



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA**  
**ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA**



# **VARIACIÓN DE** **VELOCIDAD EN** **MOTORES** **ASÍNCRONOS**

**Miguel Angel Rodríguez Pozueta**

**Doctor Ingeniero Industrial**

En este documento las referencias a páginas, figuras, ecuaciones, tablas, notas al pie, citas bibliográficas y sitios web en el texto actúan como *hipervínculos*. Al hacer clic en ellas se accede al elemento a que se refieren.

Este documento está diseñado para que se obtenga un texto impreso bien organizado si decide ahorrar papel imprimiéndolo a tamaño reducido, de forma que se incluyan dos páginas por cada hoja de papel A4 apaisado.

© 2017, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

*This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.*



*Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.*

*Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor:*  
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

# ÍNDICE

# ÍNDICE

## **VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS**

|   |    |
|---|----|
| Presentación .....  | 1  |
| Clasificación de los métodos para variar la velocidad en los motores asíncronos ..... | 1  |
| Variación de la velocidad modificando el número de polos.....                         | 3  |
| Devanados independientes con distintos números de polos.....                          | 4  |
| Conexión Dahlander.....   | 5  |
| Modulación de la amplitud polar (PAM).....  | 11 |
| Variación de la velocidad modificando la frecuencia del estator.....                  | 19 |
| Fundamentos. Regiones de par constante y de campo debilitado....                      | 19 |
| Convertidor o variador de frecuencia .....  | 20 |
| Control en lazo abierto y en lazo cerrado de velocidad .....                          | 24 |
| Variación de la velocidad modificando el deslizamiento.....                           | 26 |
| Actuando sobre la tensión del estator.....  | 26 |
| Mediante resistencias en serie con el rotor.....                                      | 27 |
| Mediante la inyección de una f.e.m. al rotor.....                                     | 27 |
| Bibliografía .....  | 29 |

## ANEXOS

|   |    |
|---|----|
| ANEXO A: Parámetros de un motor Dahlander.....  | 31 |
| ANEXO B: Ejemplo de cálculo de varios sistemas de variación de la velocidad de un motor trifásico Dahlander ..... | 33 |
| ANEXO C: Ejemplo de cálculo de varios sistemas de variación de la velocidad de un motor de anillos.....           | 39 |

## **VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS**

**Miguel Angel Rodríguez Pozueta**

### **PRESENTACIÓN**

Este texto muestra los principios en los que se basa la variación de la velocidad en los motores asíncronos y está pensado como introducción para un curso posterior de accionamientos eléctricos donde se analizará este tema más extensamente y con más profundidad.

Se supone que el lector ya posee unos conocimientos previos de los fundamentos de las máquinas eléctricas y del comportamiento de las máquinas asíncronas o de inducción (ver mis textos [21], [22] y [23]).

Cuando un motor cambia de velocidad pasa de un estado permanente con una velocidad dada a otro nuevo estado permanente con una velocidad distinta. En la transición entre estos dos estados la máquina está acelerando, si la nueva velocidad es mayor que la antigua, o decelerando, si la velocidad se reduce (lo cual se trata de un proceso de frenado que se estudia con más detalle en mi texto [26]).

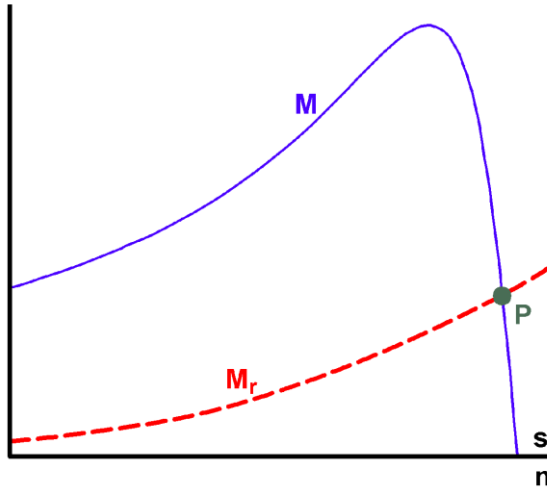
Por lo tanto, esta transición hasta alcanzar la nueva velocidad constituye un proceso transitorio cuyo estudio exacto requiere de métodos de análisis -como la máquina generalizada o los fasores espaciales- que se salen fuera de los límites de este texto. Aquí sobre todo se estudiará cómo conseguir un nuevo estado permanente con la velocidad deseada y sólo se prestará una atención secundaria al proceso de paso de una velocidad a la otra, el cual se estudiará de forma aproximada mediante la ecuación que calcula el par en los regímenes permanentes.

Es preciso indicar que, aunque aquí no se estudien, hoy en día los métodos de análisis de los regímenes transitorios de las máquinas eléctricas y los avances en la electrónica de potencia y en los microprocesadores han permitido desarrollar sistemas de control de velocidad avanzados -como son los de control por orientación del campo o de control directo del par- que consiguen una variación rápida y precisa de la velocidad en los accionamientos donde se emplean estos motores.

### **CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS PARA LA VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN LOS MOTORES ASÍNCRONOS**

Cuando un motor asíncrono mueve una carga mecánica en régimen permanente la velocidad se mantiene constante, lo que significa que hay un equilibrio entre el par motor  $M$  proporcionado por la máquina asíncrona y el par resistente  $M_r$  de la carga. En consecuencia, el sistema motor-carga permanece en un *punto de funcionamiento* en el que se verifica la siguiente igualdad:

$$\text{Punto de funcionamiento: } M = M_r \quad (1)$$



*Fig. 1: Punto de funcionamiento P del sistema formado por un motor de inducción, que proporciona el par  $M$ , y de una carga mecánica, cuyo par resistente es  $M_r$*

En la Fig. 1 se han representado sobre los mismos ejes de coordenadas las curvas par-velocidad del motor y de la carga. El punto de funcionamiento del sistema (P en la Fig. 1) será el punto de corte de ambas curvas y el sistema girará a la velocidad correspondiente a dicho punto.

De lo anterior se deduce que si se desea modificar la velocidad de este sistema motor-carga, lo que hay que hacer es cambiar su punto de funcionamiento de forma que se produzca a la velocidad buscada. Para ello se puede actuar sobre la curva del par motor o sobre la curva del par resistente (por ejemplo, cerrando parcialmente la válvula de entrada de agua cuando la carga mecánica es una bomba). Aquí se van a estudiar los sistemas que permiten actuar sobre el par motor para conseguir la velocidad deseada.

Al igual que en el resto de mis textos, una velocidad de giro se va a representar mediante la letra  $n$  si está medida en revoluciones por minuto (r.p.m.) y mediante la letra  $\Omega$  si se mide en radianes por segundo (rad/s).

En un motor asíncrono trifásico el campo magnético en el entrehierro gira a una velocidad de  $n_1$  r.p.m. o  $\Omega_1$  rad/s que se denomina *velocidad síncrona* o *velocidad de sincronismo*:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \quad \Omega_1 = \frac{2\pi f_1}{p} \quad (2)$$

En las expresiones anteriores  $f_1$  es la frecuencia de las corrientes que circulan por el estator y  $p$  es el número de pares de polos del motor asíncrono.

La velocidad  $n$  (en r.p.m.) o  $\Omega$  (en rad/s) a la que gira el motor es distinta de la velocidad de sincronismo y se define la magnitud adimensional *deslizamiento*  $s$  mediante esta relación:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (3)$$

Combinando las expresiones (2) y (3) se obtiene que:

$$n = n_1 (1 - s)$$

$$\Omega = \Omega_1 (1 - s)$$

$$n = n_1 (1 - s) = \frac{60 f_1}{p} (1 - s) \quad (4)$$

Esta relación indica que se puede regular la velocidad de un motor asíncrono modificando su número de polos ( $2p$ ), la frecuencia de las corrientes del estator ( $f_1$ ) o el deslizamiento ( $s$ ). Esto da lugar a los diferentes sistemas de variación de la velocidad que se van a analizar seguidamente y que se resumen en la Fig. 2.

**Variación de velocidad**

$$n = n_1 (1 - s) = \frac{60 f_1}{p} (1 - s)$$

Hay tres métodos básicos de variar la velocidad de un motor asíncrono, cada uno de los cuáles se subdivide en otros varios:

- 1. Modificación del número de polos  $2p$**  (*sólo máquinas de jaula de ardilla*).
  - a. Devanados independientes con distintos números de polos.
  - b. Conexión Dahlander.
  - c. Modulación de la amplitud polar (PAM).
- 2. Modificación de la frecuencia  $f_1$  del estator.**
  - a. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión.
  - b. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente.
- 3. Modificación del deslizamiento  $s$** 
  - a. Mediante la tensión  $V_1$  del estator.
  - b. Mediante resistencias en serie con el rotor.
  - c. Por inyección de una f.e.m. al rotor.

} *Sólo máquinas de rotor bobinado*

*Fig. 2: Resumen de los sistemas de variación de velocidad en un motor asíncrono*

### VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD MODIFICANDO EL NÚMERO DE POLOS

El cambio del número de polos no permite ajustar la velocidad  $n$  del motor de forma exacta, ya que lo que se modifica es la velocidad de sincronismo  $n_1$  (ver la relación (2)) y no se controla el deslizamiento  $s$  (ver la relación (4)).

La variación de velocidad cambiando el número de polos únicamente permite alcanzar unos pocos valores (hasta cuatro) de velocidad de sincronismo diferentes, ya que el número de pares de polos  $p$  sólo puede adoptar valores enteros y, en consecuencia, no se puede variar de forma continua.

Los devanados del estator y del rotor de un motor asíncrono deben tener el mismo número de polos. Por lo tanto, estos métodos exigen modificar el número de polos en ambos devanados.

En una jaula de ardilla las corrientes en las barras se originan por inducción electromagnética y dan lugar a un campo magnético del mismo número de polos que el que actúa sobre ella. Es decir, un rotor de jaula de ardilla adapta automáticamente su número de polos al del estator y, de esta manera, ambos devanados siempre tienen el mismo número de polos. Por lo tanto, los motores con modificación del número de polos son siempre de jaula de ardilla y en ellos basta con cambiar el número de polos del devanado del estator.

El cambio del número de polos no se utiliza en los motores de rotor devanado porque esto exigiría que el devanado del rotor también tuviera que conmutar su número de polos y complicaría enormemente el diseño y el manejo de estos motores.

Así pues, los motores asíncronos en los que se puede modificar el número de polos son máquinas de jaula de ardilla cuyo estator dispone, bien de dos devanados trifásicos independientes, cada uno de ellos con un número de polos distinto; o bien de un sólo devanado trifásico con un diseño especial que admite diferentes formas de conexión para modificar su número de polos.

En el arranque de estos motores se aprovecha el que se puede variar su velocidad y se hace siempre de forma gradual, iniciando el arranque a la velocidad más baja para luego conmutar progresivamente a las velocidades más altas. De esta manera, el arranque es más suave y da lugar a un menor calentamiento del motor (para más detalles puede consultar mi texto [27]).

### **Devanados independientes con distintos números de polos**

Este método consiste en emplear devanados independientes en el estator, con diferentes números de polos y energizar solamente uno cada vez.

Por necesidades constructivas, el uso de devanados independientes con distintos números de polos sólo admite un máximo de dos devanados independientes.

Constructivamente los devanados van alojados en las mismas ranuras, ocupando cada uno la mitad de las mismas. Mediante un conmutador se conecta un devanado a la red, al mismo tiempo que se desconecta el otro, con lo cual en el devanado desconectado no se circula ninguna corriente por tener su circuito abierto.

Con dos bobinados independientes se desaprovecha tanto el hierro como el cobre debido a que al mismo tiempo solamente se utiliza media ranura. De esto resulta que estos motores son de bajo rendimiento, mayor tamaño y alto coste. Por esta razón, siempre que sea posible se prefiere utilizar un único devanado que sea capaz de proporcionar dos velocidades diferentes antes que dos devanados separados.

Si en cada uno de estos devanados se usa la conexión Dahlander o la PAM (que se estudian en los siguientes apartados), como mucho se pueden llegar a conseguir hasta cuatro velocidades de sincronismo diferentes (ya que cada uno de los dos devanados independientes podría proporcionar a su vez dos velocidades de sincronismo).



**Conexión Dahlander**

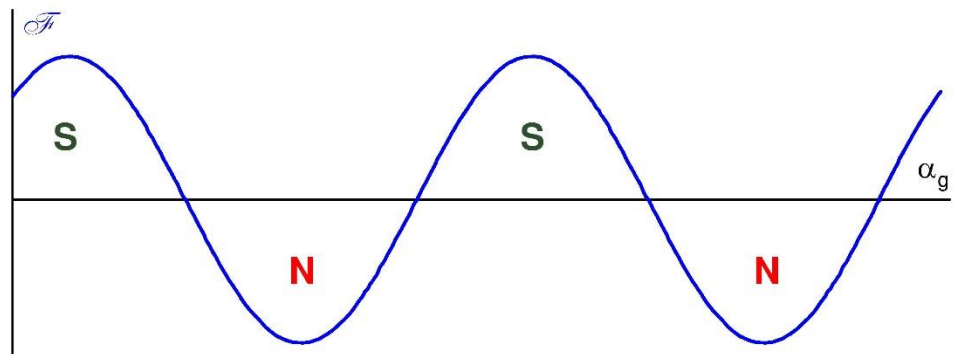
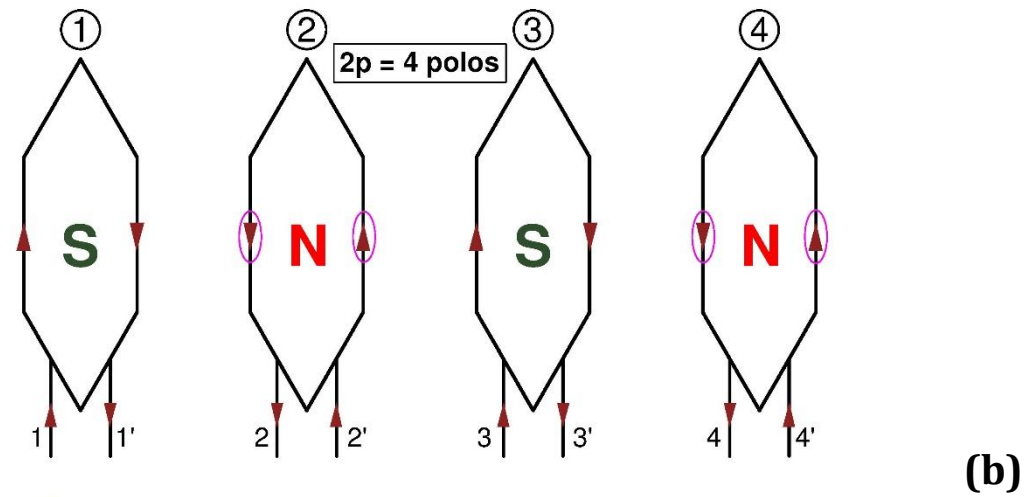
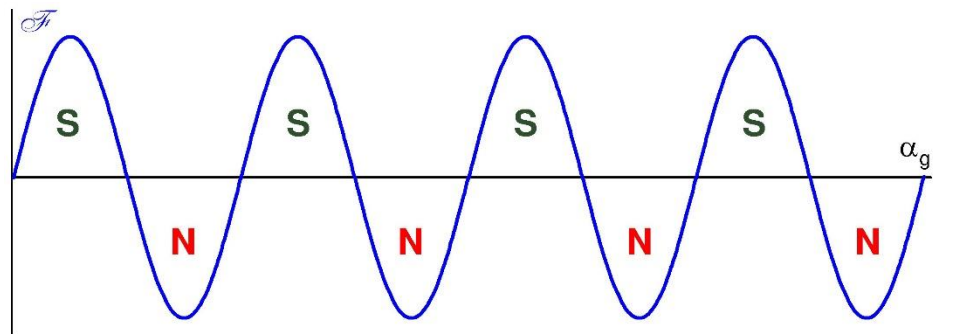
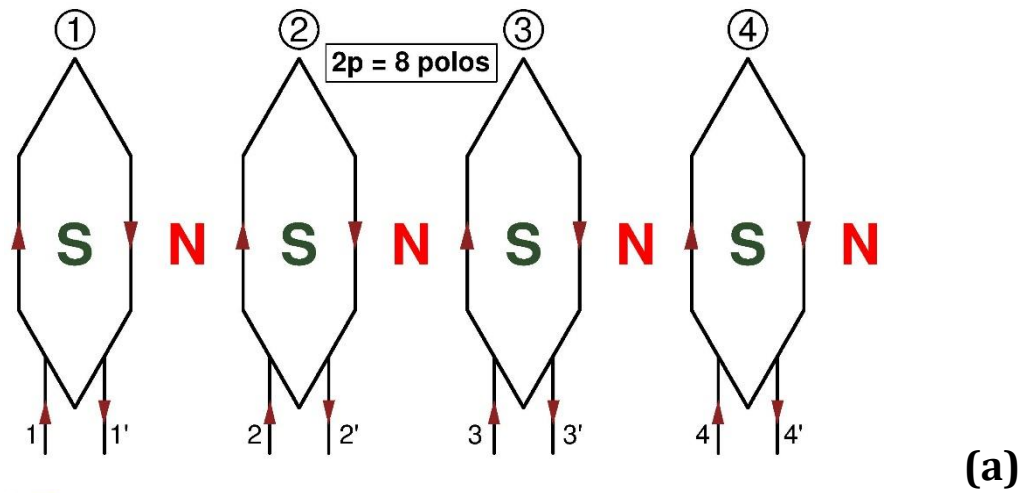
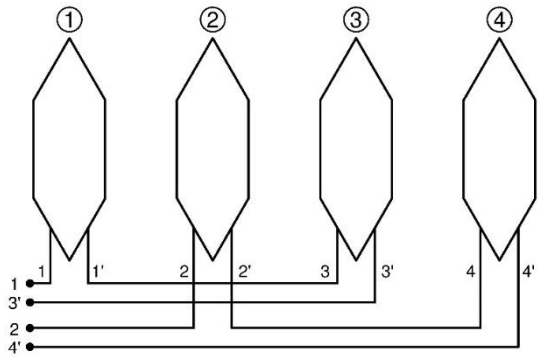
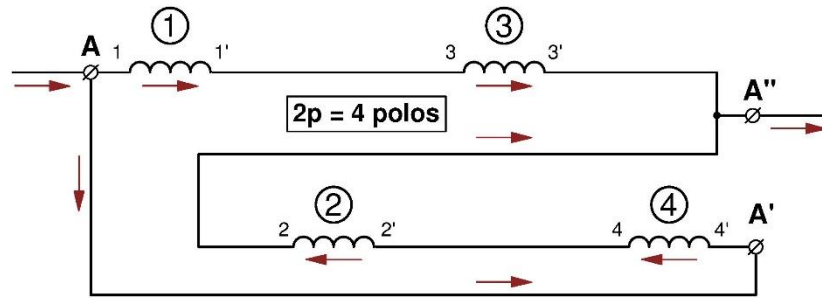
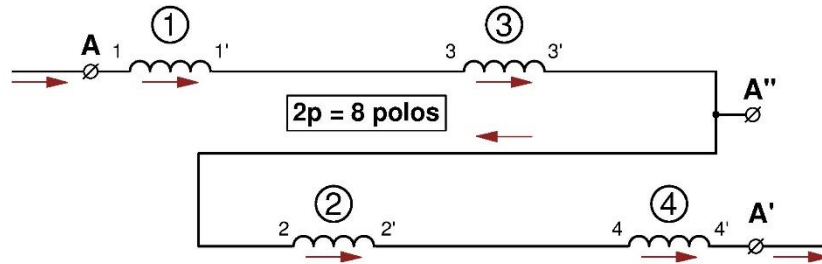


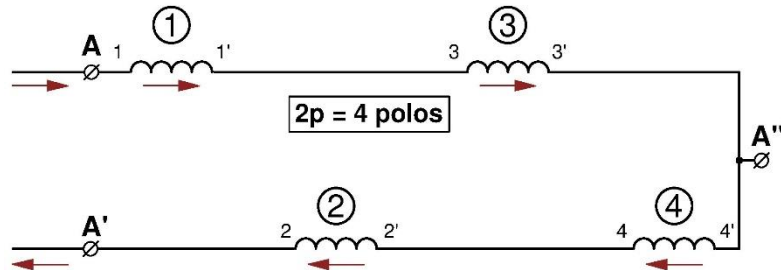
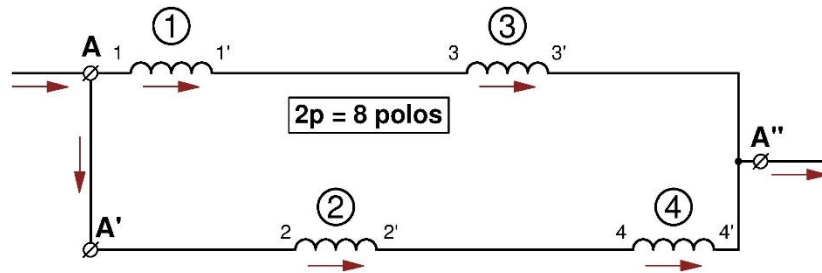
Fig. 3: Ejemplo de cómo una fase puede generar tanto 8 polos (a) como 4 polos (b)



*Fig. 4: En la conexión Dahlander cada fase se divide en dos mitades formadas por grupos polares en serie. Una de las mitades incluye los grupos polares pares y la otra los grupos polares impares*



(a)



(b)

*Fig. 5: Las dos mitades de una fase de un devanado Dahlander se pueden conectar entre sí de dos maneras:*

- (a): La conexión serie corresponde al mayor número de polos (velocidad baja) y la conexión paralelo al menor número de polos (velocidad alta).*
- (b): La conexión paralelo corresponde al mayor número de polos (velocidad baja) y la conexión serie al menor número de polos (velocidad alta).*

Mediante la **conexión Dahlander** se consigue que un mismo devanado funcione con dos números de polos diferentes que siempre están en la proporción 2:1. En consecuencia, según indica la fórmula (2), mediante esta conexión se pueden obtener dos velocidades de sincronismo distintas que guardan la proporción 1:2; es decir, una es la mitad de la otra.

En los devanados de corriente alterna una fase está constituida por varios grupos polares distribuidos a lo largo de la circunferencia del entrehierro. Un grupo polar es un conjunto de bobinas de la misma fase conectadas en serie que están alojadas en ranuras contiguas y que actúan conjuntamente para generar los mismos polos. Los grupos polares se conectan entre sí para constituir una fase del devanado. Si el diseño del bobinado hace que cada grupo polar genere un par de polos cuando circula corriente por él, el devanado es *por polos consecuentes* y si cada grupo polar solamente origina un polo magnético, el devanado es *por polos* (para profundizar sobre los devanados de las máquinas eléctricas puede consultar mi texto [22]).

En un motor Dahlander cada fase del estator está dividida en dos mitades. Una mitad incluye todos los grupos polares pares de la fase y la otra incluye a todos los grupos polares impares. Inicialmente el devanado es por polos consecuentes y para reducir el número de polos a la mitad (y así duplicar la velocidad de sincronismo) lo que se hace en cada una de las fases del estator es cambiar el sentido de la corriente en una de sus mitades manteniendo el mismo sentido de la corriente en la otra mitad. De esta manera el devanado pasa a ser por polos.

Para comprender mejor cómo funciona la conexión Dahlander en la Fig. 3 se muestra un ejemplo en el que cada fase consta de 4 grupos polares que pueden generar 8 o 4 polos. En esta figura se ha supuesto que se observa el devanado del estator desde el entrehierro después de que la máquina haya sido cortada longitudinalmente y luego enderezada de tal forma que la superficie interior del estator pasa de ser cilíndrica a ser plana (es esta superficie la que se observa en la Fig. 3). Se han representado solo los grupos polares de una fase y se ha supuesto el caso más sencillo de que cada grupo polar está formado únicamente por una bobina. Cada bobina consta de dos lados colocados dentro de ranuras que se han representado mediante rectas verticales y de dos cabezas de bobina que se han dibujado mediante dos rectas formando una V o una  $\Lambda$ . Cada grupo polar se ha designado mediante un número dentro de una circunferencia ①, ②, ... y sus extremos inicial y final mediante el mismo número sin y con apóstrofe, respectivamente: 1 y 1', 2 y 2', ... Dado que el devanado no está realmente sobre una superficie plana sino sobre una superficie cilíndrica, sucede que a la derecha del grupo polar ④ lo siguiente que se encuentra es el grupo polar ①.

En la Fig. 3a se muestra que, cuando la corriente de la fase es positiva, en todos los grupos polares la corriente circula en el mismo sentido (horario) y todos ellos generan en su interior un polo magnético del mismo signo (sur), mientras que en cada uno de los espacios que separan dos grupos polares consecutivos se crea un polo de signo contrario (norte). En efecto, por ejemplo, el lado derecho de grupo polar ① y el lado izquierdo del grupo polar ② equivalen a una bobina en la que la corriente circula en sentido antihorario, por lo que origina un polo norte. Esto significa que cada grupo polar da lugar a dos polos magnéticos y el bobinado es, pues, por polos consecuentes.

En la parte inferior de la Fig. 3a se muestra la distribución espacial del primer armónico de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del entrehierro donde aprecia claramente que en este caso el devanado es de 8 polos. En esta figura se ha tomado el convenio de considerar positiva la f.m.m. cuando las líneas de inducción en el entrehierro se dirigen desde el rotor hacia el estator; es decir, la f.m.m. es positiva en los polos sur del estator.

En la Fig. 3b se muestra que, cuando la corriente de los grupos polares pares se invierte respecto a la situación de la Fig. 3a y la corriente de los grupos polares impares se mantiene igual que en Fig. 3a, se consigue que cada grupo polar solo origine un polo; por lo que el bobinado pasa a ser por polos y ahora se tienen 4 polos magnéticos. En efecto, en este caso sucede que, cuando la corriente de la fase es positiva, por los grupos polares la corriente circula alternativamente en sentido horario y en sentido antihorario. En consecuencia, en el interior los grupos polares van apareciendo sucesivamente polos magnéticos sur y norte y en los espacios que separan dos grupos polares consecutivos ya no se crean nuevos polos magnéticos.

En la parte inferior de la Fig. 3b se muestra la nueva distribución espacial del primer armónico de f.m.m. del entrehierro y ahí se aprecia claramente que ahora el devanado origina 4 polos magnéticos (la mitad que en la Fig. 3a) y, por lo tanto, como señala la relación (2), la velocidad de sincronismo pasa a ser el doble que en la Fig. 3a.

De todo lo anterior se deduce que para formar la fase completa lo primero que hay que hacer es montar sus dos mitades; una mitad está constituida por los grupos polares impares conectados en serie entre sí y la otra mitad la constituyen los grupos polares pares conectados en serie entre sí. A modo de ejemplo, en la Fig. 4 se muestran las dos mitades en que queda dividida la fase formada por los grupos polares de la Fig. 3.

Finalmente, la fase completa se forma uniendo en serie entre sí ambas mitades y dejando accesibles al exterior los extremos de las fases y su punto medio (donde se unen las dos mitades). De esta manera, si la fase se alimenta por ambos extremos (A y A' en la Fig. 5a y en la Fig. 5b) las dos mitades de la fase quedan conectadas en serie. Pero si se unen entre sí ambos extremos (A y A') y se alimenta la fase por uno de los extremos y el punto medio (A y A'' en la Fig. 5a y en la Fig. 5b), las dos mitades quedan conectadas en paralelo y el sentido de la corriente en una de las mitades se invierte respecto a la conexión en serie (en la Fig. 5a y en la Fig. 5b la mitad cuya corriente se invierte es la de los grupos polares pares). Por simplicidad, en la Fig. 5a y en la Fig. 5b los grupos polares (que son los mismos que en la Fig. 3 y en la Fig. 4) se representan con el símbolo que se emplea para una autoinducción en los circuitos eléctricos.

Hay dos formas de unir ambas mitades de una fase, las cuales se indican en la Fig. 5a y en la Fig. 5b. Uniendo las mitades de la fase como se indica en la Fig. 5a sucede que en la conexión en serie de ambas mitades las corrientes en los grupos polares son como en la Fig. 3a y el devanado tiene 8 polos y en la conexión en paralelo de ambas mitades las corrientes en los grupos polares son como en la Fig. 3b y el devanado tiene 4 polos. Uniendo las mitades de la fase como se muestra en la Fig. 5b sucede lo contrario, la conexión en serie da lugar a 4 polos y la conexión en paralelo origina 8 polos. Recuerde que, en este ejemplo, con 8 polos la velocidad es baja y con 4 polos la velocidad es alta (doble que la velocidad baja).

Hasta ahora se ha hablado de una sola fase, pero también hay que fijarse en cómo queda el conjunto de las tres fases del devanado del estator.

El ángulo geométrico de separación entre dos fases  $\Delta_g$  debe ser tal que el ángulo eléctrico entre dos fases  $\Delta$  sea igual a  $120^\circ$ . Un ángulo eléctrico se obtiene multiplicando el correspondiente ángulo geométrico por el número de pares de polos ( $p$ ), luego:

$$\Delta = p \cdot \Delta_g \quad (5)$$

Dado que en la conexión Dahlander se tienen dos valores de  $p$ , uno doble que el otro, sucede que si para el menor valor de  $p$  el ángulo eléctrico  $\Delta$  vale  $120^\circ$ , entonces con el mayor valor de  $p$  el desfase  $\Delta$  pasa a valer  $240^\circ = -120^\circ$ . Así, en el ejemplo mostrado en las figuras anteriores, si el ángulo geométrico de separación es  $\Delta_g = 60^\circ$  se obtiene que:

$$2p = 4 \text{ polos} \Rightarrow p = 2 \text{ pares de polos} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

$$2p = 8 \text{ polos} \Rightarrow p = 4 \text{ pares de polos} \Rightarrow \Delta = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ = -120^\circ$$

Esto hace que, cuando en la conexión Dahlander se conmuta el número de polos, se cambie el orden de fases en el espacio y sea preciso permutar la corriente entre dos de las tres fases para conseguir que la máquina continúe girando en el mismo sentido. En efecto, el cambio en el orden de las fases en el espacio provocaría un cambio en el sentido de giro del campo magnético si se mantuviera el mismo desfase en el tiempo entre las corrientes que alimentan a las tres fases. Si se invierte la secuencia temporal de las estas tres corrientes de fase (para lo cual basta con intercambiar las corrientes entre dos fases) se compensa dicho cambio del sentido de giro.

La designación de bornes utilizada en la Fig. 5 no está normalizada. Es en la Fig. 6a donde se muestra la designación normalizada de los bornes de un devanado trifásico con la conexión Dahlander según la norma UNE-EN 60034-8 [2]. Nótese que la letra usada en los bornes de los puntos medios de las fases U y W tienen sus letras intercambiadas para, de esta manera, realizar el cambio de la secuencia temporal de la alimentación explicado en el párrafo anterior y lograr que la máquina siga girando en el mismo sentido a ambas velocidades.

En principio las tres fases se pueden conectar entre sí en estrella o en triángulo, tanto cuando las dos mitades de cada fase están conectadas en serie como cuando lo están en paralelo. Sin embargo, la conexión en triángulo cuando las dos mitades de cada fase están en paralelo no se usa en la práctica. Se denominará conexión *doble estrella* (YY) cuando las tres fases se conectan en estrella y las dos mitades de cada fase están en paralelo. La designación *estrella* (Y) y *triángulo* (D) se reserva para cuando las dos mitades de cada fase están en serie. En la Fig. 6b, la Fig. 6c y la Fig. 6d y en la Tabla I se muestra la forma de realizar estos tres tipos de conexión.

En la Fig. 6 se ha supuesto que en la caja de bornes están accesibles los dos extremos y el punto medio de las tres fases, por lo que en total hay 9 bornes en la caja de bornes y esto permite realizar los tres tipos de conexión Y, D e YY, citadas anteriormente.

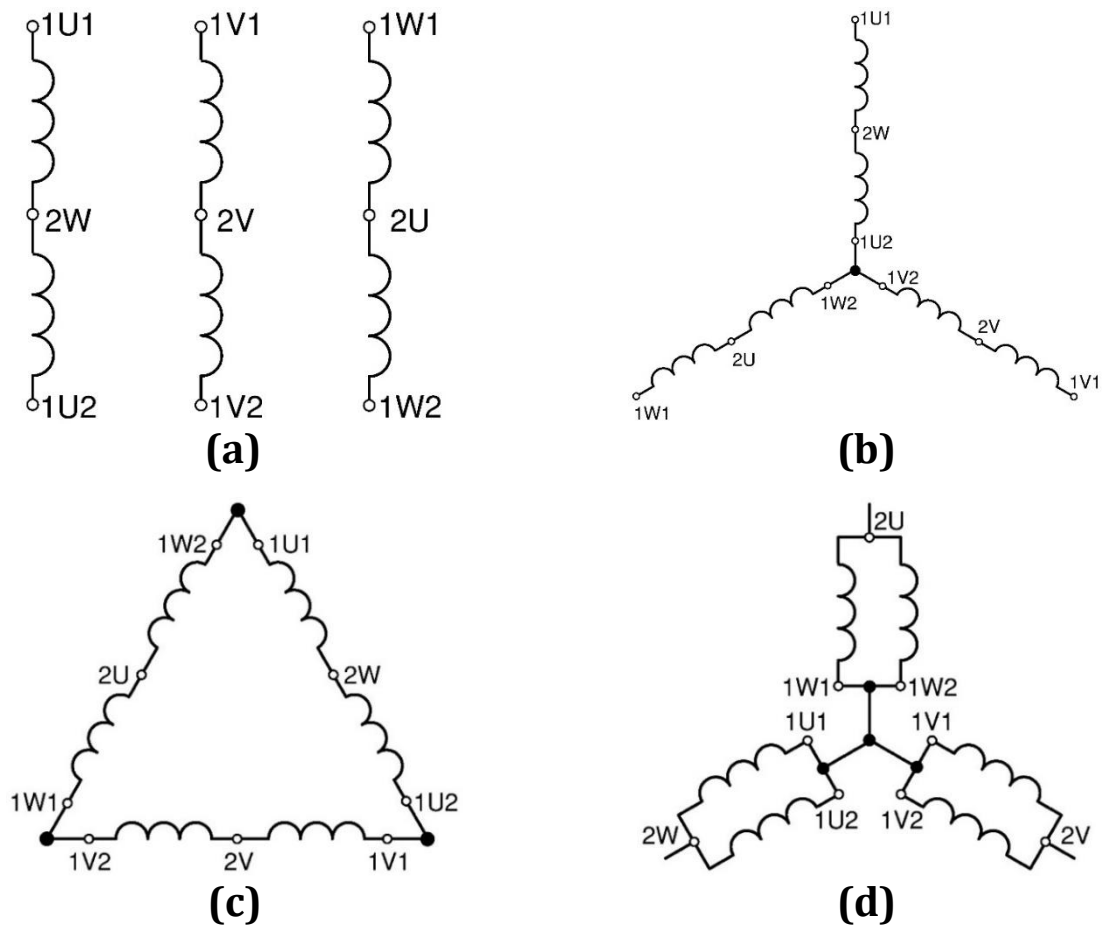
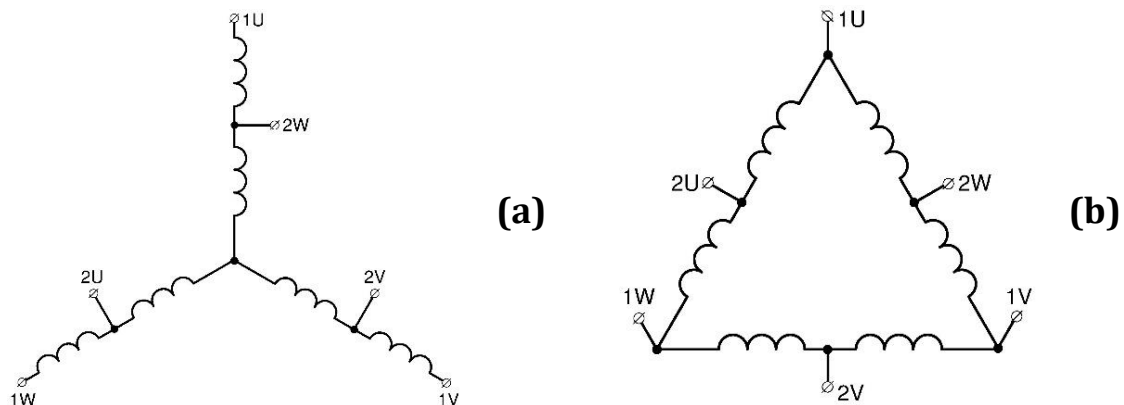


Fig. 6: (a): Designación normalizada (UNE-EN 60034-8 [2]) de los bornes del devanado del estator de un motor trifásico con conexión Dahlander. (b): Conexión estrella (Y). (c): Conexión triángulo (D). (d): Conexión doble estrella (YY).

Tabla I: Formas de conexión de un devanado trifásico Dahlander (UNE-EN 60034-8 [2])

| Conexión            | Alimentar por | Unir entre sí             | Aislar separadamente |
|---------------------|---------------|---------------------------|----------------------|
| Estrella (Y)        | 1U1, 1V1, 1W1 | 1U2-1V2-1W2               | 2U, 2V, 2W           |
| Triángulo (D)       | 1U1, 1V1, 1W1 | 1U1-1W2; 1V1-1U2; 1W1-1V2 | 2U, 2V, 2W           |
| Doble estrella (YY) | 2U, 2V, 2W    | 1U1-1V1-1W1-1U2-1V2-1W2   | ---                  |



Pero, en ocasiones, el fabricante deja el bobinado del estator conectado de forma permanente en estrella o en triángulo y solo deja accesibles al exterior dos bornes en cada fase, es decir 6 bornes en total. Según la norma UNE-EN 60034-8 [2] estos bornes serán, por un lado, los extremos de las fases 1U1, 1V1 y 1W1, que en la caja de bornes se designan simplemente 1U, 1V y 1W (pues no es necesario distinguirlos de los otros extremos de fase, ya que no se llevan a la caja de bornes), y, por otro lado, los bornes correspondientes a los puntos medios de las fases: 2U, 2V y 2W (Fig. 7). Luego, en este caso las conexiones en la caja de bornes se realizan así:

- En la conexión *estrella* (Fig. 7a) o *triángulo* (Fig. 7b):
  - El estator se alimenta por los bornes: 1U, 1V y 1W.
  - Se dejan aislados los bornes: 2U, 2V y 2W.
- En la conexión *doble estrella* ((Fig. 7a y Fig. 7b):
  - El estator se alimenta por los bornes: 2U, 2V y 2W.
  - Se conectan entre sí los bornes: 1U-1V-1W.

Las formas de conexión que se utilizan para las dos velocidades de un motor Dahlander se designan indicando primero la conexión para la velocidad baja y luego la conexión para la velocidad alta. La elección entre estas formas de conexión está condicionada por el tipo de carga mecánica que tiene que mover el motor. En la práctica, se utilizan estas tres conexiones (ver la Tabla II y el anexo A):

- Conexión D-YY: cuando la carga mecánica presenta un **par constante** e independiente de la velocidad, como sucede con: ascensores, grúas, ...
- Conexión YY-D: cuando la carga mecánica presenta una **potencia constante** e independiente de la velocidad; es decir, un par que disminuye con la velocidad, como sucede con: tornos, fresadoras, ...
- Conexión Y-YY: cuando la carga mecánica presenta un **par variable** que aumenta con la velocidad, como sucede con: ventiladores, bombas, ...

*Tabla II: Conexiones de un motor Dahlander según el tipo de carga*

| Tipo de carga      | Velocidad baja      | Velocidad alta      |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| Par constante      | Triángulo (D)       | Doble estrella (YY) |
| Potencia constante | Doble estrella (YY) | Triángulo (D)       |
| Par variable       | Estrella (Y)        | Doble estrella (YY) |

### **Modulación de la amplitud polar (PAM)**

La modulación de la amplitud polar (*Pole-Amplitude Modulation: PAM*) fue introducida en 1957 por Rawcliffe [20], de la Universidad de Bristol, y es otro método de variar el número de polos de un motor de jaula de ardilla mediante un único devanado en el estator. La PAM permite obtener dos velocidades de sincronismo con una proporción diferente a 1:2 y se la puede considerar una generalización de la conexión Dahlander.

Al igual que en la conexión Dahlander, un devanado en el que se aplique la PAM tiene cada una de sus fases dividida en dos mitades que se pueden conectar en serie o en paralelo, lo cual permite cambiar el sentido de la corriente en la mitad de sus grupos polares. Lo que, en principio, diferencia esta conexión de la Dahlander son los grupos polares que se incluyen cada una de las dos mitades de cada fase; es decir, el criterio para seleccionar los grupos polares cuya polaridad se invierte.

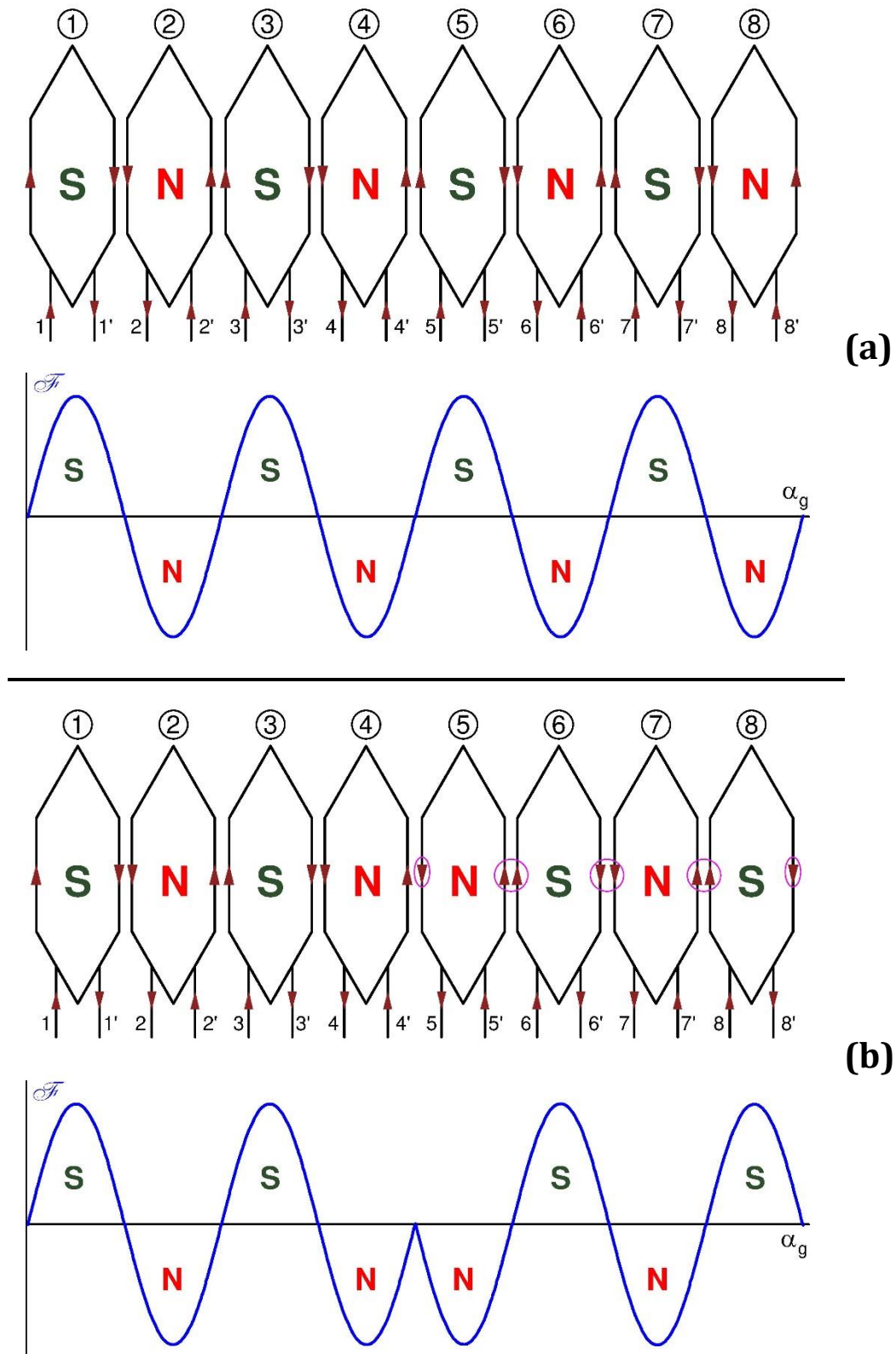


Fig. 8: Ejemplo de aplicación de la PAM a un devanado de 8 polos

Para entender cómo funciona este método se va a estudiar un ejemplo en el que se parte de un devanado por polos de 8 polos (también sería posible partir de un devanado por polos consecuentes como el de la Fig. 3a). Dado que el devanado es por polos, cada grupo polar solo genera un polo magnético que se sitúa en su interior. Por lo tanto, en este ejemplo el devanado en cada fase deberá tener 8 grupos polares y la corriente



circulará por ellos alternativamente en sentido horario y en sentido antihorario para conseguir generar polos magnéticos que van cambiando de signo sucesivamente a lo largo de la circunferencia del entrehierro. En la Fig. 8a se muestran los grupos polares de una fase de dicho devanado y la distribución del primer armónico de la f.m.m. a que dan lugar.

La variación del número de polos mediante la modulación de la amplitud polar (PAM) se consigue cambiando el sentido de la corriente en la mitad de los grupos polares siguiendo una ley periódica, que es la *función de modulación*.

En ocasiones la función de modulación también incluye zonas de valor cero (ver el artículo [20]) lo que equivale anular algunos de los grupos polares, bien desconectándolos o bien dividiendo cada uno de estos grupos polares en dos mitades que, según como se conecten, pueden sumar sus f.m.m.s o restarlas (anulándose mutuamente). Esto exige que cada fase tenga unas conexiones especiales. Aquí no se profundizará en este sistema.

Una posible modulación del devanado de 8 polos de la Fig. 8a sería invertir el sentido de la corriente cada dos grupos polares. Es decir, inicialmente los 8 grupos polares de una fase originan a lo largo de la circunferencia del entrehierro una distribución de los polos magnéticos así:

S – N – S – N – S – N – S – N

y, tras esta modulación, la distribución a lo largo del entrehierro queda así:

S – N – **N** – **S** – S – N – **N** – **S**

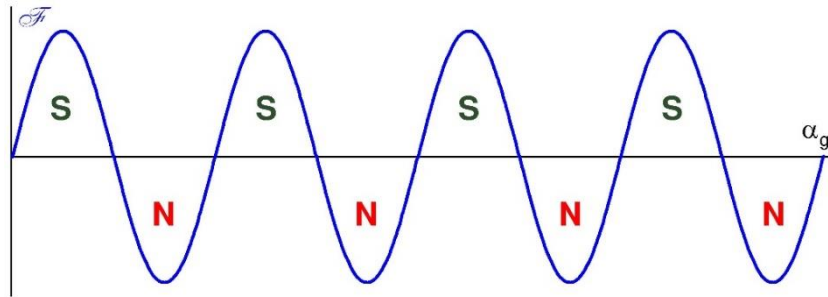
Luego, lo que se obtiene tras esta modulación es un campo magnético de 4 polos de igual forma (salvo el signo), cada uno de los cuáles es debido a la acción conjunta de dos grupos polares.

Esta modulación, por lo tanto, es realmente una conexión Dahlander en la que se ha partido de un bobinado por polos. Esta forma de realizar la conexión Dahlander es menos eficiente que cuando se parte de un devanado por polos consecuentes (que es lo que se ha explicado en la sección anterior); pero es plenamente operativa y demuestra que la conexión Dahlander se la puede considerar como un caso particular de PAM.

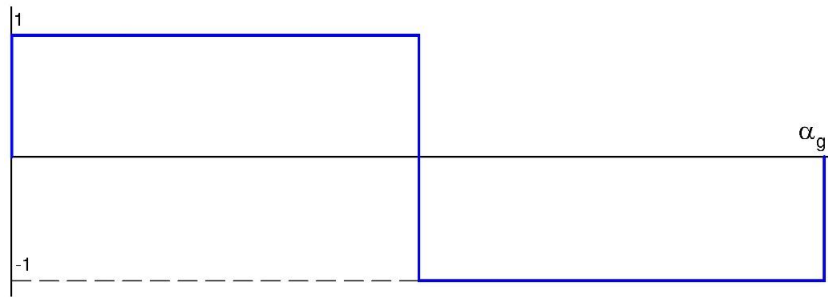
En la Fig. 8b se muestra el efecto de aplicar a una fase de 8 polos (Fig. 8a) una modulación consistente en mantener el sentido de la corriente en los 4 primeros grupos polares e invertir el sentido de la corriente en los 4 últimos. La distribución de f.m.m. que se obtiene es asimétrica: tiene 6 polos, algunos de los cuales tiene el doble de ancho que los otros.

En la Fig. 9 a, b y c se muestra que la modulación aplicada en la Fig. 8b equivale a multiplicar la f.m.m. de fase de 8 polos original (Fig. 9a) por una función de modulación (Fig. 9b) rectangular que toma un valor +1 en la primera mitad de la circunferencia del entrehierro y un valor -1 en la segunda mitad. La Fig. 9c vuelve a mostrar la f.m.m. asimétrica de 6 polos que se obtiene.

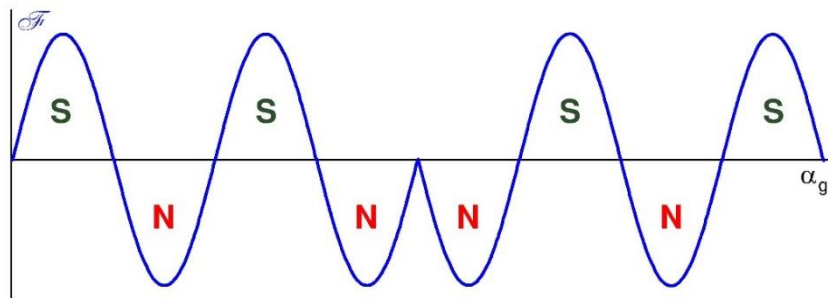
Al descomponer en serie de Fourier la distribución espacial de esta f.m.m. asimétrica (Fig. 8b y Fig. 9c) se obtiene que, además de otros armónicos de menor importancia (que se intentarán reducir lo más posible mediante las técnicas habituales en los devanados de corriente alterna: acortamiento del paso de las bobinas, inclinación de las ranuras, ...), hay dos armónicos que ejercen un efecto importante, que son de igual amplitud y que tienen 6 y 10 polos, respectivamente (Fig. 9d y Fig. 9e).



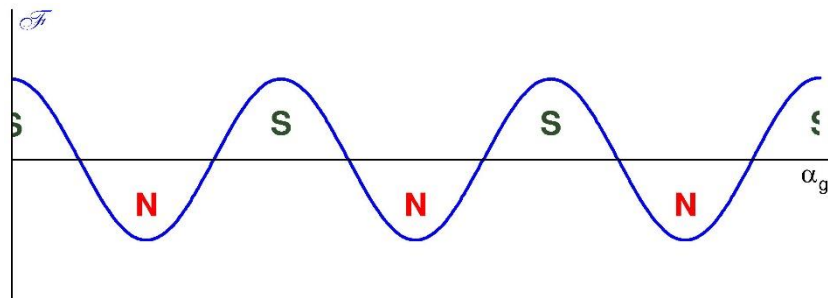
**(a):** F.m.m. sinusoidal de 8 polos



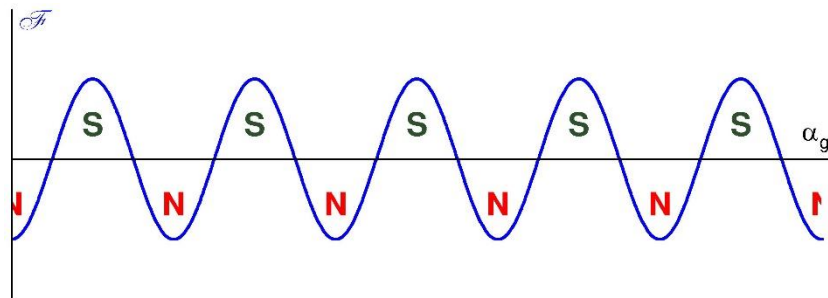
**(b):** Función de modulación



**(c):** F.m.m. de 6 polos asimétrica

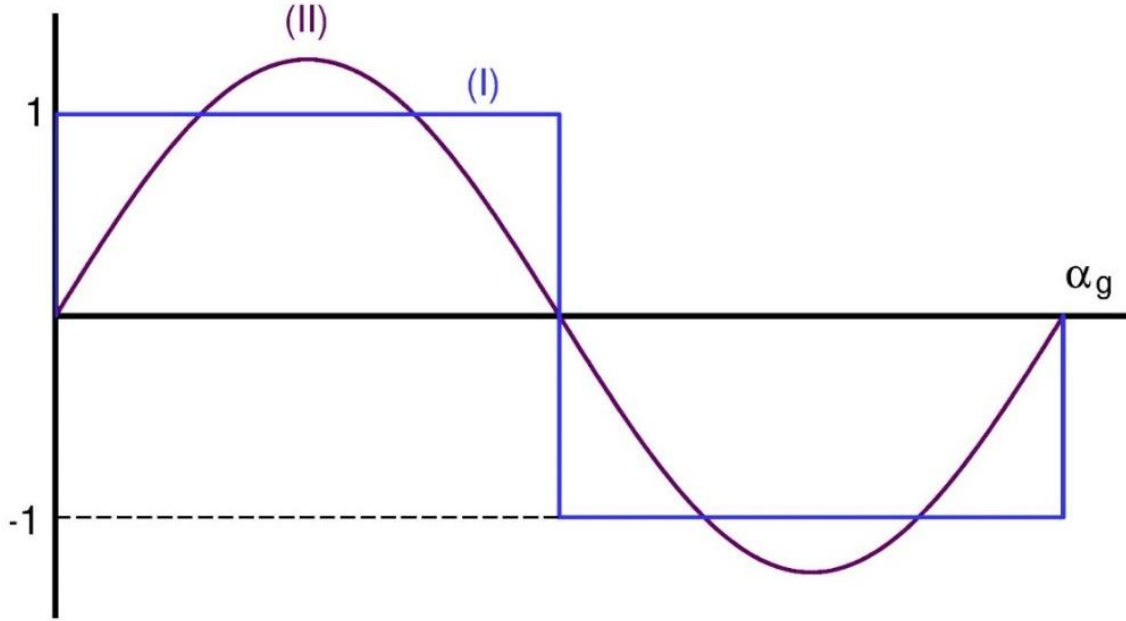


**(d):** F.m.m. sinusoidal de 6 polos



**(e):** F.m.m. sinusoidal de 10 polos

*Fig. 9: Aplicando la función de modulación **(b)** a una f.m.m. sinusoidal de 8 polos **(a)** se obtiene una f.m.m. asimétrica **(c)** que es igual a la suma de dos f.m.m.s sinusoidales de 6 polos **(d)** y 10 polos **(e)***



*Fig. 10: Función de modulación (I) y su primer armónico (II)*

Para comprender por qué está f.m.m. asimétrica originada por una fase equivale básicamente a la suma de dos armónicos de 6 y 10 polos se sustituye la función de modulación por su primer armónico (Fig. 10). Este primer armónico (que se va a denominar  $M_1$ ) es una función sinusoidal de la coordenada angular en ángulos geométricos  $\alpha_g$  así:

$$M_1 = \frac{4}{\pi} \sin(r \alpha_g) \quad (6)$$

En esta expresión  $r$  es el número de inversiones de signo de la función de modulación. En el ejemplo de la Fig. 9 b y la Fig. 10 este parámetro vale  $r = 1$  inversión.

Por otra parte, la fase inicialmente origina una f.m.m. sinusoidal de  $2p = 8$  polos ( $p = 4$  pares de polos) así:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_M(t) \sin(p \alpha_g) \quad (7)$$

En la fórmula anterior  $\mathcal{F}_M(t)$  es el valor máximo en el espacio de la f.m.m. Esta es una magnitud que varía en el tiempo de la misma manera que la corriente con que se alimenta la fase considerada.

Invertir la mitad de los grupos polares equivale a multiplicar la f.m.m. inicial (7) por la función de modulación, la cual se acepta que, a efectos prácticos, es igual a su primer armónico (6):

$$\mathcal{F} \cdot M_1 = \frac{4}{\pi} \mathcal{F}_M(t) \sin(p \alpha_g) \sin(r \alpha_g) \quad (8)$$

Teniendo en cuenta esta propiedad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] = \left[ \frac{1}{2} \cos(x - y) \right] + \left[ -\frac{1}{2} \cos(x + y) \right] \quad (9)$$

la expresión (8) se convierte en:

$$\mathcal{F} \cdot M_1 = \left[ \frac{4}{\pi} \frac{\mathcal{F}_M(t)}{2} \cos((p - r)\alpha_g) \right] + \left[ -\frac{4}{\pi} \frac{\mathcal{F}_M(t)}{2} \cos((p + r)\alpha_g) \right] \quad (10)$$

Lo anterior indica que, tras la PAM, cada una de las tres fases del estator da lugar a dos ondas de f.m.m. de igual amplitud y de  $2(p - r)$  y de  $2(p + r)$  polos, respectivamente. En el ejemplo de la Fig. 8 y de la Fig. 9 se obtienen dos ondas de f.m.m. de 6 y de 10 polos, las cuales se representan en la Fig. 9d y en la Fig. 9e, respectivamente.

Ahora bien, lo que interesa es que tras la PAM se obtenga una única onda de f.m.m. sinusoidal de diferente número de polos que la f.m.m. inicial. Es decir, es preciso suprimir una de estas dos ondas de f.m.m. de la relación (10). Para ello se actúa sobre el ángulo geométrico de separación  $\Delta_g$  entre dos fases consecutivas y se tiene en cuenta la relación (5) entre este ángulo geométrico y el ángulo eléctrico de separación entre fases  $\Delta$ . En la expresión (5) el número de pares de polos  $p$  adopta valores diferentes según el armónico de f.m.m. que se estudie.

Es sabido que si un devanado trifásico está alimentado por un sistema trifásico equilibrado de corrientes que varían sinusoidalmente en el tiempo sucede que:

- Para aquellos armónicos espaciales de f.m.m. cuyo número de polos provoque que el ángulo eléctrico entre dos fases consecutivas valga  $\Delta = 120^\circ$ , la f.m.m. resultante de la acción conjunta de las tres fases es giratoria en sentido positivo.
- Para aquellos armónicos espaciales de f.m.m. cuyo número de polos provoque que el ángulo eléctrico entre dos fases consecutivas valga  $\Delta = -120^\circ$  ( $-120^\circ = 240^\circ$ ), la f.m.m. resultante de la acción conjunta de las tres fases es giratoria en sentido negativo (y habrá que cambiar la sucesión temporal de las corrientes de fase -intercambiado la corriente de dos fases- si se desea que la f.m.m. gire en sentido positivo).
- Para aquellos armónicos espaciales de f.m.m. cuyo número de polos provoque que el ángulo eléctrico entre dos fases consecutivas valga  $\Delta = 0^\circ$  ( $0^\circ = 360^\circ$ ), la f.m.m. resultante de la acción conjunta de las tres fases es nula. En efecto, para este armónico espacial las tres fases originan f.m.m.s que están en fase en el espacio. Por lo tanto, el efecto conjunto de las tres fases equivale al de una sola fase si por ella circula una corriente igual a la suma de las corrientes de las tres fases. Dado que estas corrientes están equilibradas, en todo momento su suma es nula y, consecuentemente, originan una f.m.m. total nula.

En resumen, hay que dar al ángulo geométrico  $\Delta_g$  un valor tal que anule una de las dos f.m.m.s que genera cada fase tras la PAM (las cuales se indican en la relación (10)). Así, si en el ejemplo de la Fig. 8 y de la Fig. 9 se adopta este valor  $\Delta_g = 120^\circ$ , sucede que:

- Para la f.m.m. inicial de 8 polos ( $p = 4$  pares de polos):

$$\Delta = 4 \cdot 120^\circ = 480^\circ = 480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$$

- Para la f.m.m. de 10 polos ( $p = 5$  pares de polos):

$$\Delta = 5 \cdot 120^\circ = 600^\circ = 600^\circ - (2 \cdot 360^\circ) = -120^\circ$$

- Para la f.m.m. de 6 polos ( $p = 3$  pares de polos):

$$\Delta = 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ = 0^\circ$$

Luego, en este ejemplo se consigue eliminar la f.m.m. de 6 polos y, por lo tanto, empleando la PAM es posible que este motor tenga 10 u 8 polos. Es decir, se consigue una relación del número de polos igual 5:4; lo que, según la relación (2), significa que las velocidades de sincronismo correspondientes están en la proporción 4:5 (600 y 750 r.p.m. para una frecuencia  $f_1 = 50$  Hz). También se aprecia que, al igual que en la conexión Dahlander, es preciso cambiar la secuencia temporal de las corrientes con que se alimentan las fases (intercambiando las corrientes de dos fases) si se desea que el motor continúe girando en el mismo sentido cuando se conmuta su número de polos.

Tomando como base el artículo de Rawcliffe y otros [20] se van a determinar las condiciones que se deben cumplir para aplicar correctamente la PAM y eliminar una de las dos f.m.m. que aparecen tras su aplicación.

Lo primero es observar que la modulación del devanado inicial de  $p$  pares de polos se consigue cambiando el signo de la corriente en la mitad de los grupos polares. Esto obliga a que el número de inversiones  $r$  sea un divisor de  $p$  y, además, a que  $r$  sea inferior a  $p$ .

El ángulo geométrico  $\Delta_g$  entre dos fases consecutivas debe ser tal que para el número de pares de polos inicial  $p$  el ángulo eléctrico  $\Delta$  (dado por la relación (5)) valga  $120^\circ$  o  $-120^\circ$  ( $-120^\circ = 240^\circ$ ). Luego, se debe cumplir que:

$$p \cdot \Delta_g = k_3 \cdot 120^\circ \quad (k_3 = \text{número natural no múltiplo de 3}) \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que un ángulo no varía si se le suma o se le resta  $360^\circ$  una o varias veces y que  $k_3$  es un número natural (es decir, un número entero positivo no nulo) no múltiplo de 3, se deduce que el ángulo que resulta a la derecha del signo = de la fórmula anterior sólo puede tomar los valores  $120^\circ$  (si  $k_3$  es impar) y  $240^\circ$  ( $240^\circ = -120^\circ$ ) (si  $k_3$  es par), que es lo que se desea.

Tras aplicar la PAM aparecen dos f.m.m.s, dadas por la relación (10), cuyos números de pares de polos se van a designar  $p'$  y  $p''$ , respectivamente. La f.m.m. de  $p''$  pares de polos es la que se va a eliminar por la acción conjunta de las tres fases. Dependiendo de que esta f.m.m. sea la de mayor o menor número de polos se deduce lo siguiente:

$$\begin{array}{llllll} \text{Si } p'' > p & \Rightarrow & p' = p - r & p'' = p + r & r = p'' - p & p' = 2p - p'' & (a) \\ \text{Si } p'' < p & \Rightarrow & p' = p + r & p'' = p - r & r = p - p'' & p' = 2p - p'' & (b) \end{array} \quad (12)$$

La f.m.m. de  $p'$  pares de polos deberá tener un ángulo eléctrico entre dos fases de  $120^\circ$  o  $-120^\circ$  ( $-120^\circ = 240^\circ$ ). Luego, de forma similar a la expresión (11), se debe cumplir que:

$$p' \cdot \Delta_g = k'_3 \cdot 120^\circ \quad (k'_3 = \text{número natural no múltiplo de 3}) \quad (13)$$

## VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

La f.m.m. de  $p''$  pares de polos debe ser eliminada, por consiguiente, deberá tener un ángulo eléctrico entre dos fases de  $0^\circ$  ( $0^\circ = 360^\circ$ ). Luego, se debe cumplir que:

$$p'' \cdot \Delta_g = k'' \cdot 360^\circ = (3k'') \cdot 120^\circ \quad (k'' = \text{número natural}) \quad (14)$$

Combinando las relaciones (11) y (13) se deduce que:

$$p' = \frac{k'_3}{k_3} p \quad (15)$$

( $k_3, k'_3 = \text{números naturales no múltiplos de 3}$ )

Luego, el parámetro  $p'$  es múltiplo de 3 solamente si  $p$  también lo es.

Combinando las relaciones (11) y (14) se deduce que:

$$p'' = \frac{3k''}{k_3} p \quad (16)$$

( $k_3 = \text{número natural no múltiplo de 3; } k'' = \text{número natural}$ )

Luego, el número de pares de polos  $p''$  es siempre múltiplo de 3. Tras aplicar la PAM solo es posible eliminar una f.m.m. cuyo número de pares de polos sea múltiplo de tres.

De las relaciones (12) se obtiene que:

$$r = |p - p''| \quad (17)$$

De las relaciones (15), (16) y (17) se deduce que los parámetros  $p'$  y  $r$  son múltiplos de 3 únicamente cuando el número de pares de polos inicial  $p$  también lo es. Es decir, o bien los tres parámetros  $p, p'$  y  $r$  son todos múltiplos de 3, o bien ninguno de ellos es múltiplo de 3.

Combinando las relaciones (11), (12), (13) y (14) se deduce que:

$$p' \cdot \Delta_g = (2p - p'') \cdot \Delta_g = 2 \cdot (k_3 \cdot 120^\circ) - (k'' \cdot 360^\circ) = k_3 \cdot 240^\circ = k_3 \cdot (-120^\circ) \quad (18)$$

( $k_3 = \text{número natural no múltiplo de 3}$ )

De esta expresión y de la (13) se deduce que la f.m.m. de  $p'$  pares de polos no se va a anular (se elimina únicamente la f.m.m. de  $p''$  pares de polos) y que su orden de fases a lo largo de la circunferencia del entrehierro es el opuesto al de la f.m.m. inicial de  $p$  pares de polos. Por lo tanto, al conmutar el número de polos hay que cambiar también la secuencia temporal de las corrientes que circulan por las fases (intercambiando las corrientes entre dos fases) si se quiere mantener el mismo sentido de giro del motor.

En el artículo [20] se señala que el ángulo geométrico de separación entre dos fases  $\Delta_g$  usualmente vale  $120^\circ$  o  $-120^\circ$  ( $-120^\circ = 240^\circ$ ). En ese caso, la relación (11) indica que el número inicial de pares de polos  $p$  no puede ser múltiplo de 3 y, en consecuencia, los parámetros  $p'$  y  $r$  tampoco lo son. En resumen, cundo el ángulo geométrico de separación entre dos fases  $\Delta_g$  vale  $\pm 120^\circ$ , mediante la PAM se pueden conseguir dos números de polos que nunca son múltiplos de 3 y el número de inversiones  $r$  de la función de modulación tampoco puede ser múltiplo de 3.

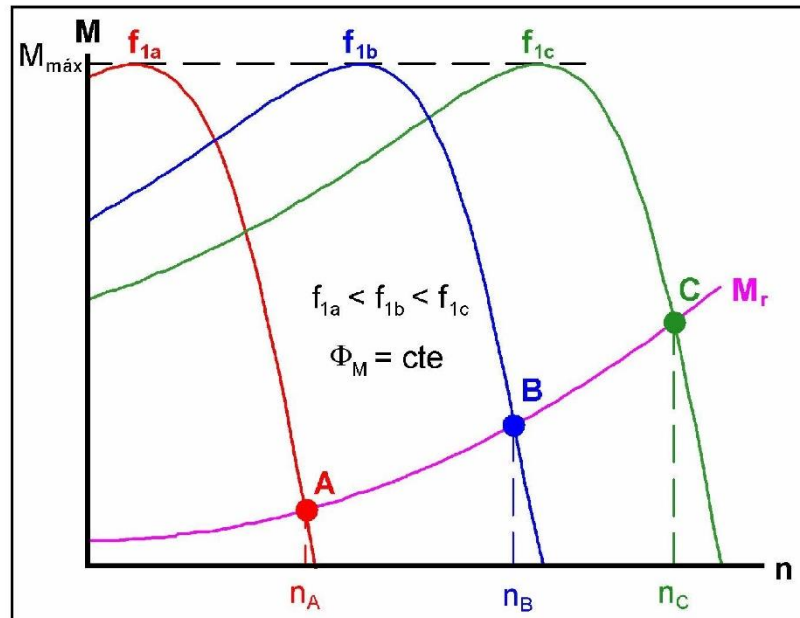
El artículo de Chandrasekar y otros [7] indica la posibilidad de conseguir mediante un único devanado trifásico tres diferentes números de polos (y, por lo tanto, tres velocidades síncronas distintas). Para ello cada fase no se divide en dos mitades, sino en cuatro partes. Las tres velocidades se consiguen conectando en cada fase las cuatro partes serie, formando dos ramas en paralelo o formando cuatro ramas en paralelo. Esto aumenta el número de bornes en la caja de bornes y complica la conmutación del número de polos. Por estas razones, en la práctica este método no se suele emplear.

**VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD MODIFICANDO LA FRECUENCIA DEL ESTATOR**

## Variación de velocidad modificando la frecuencia $f_1$ del estator (1)

Se pretende variar la frecuencia  $f_1$  (con lo que se modifica la velocidad síncrona  $n_1$ ) manteniendo constante el flujo por polo  $\Phi_M$ .

De esta manera, para todas las frecuencias la máquina proporciona el mismo par (el par asignado  $M_N$ ) si la intensidad es la asignada  $I_{1N}$  y también conserva el mismo par máximo  $M_{\text{máx}}$  (ver mi texto [24] y el anexo C en la página 39 y siguientes).

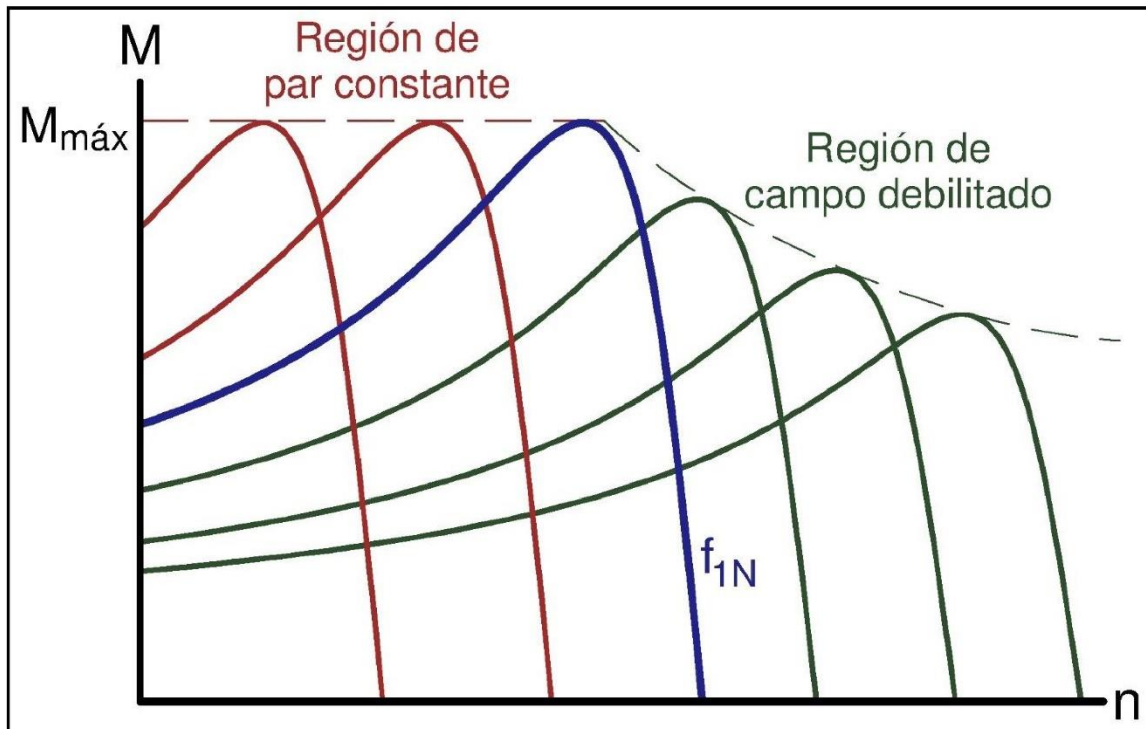


## Variación de velocidad modificando la frecuencia $f_1$ del estator (2)

- Para frecuencias  $f_1$  superiores a la asignada  $f_{1N}$  la f.e.m.  $E_1$  sería mayor que la asignada ( $E_1 = 4,44 N_1 \xi_{b1} f_1 \Phi_M$ ) y, consecuentemente, también la tensión  $V_1$  sería superior a la tensión asignada  $V_{1N}$ , lo que podría resultar peligroso.
- Por consiguiente, para frecuencias  $f_1$  por encima de la asignada  $f_{1N}$  ya no se mantiene el flujo  $\Phi_M$  constante sino que se deja constante la tensión  $V_1$ . Esta zona de funcionamiento se denomina **de campo debilitado**.
- Esto hace que el flujo y el par máximo disminuyan a medida que aumenta la frecuencia.
- Cuando  $f_1$  es menor que la frecuencia asignada  $f_{1N}$  la máquina trabaja en la región de par constante (y de flujo constante) y cuando trabaja por encima de  $f_{1N}$  la máquina está en la región de campo debilitado (con  $V_1$  constante).

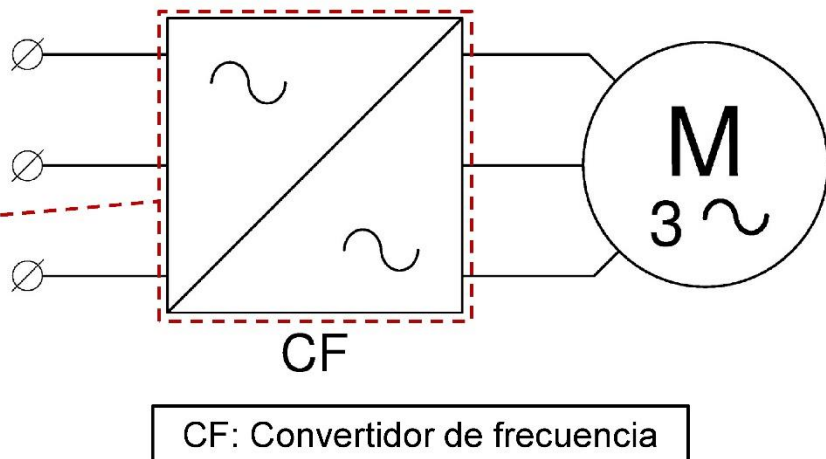


## Variación de velocidad modificando la frecuencia $f_1$ del estator. Curva de par



## Convertidor o variador de frecuencia

Fuente: Wikimedia Commons  
Autor: J. C. Cowie



**Tipos de convertidores o variadores de frecuencia** para la regulación de velocidad por variación de la frecuencia del estator  $f_1$ :

### 1. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión.

- En lazo abierto de velocidad.
- En lazo cerrado de velocidad.
- Sin frenado regenerativo.
- Con frenado regenerativo.

### 2. Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente.

(Siempre es en lazo cerrado de velocidad y admite el frenado regenerativo)



## Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión

$$E_1 = 4,44 N_1 \xi_{b1} f_1 \Phi_M \Rightarrow \Phi_M = \text{cte} \rightarrow \frac{E_1}{f_1} = \text{cte}$$

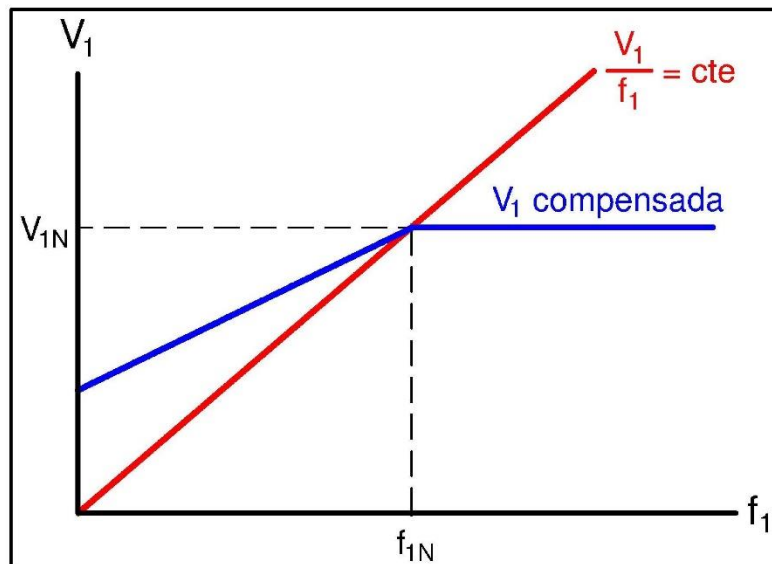
$$\bar{E}_1 = \bar{V}_1 - \bar{I}_1 (R_1 + j X_1) = \bar{V}_1 - \bar{I}_1 \bar{Z}_1$$

- Si el convertidor de frecuencia actúa como fuente de tensión y se quiere mantener constante el flujo  $\Phi_M$  para todas las frecuencias por debajo de  $f_{1N}$ , hay que variar la tensión  $V_1$  de forma que se mantenga constante el cociente  $E_1/f_1$ .
- Para conseguir que el cociente  $E_1/f_1$  fuera exactamente constante habría que variar  $E_1$  no sólo con  $f_1$  sino también con la corriente  $I_1$ .
- Usualmente la caída de tensión en  $Z_1$  es pequeña frente a  $V_1$  si el deslizamiento  $s$  no es grande y, por consiguiente,  $E_1 \approx V_1$ . Por lo tanto, en estas circunstancias, se puede adoptar esta aproximación:

$$\Phi_M = \text{cte} \rightarrow \frac{V_1}{f_1} = \text{cte}$$

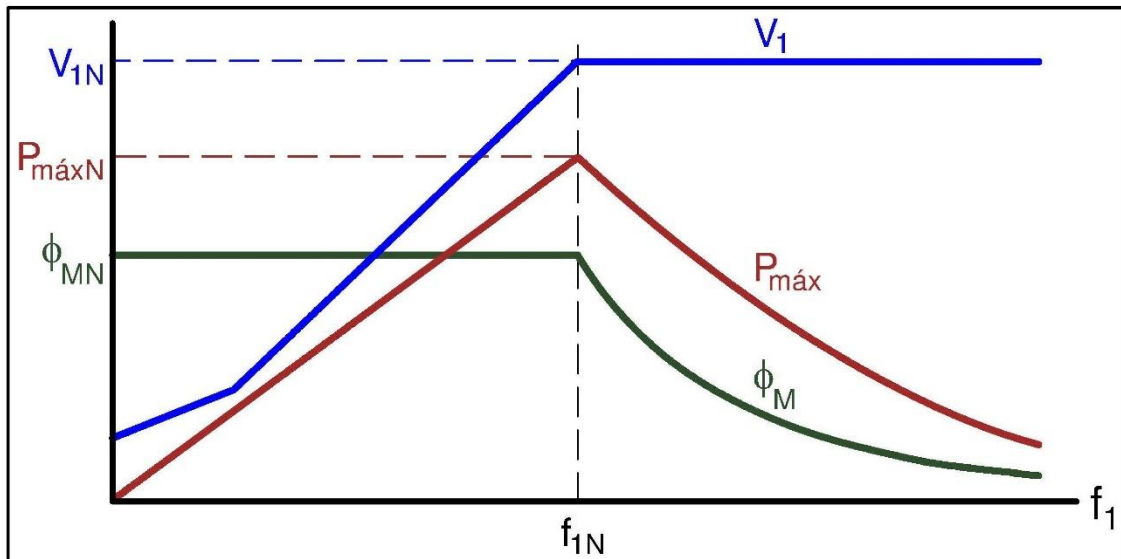
## Compensación de la tensión a bajas frecuencias

- A frecuencias pequeñas la f.e.m.  $E_1$  es pequeña y, en consecuencia, la caída de tensión en  $Z_1$  deja de ser despreciable frente a  $E_1$ .
- Esto hace que, a bajas frecuencias, para que  $\Phi_M$  sea constante la tensión  $V_1$  deba tener un valor mayor que el que se obtiene con la aproximación  $V_1/f_1 = \text{cte}$ .



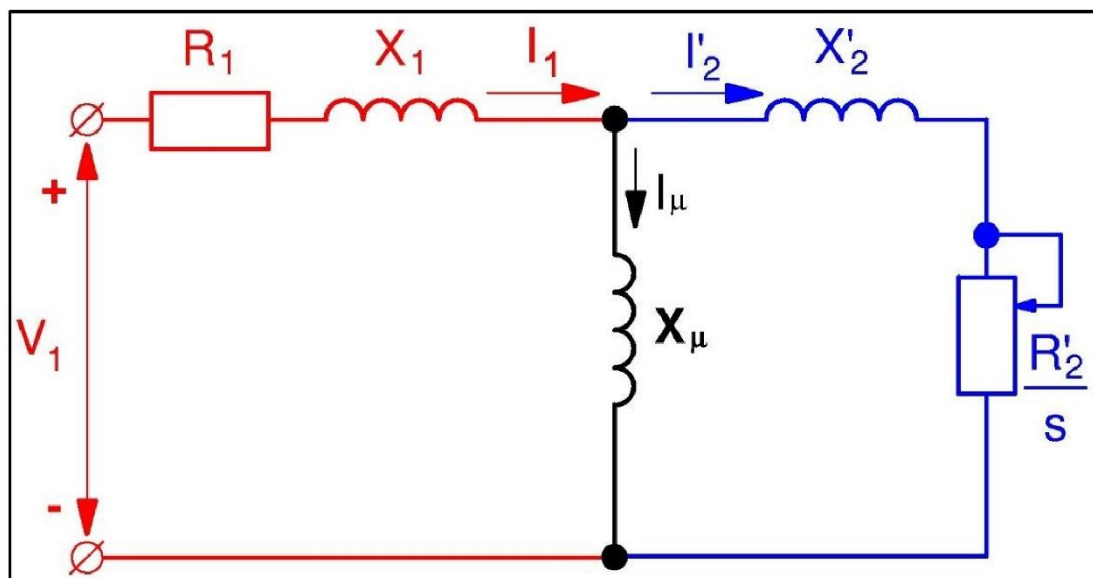
- Para tener esto en cuenta de una forma aproximada –lo que permite usar un convertidor de frecuencia más barato– se aumenta el valor de  $V_1$  a bajas frecuencias siguiendo una ley sencilla (usualmente lineal). En las figuras adjunta y siguiente se muestran dos de las formas de como se hace esto.

## Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión con compensación de la tensión a bajas frecuencias



En esta figura se muestra que para frecuencias por encima de  $f_{1N}$  la tensión  $V_1$  se mantiene constante, lo que hace que el flujo  $\Phi_M$  ya no sea constante y se vaya debilitando a medida que aumenta la frecuencia  $f_1$ .

## Circuito equivalente de un motor



Circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico en el que se ha despreciado la resistencia de pérdidas en el hierro  $R_{Fe}$ .

## Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente

- La estrategia para mantener el flujo  $\Phi_M$  constante –para frecuencias por debajo de  $f_{1N}$ – es actuar sobre la corriente  $I_1$  de forma que la corriente de excitación  $I_\mu$  se conserve constante.
- Del circuito equivalente de un motor (ver la figura anterior y mi texto [24]) se deduce que la ley de variación de  $I_1$  con  $f_1$  para mantener  $I_\mu$  constante es:

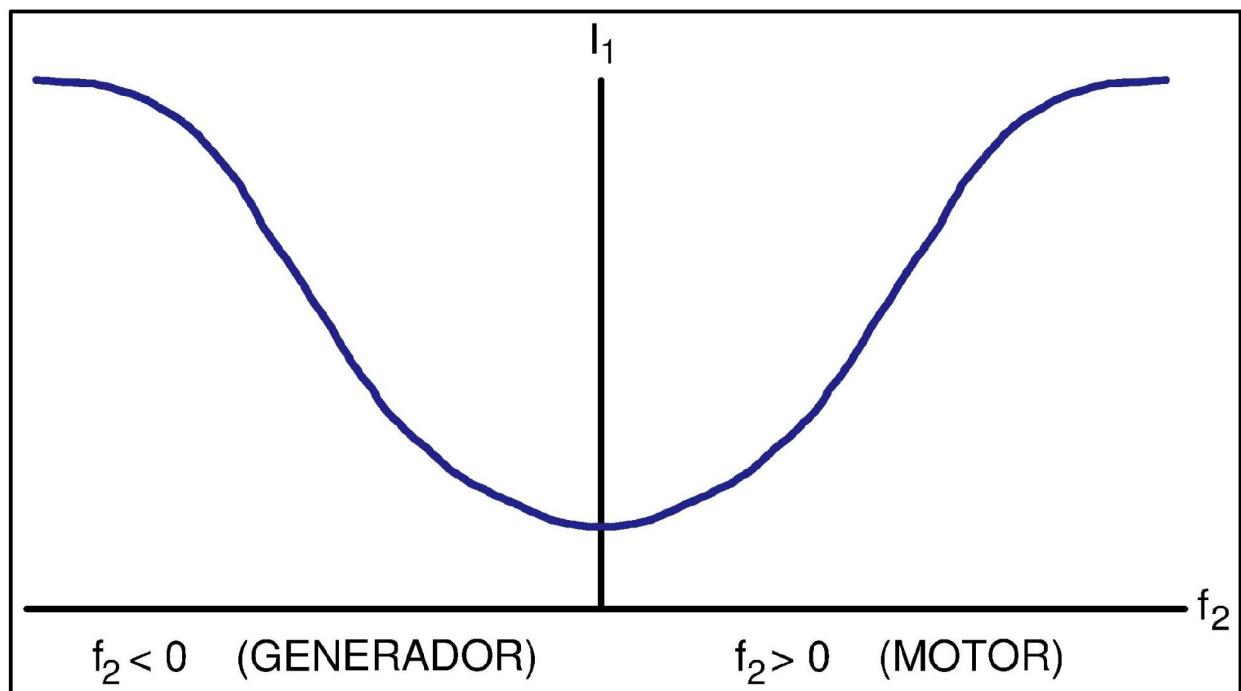
$$I_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{2\pi f_2}\right)^2 + (L'_2 + L_\mu)^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{2\pi f_2}\right)^2 + (L'_2)^2}} I_\mu$$

$$f_2 = s \cdot f_1$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1}$$

- Para mantener  $I_\mu$  (y  $\Phi_M$ ) constante hay que variar la corriente  $I_1$  en función solo de la frecuencia del rotor  $f_2$  (ver la figura siguiente), lo cual exige medir la velocidad del motor  $n$ . Por lo tanto, en este caso el convertidor de frecuencia funciona forzosamente con un control en lazo cerrado de velocidad.
- Para frecuencias por encima de la asignada  $f_{1N}$  (zona de campo debilitado) la corriente  $I_1$  se varía de forma que la tensión  $V_1$  se conserve constante.

## Ley de variación de la corriente del estator $I_1$ con la frecuencia $f_1$





## Control en lazo abierto y en lazo cerrado de velocidad

- Cuando el convertidor de frecuencia es una fente de tensión no es indispensable que el control de velocidad sea en lazo cerrado. Variando el valor eficaz de la tensión  $V_1$  con la frecuencia  $f_1$  de la forma que se ha visto antes se consigue que, para deslizamientos no muy grandes, el flujo permanezca prácticamente constante. Lo que sucede es que se controla la velocidad de sincronismo  $n_1$ , pero no el deslizamiento  $s$  y hay cierta indeterminación en la velocidad final que alcanza la máquina asíncrona.
- Evidentemente, también es posible que un convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión funcione en lazo cerrado de velocidad. Así se consigue un control más preciso de la velocidad, ya que el control en lazo cerrado permite tener en cuenta el deslizamiento.
- Algunos convertidores que actúan como fuente de tensión permiten que la potencia circule tanto hacia como desde la máquina asíncrona. Es decir, permiten que la máquina asíncrona también actúe como generador (luego, puede efectuar un **frenado regenerativo**). En este caso, la energía eléctrica que les envía la máquina asíncrona la devuelven a la red o la disipan en una resistencia.
- Por el contrario, existen convertidores que actúan como fuente de tensión y con los cuáles no se puede realizar el frenado regenerativo. No permiten que la potencia fluya de la máquina eléctrica hacia el convertidor.
- Cuando el convertidor actúa como fente de corriente es preciso que el control siempre sea en lazo cerrado de velocidad. Estos convertidores siempre permiten que la máquina asíncrona actúe como generador (permiten el frenado regenerativo) devolviendo energía a la red.

## Aumento de velocidad con control en lazo cerrado

- Seguidamente se va a estudiar como son las estrategias de control en **lazo cerrado de velocidad** para aumentar o disminuir la velocidad cuando el motor se mantiene funcionando en la zona de par (y flujo) constante.
- Recuerde que cuando la máquina asíncrona mantiene su flujo constante el par  $M$  es directamente proporcional a la frecuencia del rotor  $f_2$ , independientemente del valor de la frecuencia del estator  $f_1$  (ver mi texto [24]).
- Para aumentar la velocidad lo que se hace es acelerar aumentando la frecuencia  $f_1$  (manteniendo el flujo  $\Phi_M$  constante) a medida que varía la velocidad de la máquina de forma que, manteniendo la velocidad síncrona por encima de la de giro, la frecuencia rotórica  $f_2$  ( $f_2 = s \cdot f_1$ ) sea siempre la misma y que, además, tenga un valor tal que proporcione un par alto.
- El par durante la aceleración no se elige igual al par máximo  $M_{m\acute{a}x}$ , que parecería lo lógico, porque entonces la corriente del estator  $I_1$  sería demasiado grande. Normalmente el par durante la aceleración se elige igual a  $1,5 M_N$ . Con este elevado par la nueva velocidad se alcanza rápidamente.
- El convertidor también permite realizar un **arranque** suave, con un par elevado y con una corriente menor que en el arranque directo, ya que el arranque es también una maniobra de aumento de velocidad.

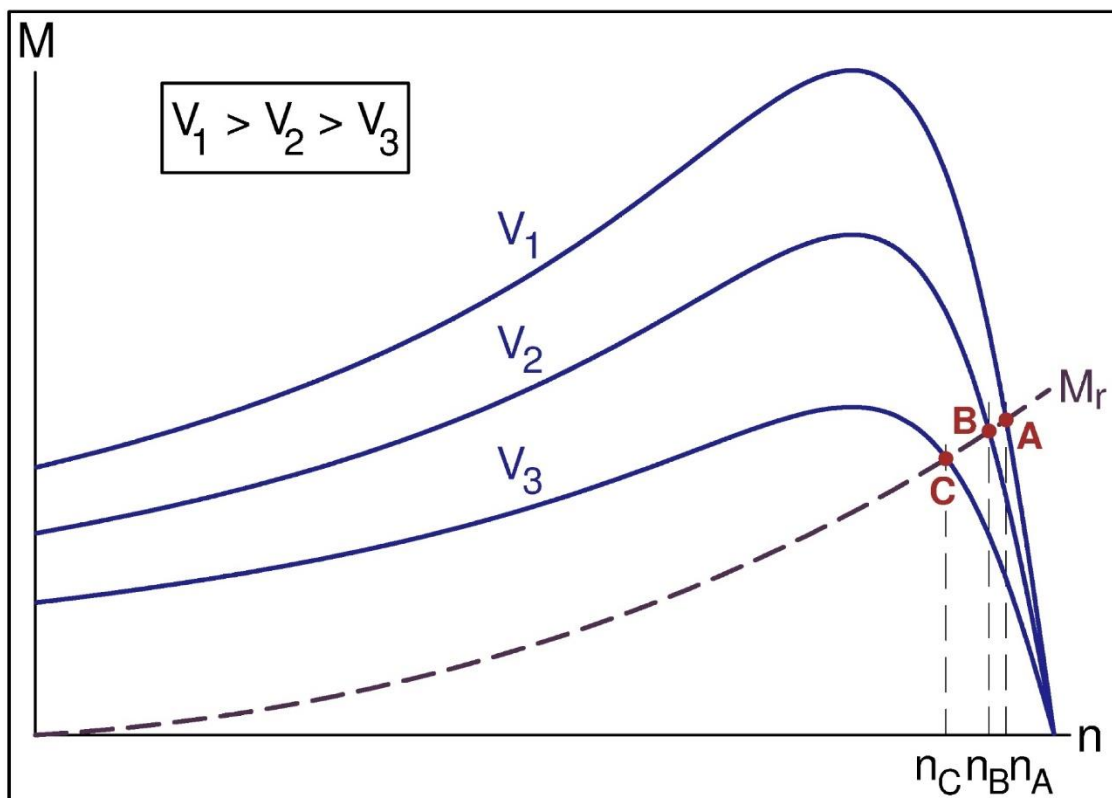
## Disminución de velocidad con control en lazo cerrado

- Disminuir la velocidad constituye una maniobra de frenado (como las que se estudian en mi texto [24]).
- Si el convertidor de frecuencia no admite el frenado regenerativo la estrategia consiste en desconectar la alimentación del motor y dejar que los rozamientos y la carga mecánica acoplada a la máquina asíncrona vayan decelerando al sistema hasta alcanzar la nueva velocidad. En ese momento se pasa a alimentar a la máquina con la frecuencia que la mantiene girando a la velocidad final.
- Si el convertidor admite el frenado regenerativo, la reducción de velocidad se acelera haciendo que la máquina asíncrona actúe como generador (frenado regenerativo) y proporcione un par de frenado elevado (aunque, como sucede al acelerar, no se llega al par generador máximo para evitar corrientes en el estator  $I_1$  elevadas). Para ello, durante el frenado la frecuencia  $f_1$  se va reduciendo al compás de la velocidad para conseguir que, manteniendo la velocidad síncrona por debajo de la de giro, la frecuencia rotórica  $f_2$  ( $f_2 = s \cdot f_1$ ) sea siempre constante y su valor sea el correspondiente al elevado par de frenado elegido.

### VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD MODIFICANDO EL DESLIZAMIENTO

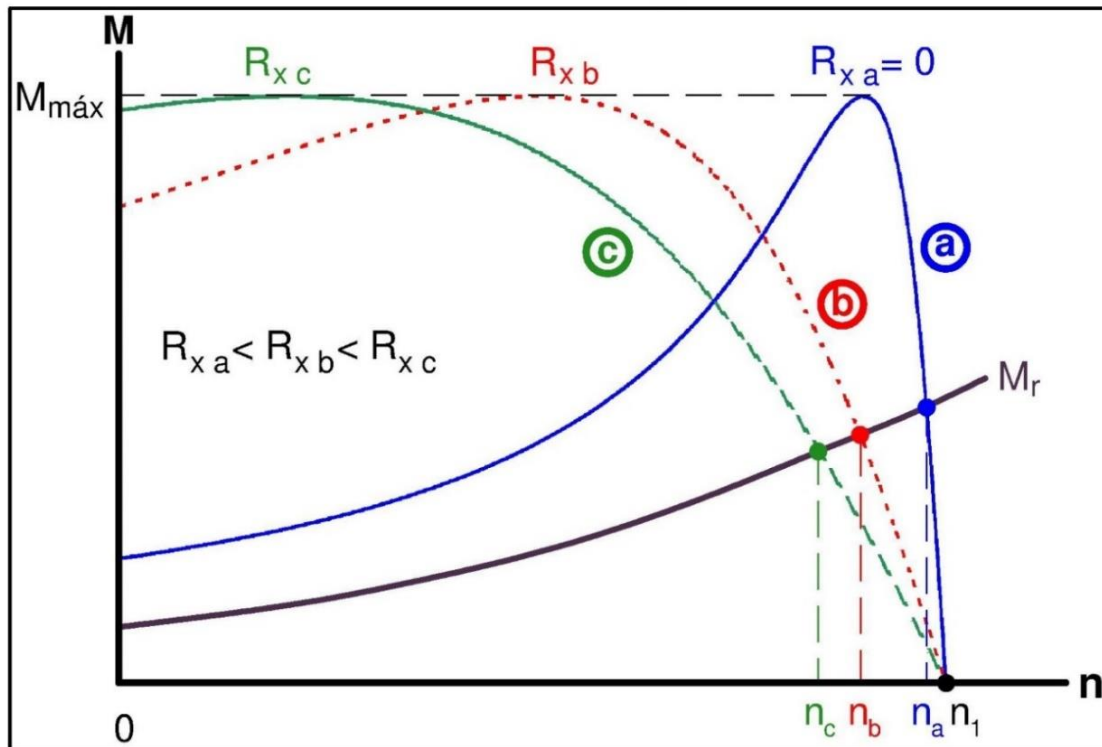
- Hay 3 métodos básicos de variar la velocidad a través del deslizamiento s:
  1. Mediante la tensión  $V_1$  del estator.
  2. Mediante resistencias en serie con el rotor. } *Sólo máquinas de rotor bobinado*
  3. Por inyección de una f.e.m. al rotor.
- En estos métodos, en general, lo que se hace es variar la velocidad dentro de un margen estrecho. Estos métodos también sirven para el arranque. (Ver mi texto [27]).
- La **variación de la velocidad mediante la tensión del estator  $V_1$**  se puede utilizar tanto en motores de jaula de ardilla como de rotor bobinado y su principio de funcionamiento se muestra en la figura siguiente (ver el anexo B).
- Es un método poco eficiente; al aumentar el deslizamiento crecen las pérdidas en el cobre del rotor  $P_{Cu2}$ , lo que incrementa la temperatura del motor.
- Además, al reducir la tensión  $V_1$  se disminuye cuadráticamente el par  $M$  que puede proporcionar la máquina.
- Se consigue una variación mayor de la velocidad con este método si se aplica en un motor que tiene una curva de par poco rígida, como los motores tipo D de NEMA.
- Este método es más interesante para cargas mecánicas cuyo par resistente  $M_r$  sea cuadrático (bombas, ventiladores, ...).

### Variación de velocidad mediante $V_1$ . Curvas de par



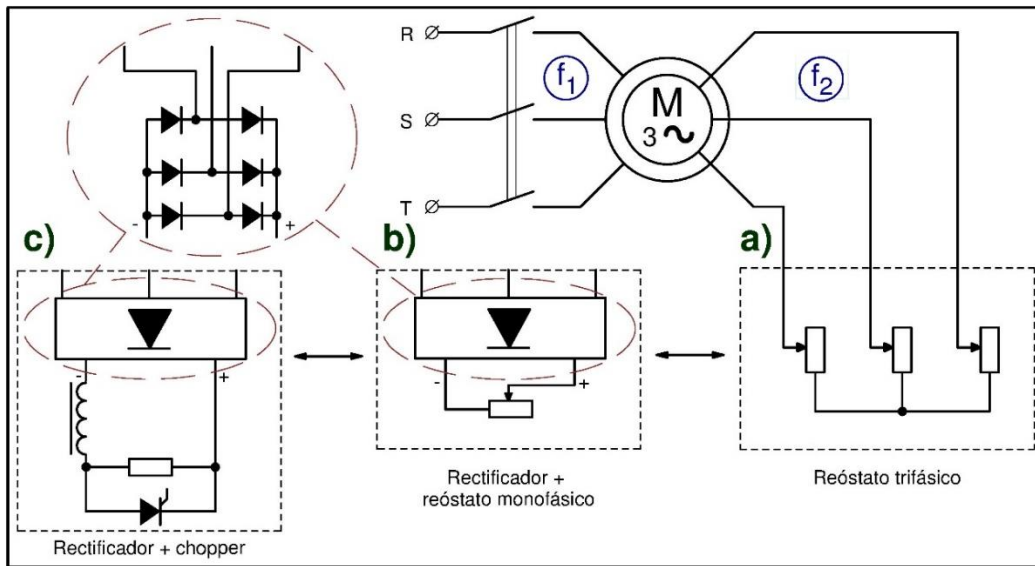


## Variación de velocidad mediante $R_2$ . Curvas de par



- La ***variación de la velocidad mediante resistencias en serie con las fases del rotor*** sólo se puede utilizar en motores de rotor bobinado (ver el anexo C).
- Con este método no se reduce la capacidad de la máquina para proporcionar par, como se aprecia en la figura precedente.
- También es poco eficiente; al aumentar el deslizamiento  $s$  crecen las pérdidas. Pero en este método este incremento de pérdidas se produce en el reóstato que se conecta al rotor, por lo que es este el que se calienta y no la máquina asíncrona.
- Existen sistemas que permiten la variación electrónica de la resistencia puesta en serie con cada fase del rotor (en la figura siguiente se muestra uno de los diferentes sistemas que se pueden emplear).
- La ***variación de la velocidad mediante inyección de una f.e.m. a cada fase del rotor*** sólo se puede utilizar en motores de rotor bobinado (ver el anexo C y mi texto [25]).
- En este método el incremento de pérdidas que, en principio, se produciría al aumentar el deslizamiento se recupera reinyectando esta potencia a la red a través de un convertidor de frecuencia y de un transformador (ver figura).
- Requiere un convertidor de menor potencia que el necesario para controlar la velocidad a través de la frecuencia del estator  $f_1$ .
- Con los convertidores adecuados este método permite a un motor asíncrono variar su velocidad no solo por debajo sino también por encima de la velocidad de sincronismo  $e$ , incluso, controlar su factor de potencia.

## Variación de velocidad mediante una resistencia en serie con cada fase del rotor

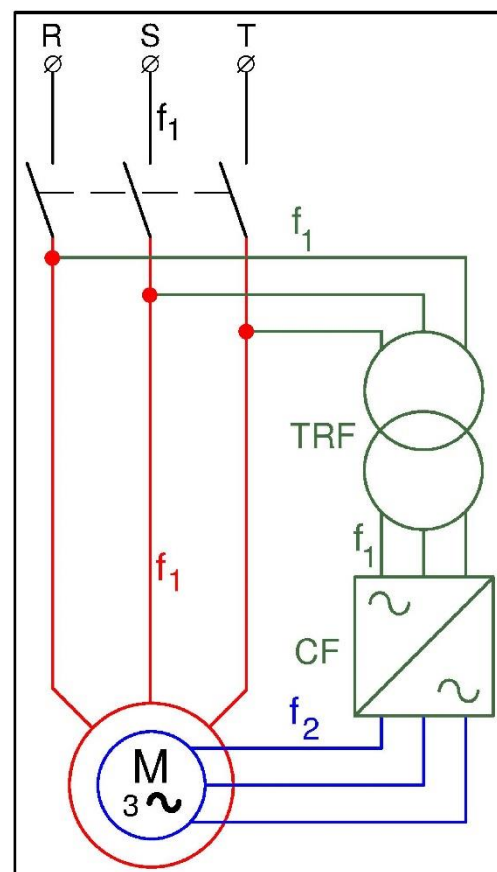


El sistema electrónico mostrado en **c)** varía la resistencia efectiva en el lado de continua del rectificador mediante un *chopper* (interruptor electrónico que se abre y se cierra periódicamente) puesto en paralelo con un reóstato monofásico. Esta resistencia efectiva varía entre cero y la resistencia del reóstato, dependiendo de la proporción entre los tiempos que el chopper está cerrado y está abierto.

## Variación de velocidad mediante inyección de una f.e.m. al rotor

Este sistema de variación de velocidad solo es aplicable a la máquina de anillos. Lo que se hace es alimentar el rotor con una tensión de frecuencia  $f_2$  regulable, para lo cual se usa un **convertidor de frecuencia** (también denominado **variador de frecuencia**). El estator se conecta directamente a la red de frecuencia  $f_1$ . Se dice entonces que la máquina está doblemente alimentada (ver mi texto [25]).

CF: Convertidor de frecuencia  
TRF: Transformador





## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 17: Guía de aplicación a los motores de inducción de jaula alimentados con convertidores*. UNE 203001-17. Madrid: AENOR, 2000. (Se corresponde con la norma CEI 60034-17 de 1998).
- [2] ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. *Máquinas eléctricas rotativas. Parte 8: Marcas en los bornes y sentido de giro*. UNE-EN 60034-8. Madrid: AENOR, 2008. (Se corresponde con la norma CEI 60034-8 de 2007).
- [3] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [4] APARICIO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Madrid: Saber Hoy, S. A. de Ediciones.
- [5] BOLDEA, I. 2006. *Variable speed generators*. Florida-U.S.A.: CRC Press, Taylor&Francis Group.
- [6] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [7] CHANDRASEKAR, L.; ANBUCHANDRAN, S.; SANKAR, R. Performance analysis of pole amplitude modulated three-phase squirrel-cage induction motor. *International Journal of Emerging Technology in Computer Science & Electronics (IJETCSE)*. March 2015, vol. 13, issue 1, p. 611-621.
- [8] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [9] CIRCUIT GLOBE. *Induction motor*. Está disponible en esta dirección web: <http://circuitglobe.com/category/electrical-terms/electrical-machines/induction-motor>
- [10] CORTES. 1977. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo 3: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [11] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [12] FITZGERALD, KINGSLEY y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [13] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [14] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 2*. Moscú: Editorial Mir.
- [15] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [16] LANGSDORF. 1977. *Teoría de las máquinas de corriente alterna* Méjico: McGraw-Hill.
- [17] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlín. Springer-Verlag.
- [18] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [19] PICHOR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [20] RAWCLIFFE, G. H.; BURBIDGE, B.; FONG, W. Induction-motor speed-changing by pole-amplitude modulation. *Proceedings of the IEE-Part A: Power Engineering*. August 1958, vol. 105, issue 22, p. 411-419.
- [21] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas caminos.pdf>
- [22] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2010. *Constitución de las máquinas eléctricas (Bobinados)*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/constitucion maq elec.pdf>
- [23] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2011. *Campo magnético en el entrehierro de las máquinas eléctricas simétricas (nivel avanzado)*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en la dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo magn entrehierro Web.pdf>

- [24] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2015. *Máquina asíncrona: Circuitos equivalentes simplificados. Otros pares*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Máquinas asíncronas. Otros circuitos eq. y pares.pdf>
- [25] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2016. *Máquina asíncrona doblemente alimentada*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Asíncrona doblemente alimentada.pdf>
- [26] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2017. *Frenado de máquinas asíncronas o de inducción*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Frenado asincronas Web.pdf>
- [27] RODRÍGUEZ POZUETA, Miguel Angel. 2017. *Arranque de motores asíncronos*. Santander: Universidad de Cantabria. Está disponible en esta dirección web: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Arranque Asincronas.pdf>
- [28] SANZ FEITO, J. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [29] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. y ROGER FOLCH, J. 1986. Control electrónico de velocidad de motores asíncronos. *Automática e instrumentación*. Mayo 1986, año 20, nº 158, p. 171-185.
- [30] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [31] SUÁREZ CREO, J. M. y MIRANDA BLANCO, B. N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Ediciones, S.L.
- [32] WEG. *Motors: Specification of Electric Motors*. Está disponible en esta dirección web: <http://ecatalog.weg.net/files/wegnet/WEG-specification-of-electric-motors-50039409-manual-english.pdf>
- [33] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

# ANEXO A: PARÁMETROS DE UN MOTOR DAHLANDER

En la Tabla A.I se muestra la relación aproximada que existe entre los parámetros del circuito equivalente de un motor Dahlander a sus dos velocidades. En dicha tabla se ha utilizado el subíndice A para la velocidad alta y el subíndice B para la velocidad baja.

*Tabla A.I: Relación entre los parámetros de un motor Dahlander*

| Conexión:     | $\frac{R_{1A}}{R_{1B}} = \frac{X_{1A}}{X_{1B}} =$ | $\frac{R'_{2A}}{R'_{2B}} = \frac{X'_{2A}}{X'_{2B}} \approx$ | $\frac{X_{ccA}}{X_{ccB}} \approx$ |
|---------------|---|---|-----------------------------------|
| <b>D - YY</b> | $\frac{1}{4} = 0,25$                              | $\frac{1}{8} = 0,125$                                       | $\frac{1}{5,75} = 0,174$          |
| <b>Y - YY</b> | $\frac{1}{4} = 0,25$                              | $\frac{1}{8} = 0,125$                                       | $\frac{1}{5,75} = 0,174$          |
| <b>YY - D</b> | 4   | 2   | 2,8                               |

(A: parámetros para la velocidad alta; B: parámetros para la velocidad baja)

No se va a desarrollar la demostración de esta tabla, pero sí se van a hacer algunas indicaciones sobre estos parámetros. Para empezar, es evidente que se verifica que:

$$p_B = 2 p_A \quad \Omega_{1A} = 2 \Omega_{1B} \quad (A.1)$$

Se ha supuesto que el motor cuando funciona a baja velocidad verifica las siguientes relaciones, similares a las de un motor tipo B de NEMA (ver mi texto [21]):

$$X_{1B} = 0,4 X_{ccB} \quad X'_{2B} = 0,6 X_{ccB} \quad (A.2)$$

A baja velocidad el devanado es por polos consecuentes y las bobinas son de paso diametral. Cuando el motor se conecta a la velocidad alta el devanado pasa a ser por polos y el número de polos se reduce a la mitad (ver la relación (A.1)). Esto hace que el paso polar sea el doble de ancho que a baja velocidad y, entonces, la bobina, cuyo ancho no varía, pase a estar acortada a la mitad del paso polar. En consecuencia, los factores de acortamiento a ambas velocidades son:

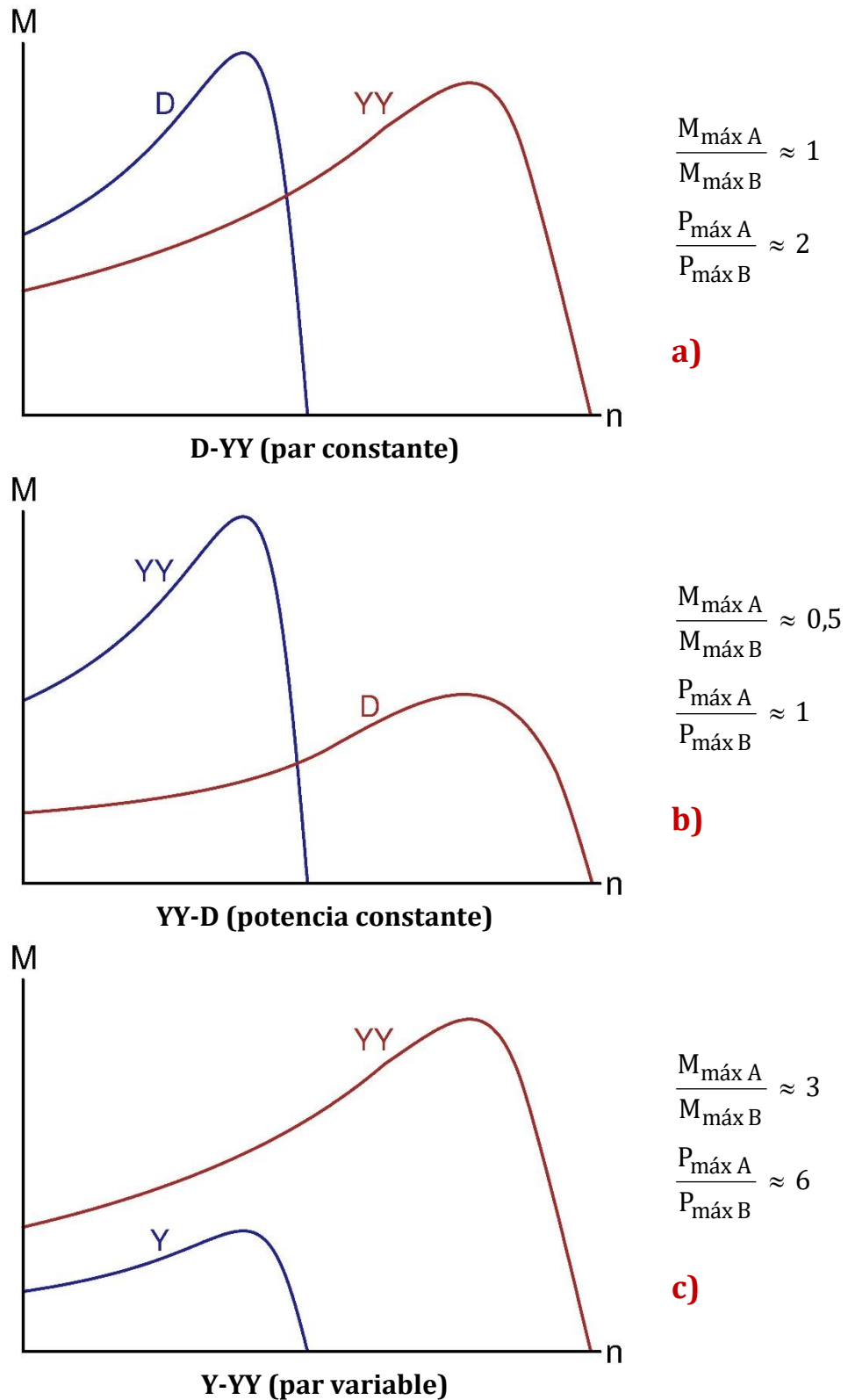
$$\xi_{a1B} = 1 \quad \xi_{a1A} = 0,707 \quad (A.3)$$

El factor de distribución también varía, pero la diferencia a ambas velocidades es pequeña. Por lo tanto, la Tabla A.I se ha obtenido suponiendo que los factores de bobinado del estator (productos de los respectivos factores de distribución y de acortamiento, como se indica en mi texto [23]) a ambas velocidades guardan esta proporción aproximada:

$$\frac{\xi_{b1A}}{\xi_{b1B}} \approx 0,7 \quad (A.4)$$

## VARIACIÓN DE VELOCIDAD EN MOTORES ASÍNCRONOS

De las relaciones entre los parámetros a alta y baja velocidad de la Tabla A.I se deduce como son las curvas de par a las dos velocidades de un motor Dahlander. En la Fig. A.1 se muestran estas curvas de par-velocidad para las distintas conexiones que se indicaron en la Tabla II.



*Fig. A.1: Curvas par-velocidad para diferentes conexiones de un motor Dahlander*

**ANEXO B: EJEMPLO DE CÁLCULO DE VARIOS SISTEMAS DE VARIACIÓN DE VELOCIDAD DE UN MOTOR TRIFÁSICO DAHLANDER**

Un motor asíncrono trifásico Dahlander D-YY tiene una tensión de línea y una frecuencia asignadas de  $V_{1NL} = 400 \text{ V}$  y  $f_1 = 50 \text{ Hz}$ , respectivamente. Sus características son:

Conexión triángulo (D):

$$2p = 4 \text{ polos} \quad R_1 = 1 \, \Omega \quad R'_2 = 2,4 \, \Omega \quad X_{cc} = 12 \, \Omega$$

Conexión doble estrella (YY):

$$2p = 2 \text{ polos} \quad R_1 = 0,25 \, \Omega \quad R'_2 = 0,3 \, \Omega \quad X_{cc} = 2,1 \, \Omega$$

Este motor mueve una carga que presenta un par resistente  $M_r$  constante, de tal manera que su velocidad cuando está conectado en triángulo a la tensión asignada es  $n = 1464 \text{ r.p.m.}$

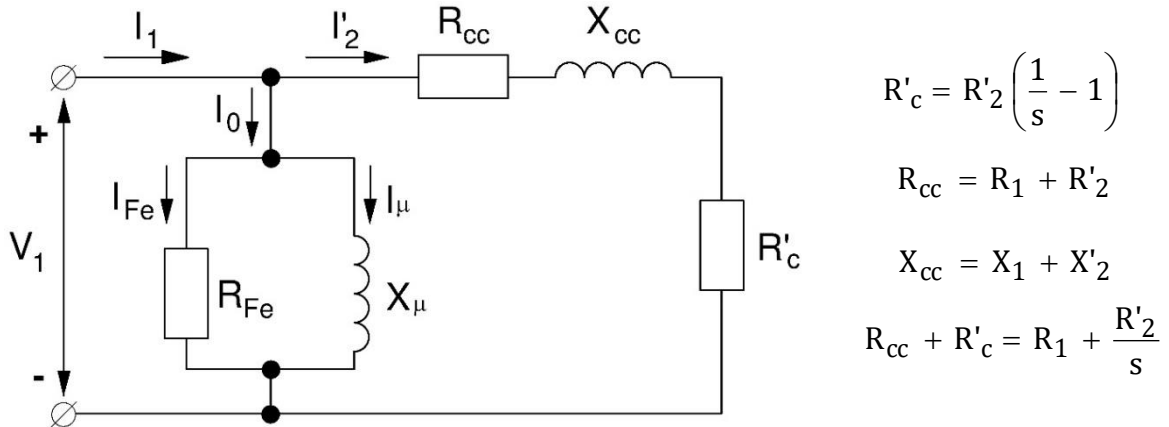
- a) En estas condiciones (conexión triángulo a la velocidad asignada) calcule el par que está desarrollando el motor y también su par máximo.
- b) Ahora, manteniendo la conexión triángulo, se quiere reducir la tensión para conseguir que el motor gire a  $1398 \text{ r.p.m.}$  ¿Cuál es la tensión de línea a la que es preciso alimentar a esta máquina?
- c) Por último, se conecta este motor en doble estrella (YY) y se lo alimenta con su tensión asignada. En estas condiciones ¿A qué velocidad girará? ¿Cuánto vale su par máximo?

**SOLUCIÓN:**

- a)  $M = 29,5 \text{ Nm}$ ;  $M_{\text{máx}} = 117 \text{ Nm}$
- b)  $V_{1L} = 253 \text{ V}$
- c)  $n = 2945 \text{ r.p.m.}$ ;  $M_{\text{máx}} = 108 \text{ Nm}$

**SOLUCIÓN DETALLADA:**

**Cuestiones preliminares**



*Fig. B.1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica con el rotor en cortocircuito*

- La ecuación del par cuando un motor asíncrono trifásico funciona alimentado con una fuente de tensión alterna trifásica es (ver la Fig. B.1 y mi texto [21]):

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{3x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2} \quad (B.1)$$

En la expresión anterior  $m_1$  es el número de fases del estator ( $m_1 = 3$  fases en una máquina trifásica) y se ha introducido la variable auxiliar  $x$  que va a facilitar los cálculos. La variable  $x$  se define mediante esta fórmula:

$$x = \frac{R'_2}{s} \quad \left( \Rightarrow s = \frac{R'_2}{x} \right) \quad (B.2)$$

- Observando la Fig. B.1 se deduce que la corriente del rotor reducida al estator  $I'_2$  se puede calcular así:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (B.3)$$

- Cuando el par es máximo el deslizamiento  $s_m$  y la variable auxiliar  $x_m$  correspondientes se calculan así:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad x_m = \frac{R'_2}{s_m} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} \quad (B.4)$$

**a) Motor conectado en triángulo a 400 V y 50 Hz y girando a 1464 r.p.m.**

- Cuando este motor está conectado en triángulo a 400 V y 50 Hz sucede que:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 400 \text{ V}}$$

$$2p = 4 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 2 \text{ pares de polos}}$$

$$(2): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,08 \text{ rad/s}}$$

- El deslizamiento para la velocidad  $n = 1464 \text{ r.p.m.}$  se calcula mediante la relación (3):

$$(3): \quad s = \frac{1500 - 1464}{1500} \Rightarrow \underline{s = 0,024}$$

Cuando la máquina está funcionando con este deslizamiento, la variable auxiliar  $x$  -definida mediante la relación (B.2)- vale:

$$(B.2): \quad x = \frac{2,4}{0,024} \Rightarrow \underline{x = 100 \Omega}$$

- El par motor  $M$ , que es igual al par resistente  $M_r$ , se puede calcular en este estado de funcionamiento mediante la relación (B.1):

$$(B.1): \quad M = \frac{3 \cdot 100}{157,08} \frac{400^2}{(1 + 100)^2 + 12^2} \Rightarrow \boxed{M = 29,5 \text{ Nm}}$$

- Con esta forma de conexión el valor de la variable auxiliar cuando el par es máximo  $x_m$  -que se puede calcular mediante la relación (B.4)- vale:

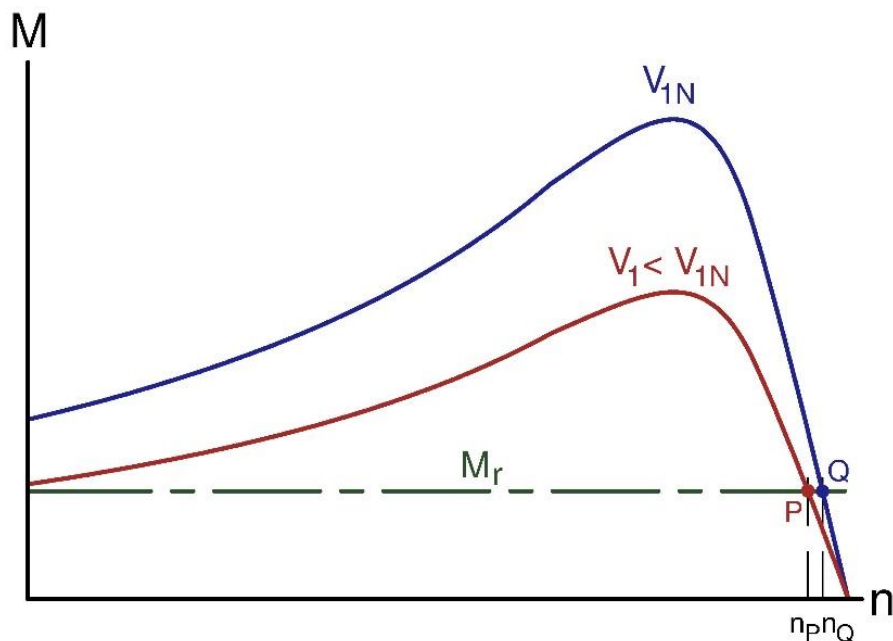
$$(B.4): \quad x_m = \sqrt{1^2 + 12^2} \Rightarrow \underline{x_m = 12,04 \Omega}$$

El par máximo se obtiene introduciendo este valor de  $x_m$  en la fórmula del par (B.1):

$$(B.1): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 12,04}{157,08} \frac{400^2}{(1 + 12,04)^2 + 12^2} \Rightarrow \boxed{M_{\text{máx}} = 117,2 \text{ Nm}}$$

- Cuando este motor está conectado en triángulo a la tensión y frecuencia asignadas, el par máximo vale  $M_{\text{máx}} = 117 \text{ Nm}$ . Con esta conexión y girando a la velocidad de  $n = 1464 \text{ r.p.m.}$  el par vale  $M = 29,5 \text{ Nm}$  y es igual al par resistente  $M_r$ .

**b) Motor conectado en triángulo a tensión reducida y 50 Hz y girando a 1398 r.p.m.**



*Fig. B.2: Efecto del cambio de la tensión del estator  $V_1$  sobre la velocidad*

- En la Fig. B.2 se muestra cómo se consigue variar la velocidad al disminuir la tensión con que alimenta a un motor que acciona una carga con un par resistente  $M_r$  constante. A la tensión asignada  $V_{1N}$  la velocidad es  $n_Q$  y a la tensión reducida la velocidad es  $n_P$ .
- Se desea que la nueva velocidad sea  $n = 1398$  r.p.m. A esta velocidad el deslizamiento  $s$  y la variable auxiliar  $x$  tienen los siguientes valores, que se han obtenido mediante las relaciones (3) y (B.2):

$$(3): \quad s = \frac{1500 - 1398}{1500} \Rightarrow \underline{s = 0,068}$$

$$(B.2): \quad x = \frac{2,4}{0,08} \Rightarrow \underline{x = 35,29 \, \Omega}$$

El par resistente tiene el mismo valor que en el apartado anterior ( $M_r = 29,5$  Nm), por lo que de la expresión (B.1) se deduce que se debe verificar esta igualdad:

$$(B.1): \quad 29,5 = \frac{3 \cdot 35,29}{157,08} \frac{V_1^2}{(1 + 35,29)^2 + 12^2} \Rightarrow \underline{V_1 = 253 \, V}$$

Dada la conexión triángulo del estator, la tensión de línea tiene este valor:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1L} = V_1 \Rightarrow \boxed{V_{1L} = 253 \, V}$$

- La tensión de línea necesaria para que el motor gire a  $n = 1398$  r.p.m. es  $V_{1L} = 253 \, V$ .



**c) Motor conectado en doble estrella a 400 V y 50 Hz**

- Con esta conexión sucede que:

$$\text{Estator con conexión estrella} \Rightarrow V_{1N} = \frac{V_{1NL}}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 231 \text{ V}}$$

$$2p = 2 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 1 \text{ par de polos}}$$

$$(2): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{1} \Rightarrow \underline{n_1 = 3000 \text{ r.p.m.}}$$

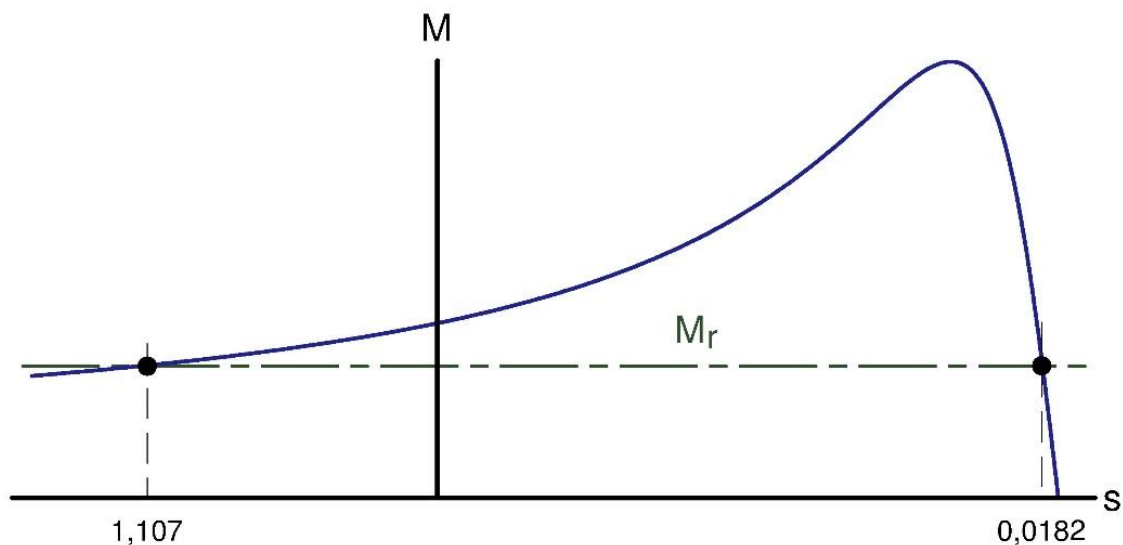
$$(2): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{1} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 314,16 \text{ rad/s}}$$

- El par resistente tiene el mismo valor que en los apartados anteriores ( $M_r = 29,5 \text{ Nm}$ ), por lo que partiendo de la expresión (B.1) se deduce que se debe verificar que:

$$(B.1): \quad 29,5 = \frac{3x}{314,16} \frac{231^2}{(0,25 + x)^2 + 2,1^2}$$

Operando sobre la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado cuya variable independiente es x. Al resolver esta ecuación se calculan dos valores de x, a partir de los cuales (mediante la relación (B.2)) se obtienen dos valores del deslizamiento s:

$$x = \begin{cases} 16,49 \Omega \\ 0,271 \Omega \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} 0,0182 \\ 1,107 \end{cases}$$



*Fig. B.3: Visualización sobre la curva del par de las soluciones obtenidas*

Estos dos valores del deslizamiento  $s$  se han mostrado sobre la curva par-velocidad en la Fig. B.3. Uno de ellos es mayor que 1 y corresponde al funcionamiento de la máquina asíncrona como freno a contracorriente, que no es como está funcionando ahora. Por lo tanto, el valor que hay que utilizar es el correspondiente a la zona de deslizamientos pequeños -es decir,  $s = 0,0182$ - donde la máquina actúa como motor en la zona estable.

- Conocidas la velocidad de sincronismo  $n_1$  y el deslizamiento  $s$ , la velocidad  $n$  se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 3000 (1 - 0,0182) \Rightarrow \boxed{n = 2945,4 \text{ r.p.m.}}$$

- Con esta nueva forma de conexión el valor de la variable auxiliar cuando el par es máximo  $x_m$  -que se puede calcular mediante la relación (B.4)- vale:

$$(B.4): \quad x_m = \sqrt{0,25^2 + 2,1^2} \Rightarrow \underline{x_m = 2,115 \Omega}$$

El par máximo se determina introduciendo este valor de  $x_m$  en la fórmula del par (B.1):

$$(B.1): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 2,115}{314,16} \frac{231^2}{(0,25 + 2,115)^2 + 2,1^2} \Rightarrow \boxed{M_{\text{máx}} = 107,7 \text{ Nm}}$$

Nótese que cuando se usa la conexión D-YY los valores del par máximo a ambas velocidades son casi iguales (ver la Fig. A.1a).

- Cuando este motor está conectado en doble estrella a la tensión y frecuencia asignadas, el par máximo vale  $M_{\text{máx}} = 108 \text{ Nm}$ . Con esta conexión y proporcionando un par de 29,5 Nm su velocidad es 2945 r.p.m.

**ANEXO C: EJEMPLO DE CÁLCULO DE VARIOS SISTEMAS DE VARIACIÓN DE VELOCIDAD DE UN MOTOR ASÍNCRONO TRIFÁSICO DE ROTOR BOBINADO**

Un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado y colector de anillos tiene estas características:

|                           |                                       |                            |
|---------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| $V_{1NL} = 400 \text{ V}$ | Estator conectado en <u>triángulo</u> | $f_{1N} = 50 \text{ Hz}$   |
| $R_1 = 0,1 \Omega$        | $R'_2 = 0,14 \Omega$                  | $X_{ccN} = 1,42 \Omega$    |
| $2p = 6 \text{ polos}$    | $m_i = m_v = 0,24$                    | $n_N = 980 \text{ r.p.m.}$ |

Este motor mueve una carga que presenta un par resistente  $M_r$  constante e igual al par asignado  $M_N$ .

- a)** Calcular la velocidad de este motor cuando tiene su rotor en cortocircuito y su estator se alimenta a 40 Hz mediante un convertidor de frecuencia que consigue mantener el flujo magnético constante e igual al flujo en condiciones asignadas.

Ahora se sigue dejando el rotor en cortocircuito y el estator se alimenta mediante otro convertidor de frecuencia que suministra una tensión que sigue esta ley:

$$\text{Si } f_1 < 50 \text{ Hz} \Rightarrow V_{1L} = 50 + 7 f_1$$

$$\text{Si } f_1 \geq 50 \text{ Hz} \Rightarrow V_{1L} = 400 \text{ V}$$

- b)** Calcular la velocidad cuando este convertidor proporciona 40 Hz.  
**c)** Calcular la velocidad cuando este convertidor proporciona 60 Hz.

Por último, el motor se lo mantiene alimentado a la tensión y frecuencia asignadas y ya no se deja su rotor en cortocircuito:

- d)** Calcular el valor óhmico de la resistencia  $R_x$  que hay que conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir que la máquina gire a 908,6 r.p.m.  
**e)** Se sustituye la resistencia  $R_x$  por un convertidor de frecuencia conectado al rotor. La tensión que proporciona este convertidor al rotor está en fase con la corriente. Calcular el valor eficaz  $V_{2L}$  y la frecuencia  $f_2$  de la tensión de línea que debe proporcionar este convertidor para que la máquina gire a la misma velocidad que en el apartado anterior. ¿Qué potencia activa  $P_2$  envía el rotor hacia el convertidor?

**NOTAS:**

- Expresar todas las velocidades en revoluciones por minuto (r.p.m.).
- El rotor está conectado en estrella.

**SOLUCIÓN:**

- a)**  $n = 780 \text{ r.p.m.}$   
**b)**  $n = 781 \text{ r.p.m.}$   
**c)**  $n = 1170 \text{ r.p.m.}$   
**d)**  $R_x = 8,68 \Omega$   
**e)**  $V_{2L} = 199 \text{ V}; f_2 = 4,57 \text{ Hz}; P_2 = 4578 \text{ W}$

**SOLUCIÓN DETALLADA:**

**Cuestiones preliminares**

- En este problema la frecuencia del estator  $f_1$  va a tomar diferentes valores. Por esta razón se distingue con la denominación  $f_{1N}$ ,  $n_{1N}$ ,  $\Omega_{1N}$  y  $X_{ccN}$  a los correspondientes valores de la frecuencia del estator  $f_1$ , de la velocidad de sincronismo ( $n_1$  en r.p.m. y  $\Omega_1$  en rad/s) y de la reactancia de cortocircuito  $X_{cc}$  cuando la máquina está funcionando en condiciones asignadas.
- Seguidamente se muestran las fórmulas para obtener algunas magnitudes de una máquina asíncrona.

La frecuencia de las corrientes del rotor  $f_2$  vale (ver mi texto [21]):

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad (C.1)$$

Partiendo de las relaciones (2) se deduce que la velocidad de sincronismo ( $n_1$  en r.p.m. o  $\Omega_1$  en rad/s) para una frecuencia  $f_1$  se puede calcular así:

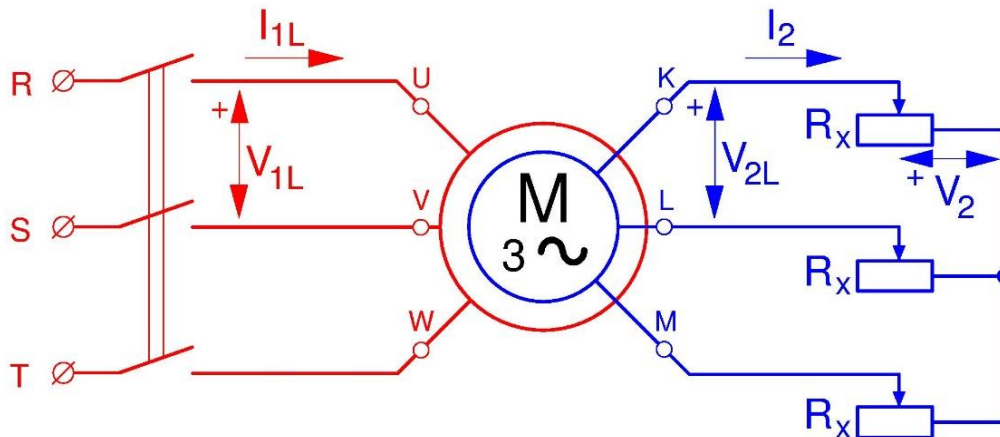
$$(2): \quad n_1 = \frac{f_1}{f_{1N}} n_{1N} \quad \Omega_1 = \frac{f_1}{f_{1N}} \Omega_{1N} \quad (C.2)$$

La impedancia de cortocircuito  $X_{cc}$  se puede determinar así:

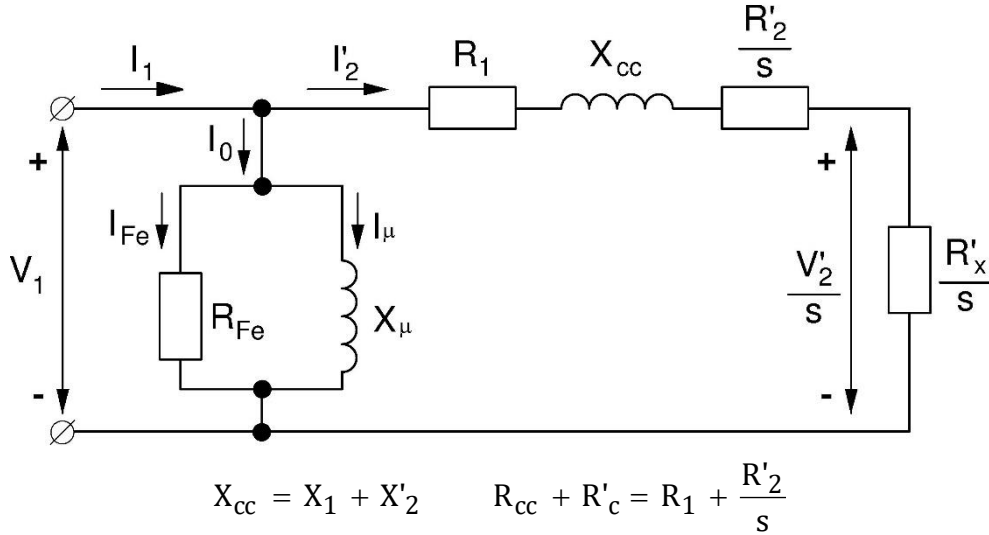
$$X_{cc} = 2 \pi f_1 L_{cc} \quad (C.3)$$

$$(C.3): \quad X_{cc} = X_{ccN} \frac{f_1}{f_{1N}} \quad (C.4)$$

- En la Fig. C.1 se muestra una máquina asíncrona de rotor bobinado y colector de anillos en la que se ha conectado un reóstato trifásico en el rotor de forma que cada fase del rotor tiene conectada en serie una resistencia  $R_x$ :



*Fig. C.1: Motor asíncrono de rotor bobinado con un reóstato trifásico en el rotor*



*Fig. C.2 :Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona trifásica en la que cada fase del rotor se conecta en serie con una resistencia  $R_x$*

La Fig. C.2 muestra el circuito equivalente aproximado del motor asíncrono de la Fig. C.1 (ver mi texto [25]). Comparando este circuito equivalente aproximado con el de una máquina asíncrona con el rotor en cortocircuito (Fig. B.1), se comprueba que las ecuaciones obtenidas para un motor con el rotor en cortocircuito valen también para un motor con un reóstato trifásico en serie con el rotor si en dichas ecuaciones se sustituye el parámetro  $R'_2$  por la suma  $(R'_2 + R'_x)$ , donde  $R'_x$  es la resistencia reducida al estator de una de las fases del reóstato.

Por consiguiente, de las relaciones (B.1), (B.2) y (B.3) se obtiene que:

$$(B.1): \quad \left. \begin{aligned} M &= \frac{m_1 \frac{R'_2 + R'_x}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \\ M &= \frac{3x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2} \end{aligned} \right\} \quad (C.5)$$

$$(B.2): \quad x = \frac{R'_2 + R'_x}{s} \quad \left( \Rightarrow s = \frac{R'_2 + R'_x}{x} \right) \quad (C.6)$$

$$(B.3): \quad I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (C.7)$$

Ahora la variable auxiliar  $x$  se define mediante la relación (C.6) y se comprueba que cuando las fórmulas (C.5) y (C.7) para el cálculo del par  $M$  y de la corriente  $I'_2$ , respectivamente, se expresan en función de  $x$  se obtienen exactamente las mismas fórmulas (B.1) y (B.3) del motor asíncrono con el rotor en cortocircuito.

También se deduce que, como es lógico, las fórmulas del motor con el rotor en cortocircuito (B.1), (B.2) y (B.3) se pueden considerar como un caso particular de las expresiones (C.5), (C.6) y (C.7) cuando la resistencia de las fases del reóstato tienen un valor nulo ( $R_x = 0$ ).

- Para reducir al estator las magnitudes del rotor que aparecen en la Fig. C.1 se usan las siguientes relaciones (ver mi texto [21]):

$$V'_2 = m_v \cdot V_2 \quad I'_2 = \frac{I_2}{m_i} \quad R'_x = m_i \cdot m_v \cdot R_x \quad (C.8)$$

En las fórmulas anteriores  $m_v$  es la relación de transformación de tensiones y  $m_i$  es la relación de transformación de intensidades. En un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado ambas relaciones de transformación tienen el mismo valor.

- El rotor de una máquina asíncrona trifásica de rotor bobinado está siempre conectado en estrella. Luego:

$$\text{Rotor con conexión estrella} \Rightarrow \begin{cases} I_{2L} = I_2 \\ V_{2L} = \sqrt{3} \cdot V_2 \end{cases} \quad (C.9)$$

- Observando la Fig. C.1 se aprecia que el reóstato también está en estrella. Por tanto, el rotor y el reóstato tienen las mismas tensión  $V_2$  e intensidad  $I_2$  de fase. Luego:

$$V_2 = R_x \cdot I_2 \quad V'_2 = R'_x \cdot I'_2 \quad (C.10)$$

$$P_2 = m_2 \cdot R_x \cdot I_2^2 \quad P_2 = m_1 \cdot R'_x \cdot I'^2_2$$

$$P_2 = 3 \cdot R_x \cdot I_2^2 \quad P_2 = 3 \cdot R'_x \cdot I'^2_2 \quad (C.11)$$

$P_2$  es la potencia activa que sale del rotor y se disipa en las resistencias del reóstato trifásico.  $m_1$  y  $m_2$  son, respectivamente, el número de fases del estator y del rotor. En un motor asíncrono trifásico de rotor bobinado tanto el estator como el rotor son trifásicos ( $m_1 = m_2 = 3$  fases), lo cual se ha tenido en cuenta en las relaciones (C.11).

### **Funcionamiento en condiciones asignadas**

- Cuando este motor está conectado en triángulo a 400 V y 50 Hz sucede que:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 400 \text{ V}}$$

$$2p = 6 \text{ polos} \Rightarrow \underline{p = 3 \text{ pares de polos}}$$

$$(2): \quad n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} \Rightarrow \underline{n_1 = 1000 \text{ r.p.m.}}$$

$$(2): \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{3} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 104,72 \text{ rad/s}}$$

- El deslizamiento  $s_N$  para la velocidad asignada  $n_N = 980$  r.p.m. se calcula mediante la relación (3):

$$(3): \quad s_N = \frac{1000 - 980}{1000} \Rightarrow \underline{s_N = 0,020}$$

La variable auxiliar en condiciones asignadas  $x_N$  -que se define mediante la relación (B.2)- vale:

$$(B.2): \quad x_N = \frac{0,14}{0,020} \Rightarrow \underline{x_N = 7 \Omega}$$

- El par asignado  $M_N$  se puede calcular introduciendo la variable  $x_N$  en la fórmula (B.1):

$$(B.1): \quad M_N = \frac{3 \cdot 7}{104,72} \frac{400^2}{(0,1 + 7)^2 + 1,42^2} \Rightarrow \underline{M_N = 612 \text{ Nm}} \quad (C.12)$$

- La frecuencia del rotor en condiciones asignadas  $f_{2N}$  se obtiene mediante (C.1):

$$(C.1): \quad f_{2N} = 0,02 \cdot 50 \Rightarrow \underline{f_{2N} = 1 \text{ Hz}}$$

#### a) Convertidor de frecuencia que suministra flujo constante y 40 Hz

- Cuando el flujo permanece constante sucede que el par de un motor es directamente proporcional a la frecuencia del rotor  $f_2$ , independientemente del valor de la frecuencia del estator  $f_1$ . Ahora el flujo y el par son los mismos que en condiciones asignadas, lo cual significa que la frecuencia del rotor también debe ser igual a la asignada ( $f_2 = f_{2N}$ ). Por lo tanto, teniendo presente la relación (C.1) se deduce que:

$$(C.1): \quad f_2 = f_{2N}; \quad f_2 = s \cdot f_1 \Rightarrow 1 = s \cdot 40 \Rightarrow \underline{s = 0,025}$$

- La velocidad de sincronismo para  $f_1 = 40$  Hz se puede calcular mediante (C.2):

$$(C.2): \quad n_1 = \frac{40}{50} 1000 \Rightarrow \underline{n_1 = 800 \text{ r.p.m.}}$$

- Conocidas la velocidad de sincronismo  $n_1$  y el deslizamiento  $s$ , la velocidad  $n$  se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 1000 (1 - 0,025) \Rightarrow \boxed{n = 780 \text{ r.p.m.}}$$

- Cuando este motor se alimenta mediante un convertidor de frecuencia que conserva el flujo constante y proporciona una frecuencia  $f_1 = 40$  Hz, la velocidad pasa a ser  $n = 780$  r.p.m.

**b) Convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y suministra 40 Hz**

- Con  $f_1 = 40$  Hz la tensión que suministra este convertidor es:

$$f_1 = 40 \text{ Hz} < f_{1N} \Rightarrow V_{1L} = 50 + 7 \cdot 40 \Rightarrow \underline{V_{1L} = 330 \text{ V}}$$

La tensión de fase  $V_1$  se determina teniendo en cuenta que el estator está conectado en triángulo:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_1 = V_{1L} \Rightarrow \underline{V_1 = 330 \text{ V}}$$

- Con una frecuencia  $f_1 = 40$  Hz se tienen estas magnitudes:

$$(C.2): \quad n_1 = \frac{40}{50} 1000 \Rightarrow \underline{n_1 = 800 \text{ r.p.m.}}$$

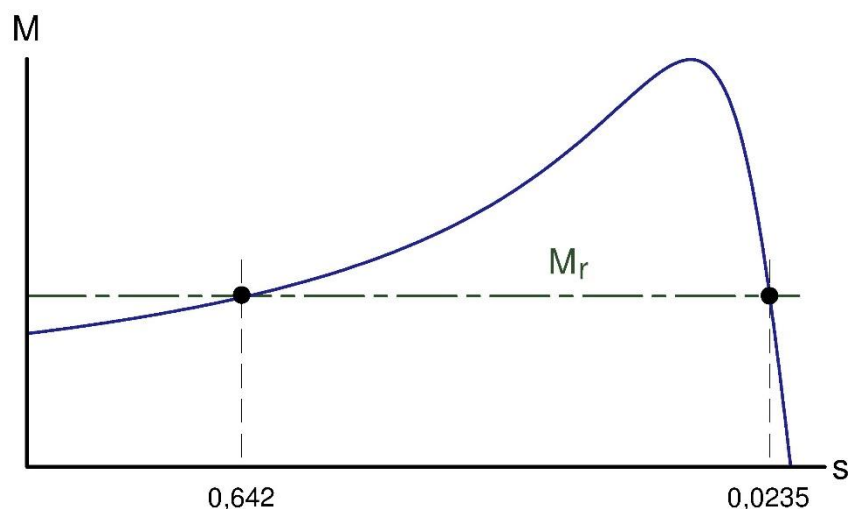
$$(C.2): \quad \Omega_1 = \frac{40}{50} 104,72 \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 83,78 \text{ rad / s}}$$

$$(C.4): \quad X_{cc} = \frac{40}{50} 1,42 \Rightarrow \underline{X_{cc} = 1,136 \Omega}$$

- Dado que el par resistente  $M_r$  es constante el motor ahora sigue proporcionando el par asignado ( $M_N = 612$  Nm) y la relación (B.1) se convierte en:

$$(B.1): \quad 612 = \frac{3 \cdot x}{83,78} \frac{330^2}{(0,1 + x)^2 + 1,136^2}$$

Operando sobre la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado cuya variable independiente es  $x$ . Al resolver esta ecuación se calculan dos valores de  $x$ , a partir de los cuales (mediante la relación (B.2)) se obtienen dos valores del deslizamiento  $s$ :



*Fig. C.3: Visualización sobre la curva del par de las soluciones obtenidas*



$$x = \begin{cases} 5,954 \, \Omega \\ 0,218 \, \Omega \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} 0,0235 \\ 0,642 \end{cases}$$

Estos dos valores del deslizamiento  $s$  se han mostrado sobre la curva par-velocidad en la Fig. C.3. Uno de ellos es inferior a 1, pero superior al deslizamiento de par máximo. Esto significa que corresponde a un funcionamiento como motor en la zona inestable, lo cual no es deseable. Por lo tanto, el valor que hay que utilizar es el correspondiente a la zona de deslizamientos pequeños, es decir,  $s = 0,0235$ , donde la máquina actúa como motor en la zona estable (ver mi texto [21]).

Conocidas la velocidad de sincronismo  $n_1$  y el deslizamiento  $s$ , la velocidad  $n$  se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 800 (1 - 0,0235) \Rightarrow \boxed{n = 781,2 \text{ r.p.m.}}$$

- La frecuencia del rotor  $f_2$  se obtiene mediante (C.1):

$$(C.1): \quad f_2 = 0,0235 \cdot 40 \Rightarrow \underline{f_2 = 0,94 \text{ Hz}}$$

Lógicamente, esta frecuencia es prácticamente igual a la que se tiene con el convertidor perfecto del apartado anterior. En consecuencia, también se obtienen unas velocidades muy similares con ambos convertidores.

- Cuando este motor se alimenta mediante un convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y proporciona de 330 V y 40 Hz, la velocidad pasa a ser  $n = 781 \text{ r.p.m.}$

### c) Convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y suministra 60 Hz

- Con  $f_1 = 60 \text{ Hz}$  la tensión que suministra este convertidor es:

$$f_1 = 60 \text{ Hz} \geq f_{1N} \Rightarrow \underline{V_{1L} = 400 \text{ V}}$$

La tensión de fase  $V_1$  se determina teniendo en cuenta que el estator está conectado en triángulo:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_1 = V_{1L} \Rightarrow \underline{V_1 = 400 \text{ V}}$$

- Con una frecuencia  $f_1 = 60 \text{ Hz}$  se tienen estas magnitudes:

$$(C.2): \quad n_1 = \frac{60}{50} 1000 \Rightarrow \underline{n_1 = 1200 \text{ r.p.m.}}$$

$$(C.2): \quad \Omega_1 = \frac{60}{50} 104,72 \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 125,66 \text{ rad / s}}$$

$$(C.4): \quad X_{cc} = \frac{60}{50} 1,42 \Rightarrow \underline{X_{cc} = 1,704 \, \Omega}$$

- Dado que el par resistente  $M_r$  es constante el motor ahora sigue proporcionando el par asignado y la relación (B.1) se convierte en:

$$(B.1): \quad 612 = \frac{3 \cdot x}{125,66} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + 1,704^2}$$

Operando sobre la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado cuya variable independiente es  $x$ . Al resolver esta ecuación se calculan dos valores de  $x$ , a partir de los cuales (mediante la relación (B.2)) se obtienen dos valores del deslizamiento  $s$ :

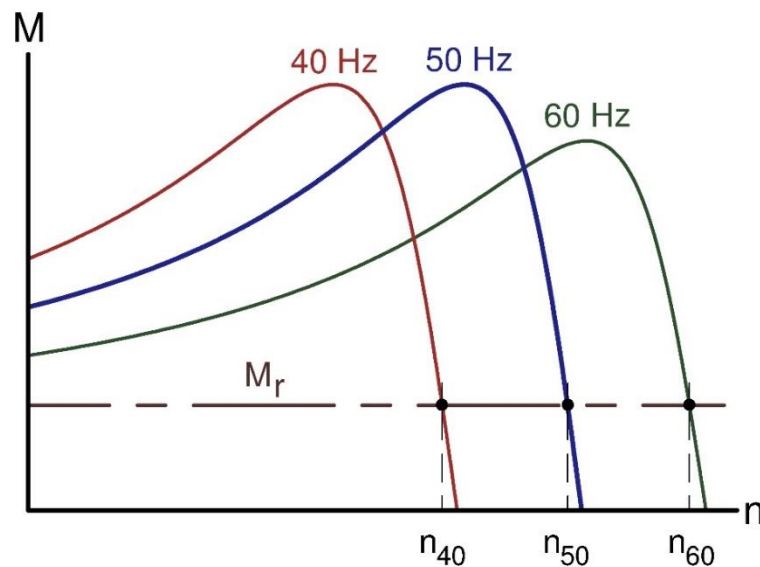
$$x = \begin{cases} 5,513 \, \Omega \\ 0,529 \, \Omega \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} 0,0254 \\ 0,265 \end{cases}$$

Razonando como en el apartado anterior se deduce que la solución correcta es  $s = 0,0254$ .

Conocidas la velocidad de sincronismo  $n_1$  y el deslizamiento  $s$ , la velocidad  $n$  se obtiene rápidamente utilizando la relación (4):

$$(4): \quad n = 1200 (1 - 0,0254) \Rightarrow \boxed{n = 1169,5 \text{ r.p.m.}}$$

La Fig. C.4 muestra cómo son las velocidades a la que gira este motor cuando el convertidor le proporciona 40, 50 y 60 Hz, respectivamente, y debe mover una carga mecánica con un par resistente  $M_r$  constante.



*Fig. C.4: Variación de velocidad mediante un convertidor de frecuencia en el estator*

- Cuando este motor se alimenta mediante un convertidor de frecuencia que actúa como fuente de tensión y proporciona de 400 V y 60 Hz, la velocidad pasa a ser  $n = 1170 \text{ r.p.m.}$

**d) Motor alimentado a 400 V y 50 Hz y con una resistencia  $R_x$  en serie con cada fase del rotor para que gire a  $n = 908,6$  r.p.m.**

- Ahora la máquina está a su tensión y frecuencia asignadas y tiene un reóstato trifásico conectado en serie con el rotor; es decir, está conectada como se muestra en la Fig. C.1.
- El deslizamiento  $s$  para la velocidad  $n = 908,6$  r.p.m. se calcula mediante la relación (3):

$$(3): \quad s = \frac{1000 - 908,6}{1000} \Rightarrow \underline{s = 0,0914}$$

- El motor debe proporcionar un par  $M$  igual al par resistente  $M_r$ , que es igual al par asignado ( $M_r = M_N = 612$  Nm). Luego, aplicando la fórmula (C.5) se obtiene esta igualdad:

$$(C.5): \quad 612 = \frac{3 \cdot x}{104,72} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + 1,42^2} \quad (C.13)$$

La igualdad anterior permite despejar la variable auxiliar  $x$ . Sin embargo, no es necesario resolver dicha igualdad, ya que si se la compara con la expresión (C.12) que se utilizó para calcular el par asignado  $M_N$ , es fácil comprobar que se debe cumplir que:

$$(C.12) \text{ y } (C.13): \quad x = x_N = 7 \, \Omega$$

Teniendo en cuenta que ahora la variable auxiliar  $x$  se define mediante la relación (C.6) se deduce que:

$$(C.6): \quad x = 7 = \frac{0,14 + R'_x}{0,0914} \Rightarrow \underline{R'_x = 0,5 \, \Omega}$$

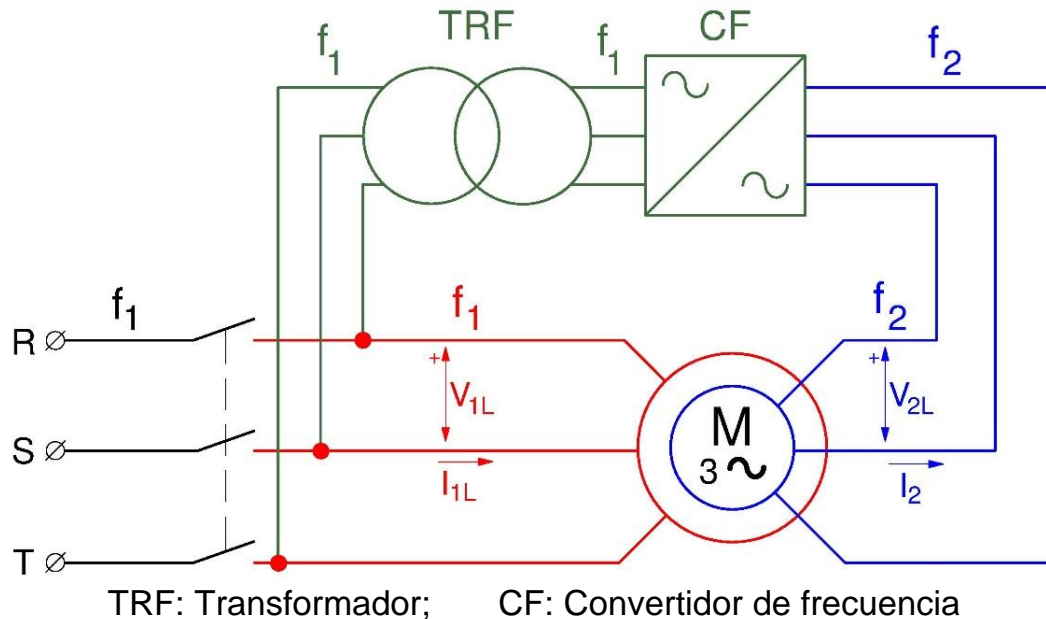
Finalmente, según (C.8) el verdadero valor -sin reducir al estator- de la resistencia  $R_x$  puesta en serie con cada fase del rotor debe valer:

$$(C.8): \quad R_x = \frac{R'_x}{m_v \cdot m_i} = \frac{0,5}{0,24 \cdot 0,24} \Rightarrow \boxed{R_x = 8,68 \, \Omega}$$

- Cuando esta máquina tiene su estator a la tensión y frecuencia asignadas y se desea que gire a una velocidad  $n = 908,6$  r.p.m., es preciso conectar un reóstato trifásico de tal forma que cada fase del rotor quede en serie con una resistencia  $R_x = 8,68 \, \Omega$ .

e) Motor alimentado a 400 V y 50 Hz y con un convertidor de frecuencia en el rotor que lo hace girar a  $n = 908,6$  r.p.m.

•



*Fig. C.5 : Motor asíncrono trifásico con un convertidor de frecuencia en el rotor*

La Fig. C.5 muestra cómo se conecta ahora el motor asíncrono de rotor bobinado. El estator está a su tensión y frecuencia asignadas y, a través del colector de anillos, el rotor se conecta a un convertidor de frecuencia (junto con un transformador) que es capaz de devolver a la red la potencia activa  $P_2$  (menos unas pequeñas pérdidas) que le suministra el rotor. En mi texto [25] se estudia de forma detallada el comportamiento de una máquina asíncrona conectada de esta manera.

El convertidor de frecuencia es tal que, en cada fase del rotor, la tensión  $V_2$  y la corriente  $I_2$  están en fase. Por lo tanto, el rotor está exactamente en las mismas condiciones que en el apartado anterior, en el que se conectaba un reóstato trifásico al rotor. La diferencia entre ambas formas de funcionamiento consiste en que la potencia  $P_2$  antes se disipaba en forma de calor en las resistencias  $R_x$  del reóstato y ahora dicha potencia  $P_2$  -menos unas pequeñas pérdidas en el convertidor y en el transformador- se recupera y se reinyecta a la red eléctrica.

Dado que el rotor está en las mismas condiciones que en el apartado anterior, se van a calcular sus magnitudes suponiendo que tiene conectado el reóstato trifásico que se estudió anteriormente.

- La corriente del rotor reducida al estator  $I'_2$  se obtiene mediante (C.7):

$$(C.7): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 7)^2 + 1,42^2}} \Rightarrow \underline{I'_2 = 55,24 \text{ A}}$$

La verdadera corriente  $I_2$  -sin reducir al estator- que circula por las fases del rotor se puede despejar de (C.8):

$$(C.8): \quad I_2 = m_i \cdot I'_2 = 0,24 \cdot 55,24 \Rightarrow \underline{I_2 = 13,26 \text{ A}}$$

- La tensión de fase  $V_2$  y la potencia activa  $P_2$  del rotor se van a calcular mediante las fórmulas (C.10) y (C.11), respectivamente:

$$(C.10): \quad V_2 = 8,68 \times 13,26 \Rightarrow \underline{V_2 = 115,1 \text{ V}}$$

$$(C.11): \quad P_2 = 3 \times 8,68 \times 13,26^2 \Rightarrow \boxed{P_2 = 4578 \text{ W}}$$

Dada la conexión estrella del rotor, la tensión entre fases  $V_{2L}$  se calcula empleando la relación (C.9):

$$(C.9): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 115,1 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 199,4 \text{ V}}$$

- La frecuencia  $f_2$  de las corrientes del rotor se obtiene mediante la fórmula (C.1):

$$(C.1): \quad f_2 = 0,0914 \cdot 50 \Rightarrow \boxed{f_2 = 4,57 \text{ Hz}}$$

- Cuando esta máquina tiene su estator a la tensión y frecuencia asignadas y se desea que gire a una velocidad  $n = 908,6 \text{ r.p.m.}$ , es preciso conectar a su rotor un convertidor de frecuencia que suministra una tensión de línea  $V_{2L} = 199 \text{ V}$  con una frecuencia  $f_2 = 4,57 \text{ Hz}$  y que demanda al rotor una potencia activa  $P_2 = 4578 \text{ W}$ .

### Comparación entre variar la velocidad colocando un convertidor de frecuencia en el estator y en el rotor

- En el caso que se acaba de analizar, con un convertidor de frecuencia en el rotor, la potencia útil que suministra el motor vale

$$P_u = \Omega \cdot M_u = \frac{2\pi}{60} n \cdot M_u = \frac{2\pi}{60} 908,6 \times 612 \Rightarrow \underline{P_u = 58231 \text{ W}}$$

Suponiendo que el rendimiento del motor en este estado fuera  $\eta = 93\%$ , resulta que la potencia activa  $P_1$  que absorbe por el estator es

$$P_1 = \frac{P_u}{\eta} = \frac{58231}{0,93} \Rightarrow \underline{P_1 = 62614 \text{ W}}$$

La relación entre la potencia activa  $P_2$  que sale del rotor y la potencia activa  $P_1$  que entra por el estator vale

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4578}{62614} = 0,0731 \Rightarrow \underline{\frac{P_2}{P_1} = 7,31\%}$$

En general, esta relación entre las potencias activas del rotor  $P_2$  y del estator  $P_1$  es tanto mayor cuanto mayor es el deslizamiento  $s$  al que esté funcionando el motor asíncrono.

- El resultado obtenido anteriormente indica que para conseguir la misma velocidad de giro de este motor (908,6 r.p.m.) mediante un convertidor de frecuencia en el rotor se necesita un convertidor de solamente un 7,31% de la potencia del convertidor que sería necesario para variar la velocidad actuando sobre la frecuencia del estator  $f_1$ .

Es decir, se necesita un convertidor de frecuencia más pequeño y, por consiguiente, más económico si se regula la velocidad conectando el convertidor al rotor en vez de al estator. Esto es tanto más cierto cuanto más pequeño sea el máximo deslizamiento que se desea conseguir.

En general, salvo que se desee alcanzar deslizamientos elevados, cuando se varía la velocidad se necesita un convertidor de frecuencia más barato si se conecta al rotor en lugar de al estator. Pero esto solamente se puede hacer si se utiliza un motor asíncrono de rotor bobinado que es una máquina más cara y delicada y que requiere más mantenimiento que un motor de jaula de ardilla.

Normalmente, lo que se ahorra en el convertidor cuando se conecta al rotor no compensa lo que se encarece el equipo porque motor tenga que ser de rotor bobinado y, además, haya que colocar un transformador entre el convertidor y la red eléctrica. Por esta razón, es mucho más frecuente el empleo de motores de jaula de ardilla cuya velocidad se varía actuando sobre la frecuencia del estator  $f_1$  mediante un convertidor de frecuencia conectado a su estator.