N$$



lo cual no tiene ningún sentido, ya que el contrapeso siempre tiene que tener algún valor positivo.
Nota: en la tg, escribimos –Ry para tener un valor positivo, ya que si la reacción estuviese dirigida a lo largo de la barra Ry tendría un valor negativo.



Si nos fijamos en la dirección de la reacción en el eje **R**, para valores de W pequeños, R apunta hacia arriba y si $W \to 0$ $\theta \to 180°$ (ver figura)



Al crecer W, Rx crece y Ry se vuelve negativo, la reacción apunta hacia abajo. Cuanto mayor es W, mas pequeño es θ: $\theta = \text{arctg}\left(\frac{Rx}{-Ry}\right) = \text{arctg}\left(\frac{W}{W/2 - 100}\right)$
En el límite, para $W \to \infty$, θ = arcotg (2) θ = 63.43°. Este ángulo nunca llega a ser el ángulo que forma la barra con la pared, α = arcotg (12/9) = 53°, por lo que no existe ningún W para el cual los dos ángulos coincidan, o lo que es lo mismo, para que R este dirigido a lo largo de la barra.

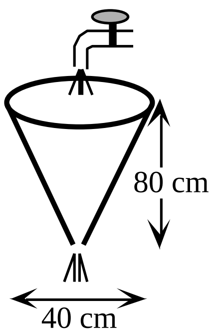
f) Utilizamos $\sum M = I\alpha$. Es la ecuación (2.1) en la que desaparece el momento de la normal en el primer miembro y aparece Iα en el segundo $-T\,6 - 200 \cdot 6 = I\alpha$

sabemos que: $T = W = 400$ N
$I = (1/3)\, m\, L^2 = (1/3)\,(200/9.81)\, 15^2 = 1529$ kgm^2

sustituyendo $$\boxed{\alpha = \frac{-400\ 6\ -\ 200\ 6}{1529} = -2.35 \text{ rad/s}^2}$$

---

3) Un recipiente en forma cónica tiene una altura de 80 cm y un diámetro en la base de 40 cm. En su vértice hay practicado un orificio de 2 mm de diámetro. Por la parte superior del depósito hay un grifo de 1 cm^2 de sección por el que sale agua a una velocidad de 10 cm/s.. **a)** Determinar el caudal del grifo. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenar un recipiente de 2 litros.
b) Calcular la altura máxima alcanzada por el agua en el depósito. ¿qué aproximación tienes que realizar?
Si una vez alcanzada dicha altura simultáneamente se cierra el grifo y se tapona el deposito por su parte inferior, dejando pasar un tiempo para que el agua se quede en reposo
c) Determinar la presión manométrica en el fondo del recipiente en pascales y en atmósferas. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre el tapón?
Si quitamos el tapón,
d) Calcular el tiempo que tarda en vaciarse. ¿Qué aproximaciones tienes que realizar?



SOLUCION
En este problema utilizaremos el sistema cgs, excepto en el apartado c) donde será mas sencillo utilizar el internacional.

a) El caudal se define como el producto de la sección de la cañería (A) por la velocidad del fluido (v):

$$\boxed{C = A\,v = 1 \cdot 10 = 10 \text{ cm}^3/\text{s}}$$

Cada litro tiene 10^3 cm^3, por lo que un volumen de 2 litros equivale a $2\cdot10^3$ cm^3. Como V = C t

$$\boxed{t = \frac{V}{C} = \frac{2\ 10^3}{10} = 200\ \text{s}}$$

b) Cuando la sección del deposito es mucho mayor que la del orificio, podemos suponer que la velocidad de la superficie libre es 0. Además, si el deposito esta abierto en su parte superior, la velocidad de salida nos queda $v = \sqrt{2gh}$ (teorema de Torricelli) siendo h la altura de la superficie libre.

Cuando el agua alcanza su máxima altura, el caudal de entrada es igual al de salida

$$C = \sqrt{2gH}\ A_{salida} \qquad 10 = \sqrt{2\ 981\ H}\ \pi\, 0.1^2 \qquad \boxed{H = 51.64\ \text{cm}}$$

c) Por definición: $\boxed{P_{mano.} = \rho g h = 10^3\cdot 9.81\cdot 0.5164 = 5066\ \text{Pascales}}$

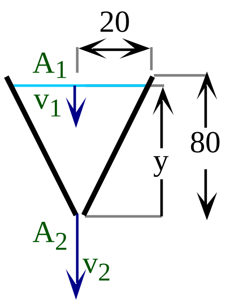
Para pasar a atmósferas, dividimos por $1.013\ 10^5$ $\qquad \boxed{P_{mano.} = 0.050\ \text{atm.}}$

La fuerza sobre el tapón debida al agua es igual al producto de la presión manométrica por la superficie del mismo:

$$\boxed{F = P\ A = 5066\cdot\pi\cdot(0.001)^2 = 0.0159\ \text{N}}$$

d) De nuevo suponemos que la sección del recipiente es mucho mayor que la sección del orificio de salida para poder aplicar Torricelli y poder calcular la velocidad de salida $v_2 = \sqrt{2gy}$.

Por la ecuación de continuidad: $\qquad A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad v_1 = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gy} \qquad$ (3.1)



Por otra parte, como v_1 lleva sentido contrario a y $\qquad v_1 = -\,dy/dt \qquad$ (3.2)

Igualando las ecuaciones 3.1 y 3.2: $\quad -\frac{dy}{dt} = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gy} \qquad dt = -\frac{dy}{\sqrt{2gy}}\frac{A_1}{A_2} \quad$ (3.3)

A_2 es constante, mientras que A_1 depende de y. Como el área es circular, fijándonos en las dimensiones del recipiente:

$$\frac{r_1}{y} = \frac{20}{80} \qquad r_1 = \frac{1}{4}y \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{\frac{1}{16}y^2}{(0.1)^2} = \frac{y^2}{0.16}$$

Sustituimos en la ecuación 3.3 e integramos:

$$\int_0^t dt = \int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{2gy}}\frac{y^2}{0.16} \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2\ 981}\ 0.16}\int_H^0 y^{3/2}dy = 0.141\left[\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^{51.64} = 0.142\ \frac{2}{5}\ 51.64^{5/2}$$

$$\boxed{t = 1082\ \text{s}}$$