UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

MÁQUINAS SÍNCRONAS:

OSCILACIONES PENDULARES. ESTABILIDAD DINÁMICA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

OSCILACIONES PENDULARES. ESTABILIDAD DINÁMICA

1. INTRODUCCIÓN

Existen muchas situaciones en las que en una máquina síncrona se producen *oscilaciones pendulares*; es decir, un movimiento oscilante del rotor alrededor de un punto de equilibrio que se superpone a su movimiento de giro a velocidad constante de sincronismo.

Es sabido que cuando una máquina síncrona está acoplada a una red de potencia infinita, las variaciones del ángulo de par δ se manifiestan como movimientos físicos del rotor superpuestos al movimiento de giro a la velocidad de sincronismo.

Así pues, supóngase una máquina síncrona en red de potencia infinita y funcionando en régimen estable en un punto de equilibrio con un ángulo de par dado. Si se produce un cambio brusco de su estado (por ejemplo, por variación rápida del par o de la corriente de excitación) que la lleve a un nuevo punto de equilibrio con un nuevo valor del ángulo de par, la transición de un estado a otro no será directa. En efecto, se producirán una serie de oscilaciones pendulares alrededor del nuevo punto de equilibrio (superpuestas al movimiento de giro a velocidad de sincronismo) que se irán amortiguando con el tiempo hasta que, finalmente, la máquina alcance el nuevo equilibrio.

De forma análoga, supóngase ahora una máquina síncrona en red de potencia infinita funcionando en un punto de equilibrio estable y que se produce una perturbación transitoria que, temporalmente, la aparta del punto de equilibrio. Cuando la perturbación desaparezca la máquina volverá al punto de equilibrio realizando unas oscilaciones pendulares alrededor del mismo que se amortiguan con el tiempo.

Este tipo de oscilaciones pendulares descritas hasta ahora y que se producen en máquinas conectadas a una red de potencia infinita se denominan *oscilaciones libres*. Estas oscilaciones se deben a la existencia de un *par sincronizante* (véase el apartado donde se analizó la estabilidad estática) que tiende a llevar el rotor a la posición de equilibrio y que es similar al par elástico de un resorte.

Independientemente de que la máquina funcione aislada o en red, hay ocasiones en las que el par del motor que la mueve, si funciona como generador, o de la carga mecánica que debe accionar, si funciona como motor, no es constante sino que varía periódicamente en el tiempo. Esto sucede en los motores de explosión (de gasolina o Diesel) o en los compresores y bombas alternativos. Este par periódico provoca la aparición de unas oscilaciones pendulares denominadas *oscilaciones forzadas*.

Si las oscilaciones pendulares, tanto libres como forzadas, son lo suficientemente grandes puede suceder que no se amortigüen y provoquen un aumento continuado el ángulo de par. Esto da lugar a que la máquina pierda el sincronismo (no pueda mantener la velocidad de sincronismo). Esta situación debe evitarse, por lo que es importante el estudio de la estabilidad de la máquina frente a las situaciones que originan oscilaciones pendulares (*estabilidad dinámica*).

2. PARES A CONSIDERAR EN LAS OSCILACIONES PENDULARES

Considérese una máquina síncrona con el convenio de signos generador. Si trabaja en un punto de equilibrio estable, el ángulo de par δ permanecerá constante y se tendrá este equilibrio de pares mecánico y de la máquina síncrona:

$$M_m = M \tag{1}$$

$\mathbf{M_m}$ es el *par mecánico* de la máquina motriz (turbina de gas, hidráulica, …) que acciona a la máquina síncrona (tendrá signo negativo si la máquina síncrona funciona como motor moviendo una carga mecánica. En este caso, M_m es el par de esta carga).

M es el *par eléctrico de la máquina síncrona*. Es positivo cuando actúa como generador y, en consecuencia, M es un par de frenado opuesto al par del motor M_m. M es negativo si la máquina síncrona actúa como motor venciendo el par resistente M_m de la carga mecánica.

Mientras se producen oscilaciones pendulares la máquina no está en equilibrio, la velocidad Ω tiene oscilaciones y no se verifica la igualdad de pares (1). En este caso, aparecen nuevos pares y la ecuación mecánica pasa a ser:

$$M_m = M + M_i + M_a \tag{2}$$

$\mathbf{M_i}$ es el *par de inercia* producido por las variaciones en la velocidad.

$\mathbf{M_a}$ es el *par amortiguador* debido a los rozamientos y, sobre todo, a la acción del devanado amortiguador.

A continuación se van a analizar estos pares.

2.1. Par mecánico M_m

El par mecánico es constante en muchas ocasiones. Esto sucede en máquinas motrices de tipo turbina (de gas, de vapor o hidráulica) y en cargas mecánicas como bombas centrífugas o ventiladores.

Sin embargo, existen ocasiones en las que el par mecánico es variable. Esto sucede en máquinas motrices como los motores de explosión (Diesel o de gasolina) o las máquinas de vapor de pistón y en cargas como los compresores alternativos de pistón. En este caso las variaciones de par son periódicas y dependen del tipo de motor y del número de cilindros. El par se puede descomponer, pues, en serie de Fourier y considerarlo como la suma de un término constante M_{m0} y una serie de pares sinusoidales armónicos de frecuencias múltiplos y submúltiplos de la velocidad media Ω_1.

En consecuencia, el par mecánico viene dado por esta expresión general:

$$\boxed{M_m = M_{m0} + \sum_h M_{mh} = M_{m0} + \sum_h M_{mh\,max}\,\mathrm{sen}\left(h\,\Omega_1 t - \Psi_h\right)} \tag{3}$$

En las máquinas con par constante el segundo sumando de (3) es nulo.

2.2. Par eléctrico M

Si se desprecia la resistencia de las fases del estator y se emplea el convenio de signos de generador, el par de una máquina síncrona de rotor cilíndrico viene dado por esta relación:

$$M = \frac{3\,V\,E_0}{X_s\,\Omega_1}\,\mathrm{sen}\,\delta \qquad (4)$$

En las máquinas de polos salientes hay que sumar, además, el par de reluctancia. Pero en la mayor parte de los casos el par de reluctancia se puede despreciar y se empleará la relación (4) también para las máquinas síncronas de polos salientes (entonces se utilizaría la reactancia síncrona longitudinal X_d en lugar de X_s en (4)).

En el caso de que la máquina esté conectada a una red de potencia infinita, la resistencia R de las fases del estator sea despreciable, se mantenga constante la corriente de excitación (luego, E_0 es constante) y se pueda suponer que la reactancia síncrona X_s no varía, se tiene que el par M depende sólo del ángulo de par δ:

$$\boxed{M = M_{máx}\,\mathrm{sen}\,\delta}\;; \qquad M_{máx} = \frac{3\,V\,E_0}{X_s\,\Omega_1} \qquad (5)$$

En las expresiones (4) y (5) se ha considerado que la velocidad del rotor permanece constante e igual a Ω_1. En realidad, durante las oscilaciones pendulares existen variaciones de la velocidad alrededor del valor Ω_1, pero en la mayoría de los casos son lo suficientemente pequeñas como para considerar que su influencia sobre el par eléctrico es despreciable. Por esta razón, estas oscilaciones de velocidad no se tienen en cuenta en las expresiones (4) y (5).

En las oscilaciones pendulares con la máquina conectada a una red de potencia infinita el ángulo de par varía alrededor del correspondiente al punto de equilibrio final A. De esta manera, se puede considerar que durante las oscilaciones el ángulo de par δ es igual al ángulo δ_A, correspondiente al punto de equilibrio A, más el *ángulo de desvío* δ_d:

$$\delta = \delta_A + \delta_d \qquad (6)$$

Con la máquina síncrona en red de potencia infinita, durante las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio A existe un *par sincronizante* M_s que lleva finalmente a la máquina al equilibrio en A (véase el apartado en el que se trató de la estabilidad estática). El par M_s es igual a la diferencia del par que tiene la máquina en un momento dado durante las oscilaciones y el par M_A del equilibrio final:

$$M_s = M - M_A \qquad (7)$$

Cuando las variaciones de δ no son grandes; es decir, para ángulos de desvío δ_d no superiores a 20º, se deduce que:

$$\boxed{M_s = K_s \cdot \delta_d} \tag{8}$$

K_s es el *par sincronizante específico* para el punto de equilibrio A:

$$K_s = M_{máx} \cos \delta_A = \frac{3\,V\,E_0}{X_s\,\Omega_1} \cos \delta_A \tag{9}$$

La expresión (8) para el par sincronizante M_s es similar a la del par de un resorte en espiral. Cuando la máquina está en el punto de equilibrio A, el par sincronizante es cero. Pero cuando se la aparta de este punto de equilibrio, es como si se tensara un resorte que produjera el par M_s -tanto mayor cuanto mayor es el desvío δ_d respecto al punto de equilibrio- que hace volver a la máquina síncrona al punto A.

2.3. Par de inercia M_i

El par debido a la inercia viene dado por esta relación:

$$M_i = J \frac{d\,\Omega}{d\,t} \tag{10}$$

Ω es la velocidad angular instantánea del rotor y J es el momento de inercia de todas las partes giratorias.

Si se trata de una máquina conectada a una red de potencia infinita, es sabido que una variación $\Delta\delta$ del ángulo de par provoca que el rotor gire físicamente un ángulo eléctrico $\Delta\delta$ que se superpone al movimiento de giro a velocidad constante de sincronismo Ω_1. Por lo tanto, la velocidad Ω a la que se mueve el rotor será la suma de Ω_1 más el incremento de velocidad debida a las variaciones de δ:

$$\Omega = \Omega_1 + \frac{1}{p}\frac{d\,\delta}{d\,t} \tag{11}$$

p es el número de pares de polos de la máquina síncrona y aparece en la fórmula (11) para pasar el ángulo eléctrico δ a ángulo geométrico.

Durante las oscilaciones el ángulo de desvío δ_d irá variando de forma amortiguada hasta anularse mientras que δ_A permanece constante. Luego, a partir de la relación (6), se tiene que

$$\frac{d\,\delta}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\delta_A + \delta_d\right) = \frac{d\,\delta_d}{d\,t} \tag{12}$$

$$\Omega = \Omega_1 + \frac{1}{p}\frac{d\,\delta}{d\,t} = \Omega_1 + \frac{1}{p}\frac{d\,\delta_d}{d\,t} \tag{13}$$

$$\frac{d\,\Omega}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\Omega_1 + \frac{1}{p}\frac{d\,\delta}{d\,t}\right) = \frac{1}{p}\frac{d^2\delta}{d\,t^2} = \frac{1}{p}\frac{d^2\delta_d}{d\,t^2} \tag{14}$$

Lo que, finalmente, da lugar a

$$\boxed{M_i = J\,\frac{d\,\Omega}{d\,t} = \frac{J}{p}\,\frac{d^2\delta}{d\,t^2} = \frac{J}{p}\,\frac{d^2\delta_d}{d\,t^2}} \tag{15}$$

2.4. Par amortiguador M_a

El par amortiguador M_a atenúa las oscilaciones. En las oscilaciones libres M_a consigue que las oscilaciones pendulares vayan reduciéndose hasta que, al final, se anulen y la máquina acabe funcionando en el punto de equilibrio estable final.

Este par es la suma del debido a los rozamientos y a la acción del devanado amortiguador. Como este último es mucho mayor que el de rozamientos, en lo que sigue sólo se tendrá en cuenta el efecto del devanado amortiguador.

El devanado amortiguador es un devanado en cortocircuito situado en el rotor. También se considera como devanado amortiguador el cuerpo macizo del rotor por el que circularán corrientes de Foucault en cuanto se vea sometido a la acción de un campo magnético variable en el tiempo.

En equilibrio y suponiendo que el campo magnético del inducido carece de armónicos espaciales, tanto el campo magnético en el entrehierro como el rotor giran a la misma velocidad de sincronismo Ω_1 y no aparecen corrientes en el devanado amortiguador. Sin embargo, durante las oscilaciones pendulares la velocidad del rotor se aparta temporalmente de la de sincronismo y se inducen corrientes en el devanado amortiguador, lo que provoca la aparición del par amortiguador M_a.

Este par M_a debido al devanado amortiguador es similar al de un motor de inducción (Fig. 1). Por lo tanto, cuando la velocidad se aparta poco de la de sincronismo; es decir, cuando el deslizamiento s es pequeño, M_a es proporcional al deslizamiento.

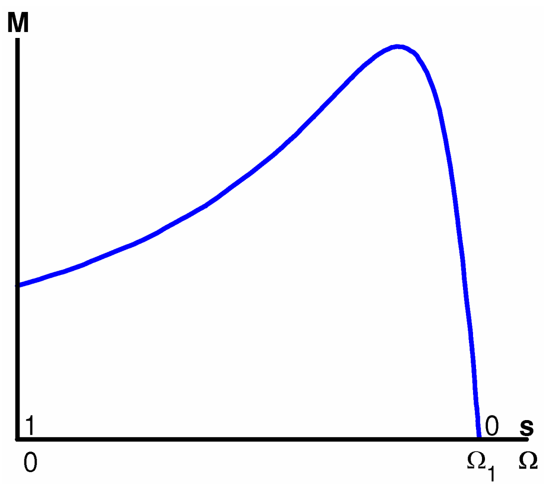


Fig. 1: Par de un motor asíncrono

Ahora bien en la expresión (2) el par M_a figura como un par de frenado, no como un par motor. Por lo tanto, para M_a hay que utilizar el convenio de signos contrario al de par motor que se ha empleado en la Fig. 1. Luego, queda que:

$$M_a = -K \cdot s = -K \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} = -K' \left(\Omega_1 - \Omega\right) \tag{16}$$

$$M_a = K' \left(\Omega - \Omega_1\right) \; ; \qquad K' = \frac{K}{\Omega_1} \tag{17}$$

Si se trata de una máquina conectada a una red de potencia infinita se cumple la relación (13). En este caso, la expresión (17) se convierte en:

$$M_a = K' \left(\frac{1}{p} \frac{d\,\delta}{d\,t}\right) \tag{18}$$

Por lo tanto, si se denomina K_a a esta constante:

$$K_a = \frac{K'}{p} = \frac{K}{\Omega_1 \cdot p} \tag{19}$$

se llega finalmente a:

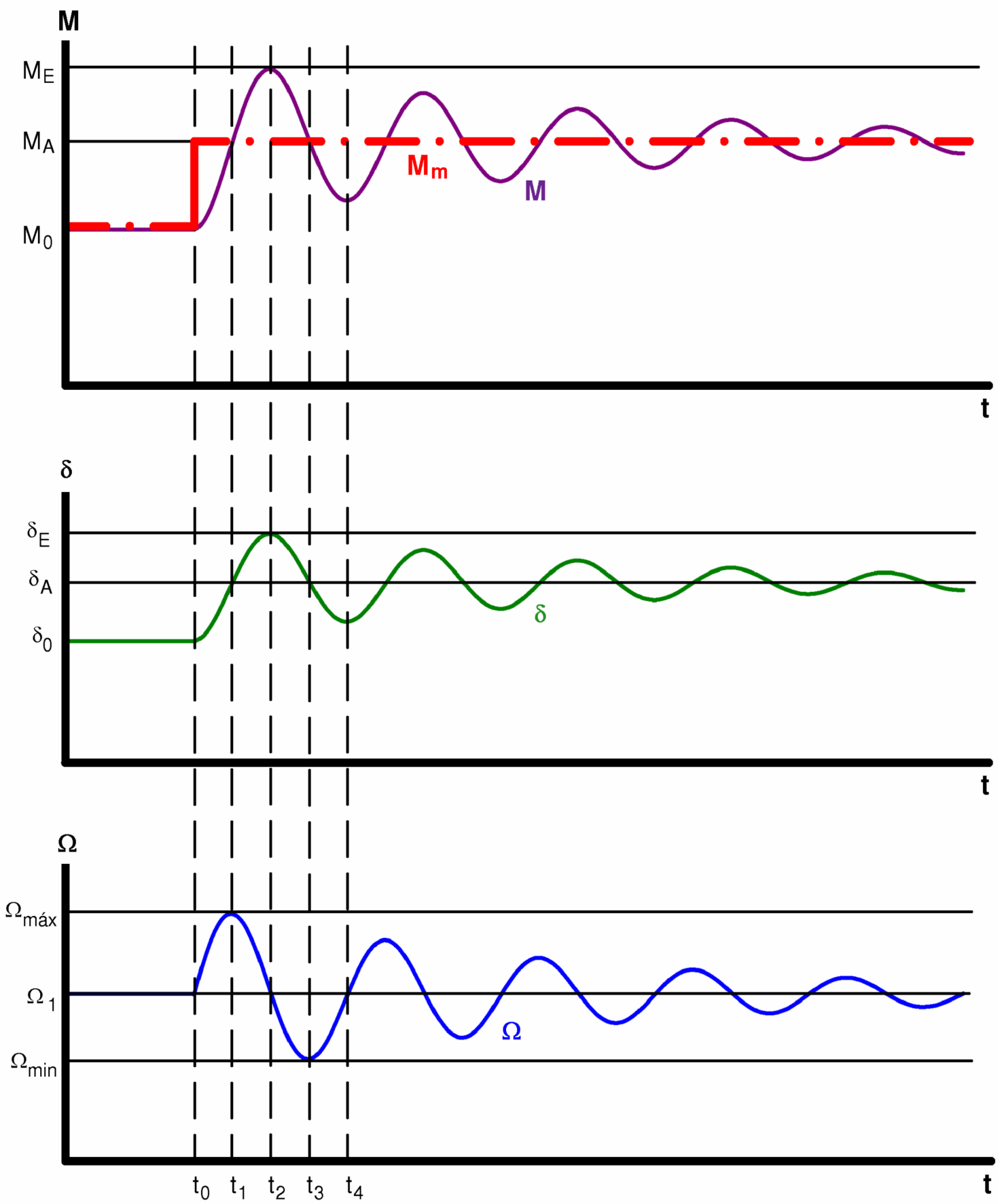
$$\boxed{M_a = K_a \frac{d\,\delta}{d\,t} = K_a \frac{d\,\delta_d}{d\,t}} \tag{20}$$

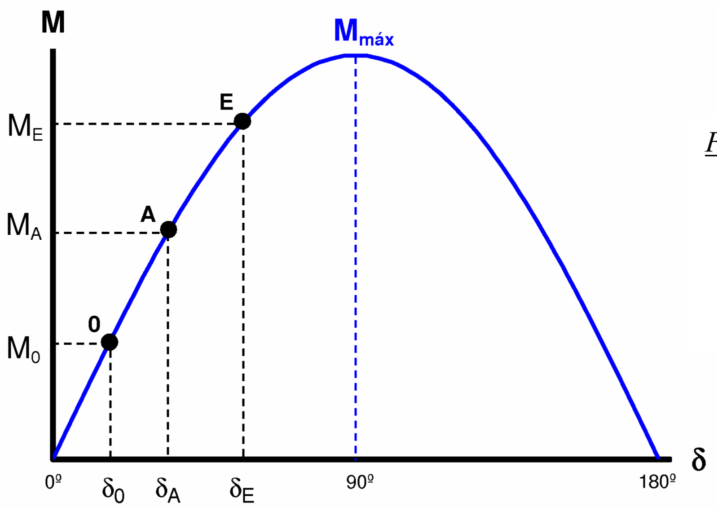
3. OSCILACIONES LIBRES

Para comprender mejor el fenómeno de las oscilaciones libres se va a analizar en las Figs. 2 y 3 el caso de un alternador síncrono de rotor cilíndrico conectado a una red de potencia infinita y accionado por una turbina hidráulica en la que se aumenta súbitamente el par mecánico. Como es habitual, se supondrá que la resistencia R de las fases del estator es despreciable, que se mantiene constante la corriente de excitación (luego, E_0 es constante) y que la reactancia síncrona X_s no varía. Por lo tanto, el par eléctrico de la máquina síncrona viene dado por la curva característica de la Fig. 3.

Inicialmente el sistema turbina-alternador está funcionando en equilibrio en el punto 0 donde los pares mecánico y eléctrico son iguales y el ángulo de par vale δ_0. En el instante t_0 (véase la Fig. 2) se aumenta bruscamente el par M_m de la turbina (por ejemplo, abriendo súbitamente su válvula de admisión) lo que hará que, tras una serie de oscilaciones, la máquina alcance un nuevo estado de equilibrio en el punto A donde vuelven a igualarse los pares mecánico y eléctrico y el ángulo de par es δ_A.

La transición desde el estado 0 al estado A no es instantánea. En el instante t_0 el par mecánico M_m ha aumentado de forma prácticamente instantánea desde el valor M_0 al valor M_A. Sin embargo, el par eléctrico de la máquina síncrona no puede variar bruscamente. Esto se debe a que, en red de potencia infinita, las variaciones del par eléctrico son debidas a las variaciones en el ángulo δ, las cuáles conllevan giros del rotor superpuestos a la rotación a la velocidad Ω_1. La inercia mecánica del rotor impide que estos movimientos del rotor sean bruscos.





<u>Figs. 2 y 3</u>: Oscilaciones libres en un alternador síncrono en red de potencia infinita tras una variación brusca del par motor.

Por lo tanto, en el instante t_0 el sistema tiene un desequilibrio de pares mecánico de la turbina y eléctrico del alternador (véase la primera gráfica de la Fig. 2). Al ser el primero mayor que el segundo, la máquina empieza a acelerar y la velocidad Ω del rotor comienza a ser mayor que Ω_1 (véase la tercera gráfica de la Fig. 2). Al girar el rotor más deprisa que el campo magnético el ángulo de par δ empieza a crecer (véase la segunda gráfica de la Fig. 2).

En el instante t_1 el ángulo de par vale δ_A y, consecuentemente, el par eléctrico es M_A, igual al par mecánico producido por la turbina. Sin embargo, la máquina no se queda en este punto pues la aceleración que se ha ido produciendo entre los instantes t_0 y t_1 hace que en t_1 la velocidad no sea la síncrona, sino que alcanza su valor máximo $\Omega_{máx}$, y la energía cinética almacenada entre t_0 y t_1 provoca que se sobrepase el punto A.

Entre los instantes t_1 y t_2 el ángulo de par es superior a δ_A y, como se aprecia en la Fig. 3, el par eléctrico es superior al par mecánico (que vale M_A). Por consiguiente, entre t_1 y t_2 existe un proceso de deceleración y la velocidad va reduciéndose, pero todavía sigue siendo superior a Ω_1 (ver la Fig. 2). Esto origina que el ángulo de par aún siga aumentando. Al final, en el instante t_2, la máquina se encuentra en el punto extremo E y el ángulo de par ha alcanzado su valor máximo δ_E (ver las Figs. 2 y 3), mientras que la velocidad es igual a la de sincronismo Ω_1.

A partir del instante t_2 el par eléctrico sigue siendo superior al par mecánico por lo que la velocidad continúa disminuyendo, pero ahora por debajo de Ω_1. Al girar el rotor con una velocidad inferior a la síncrona el ángulo de par δ comenzará a disminuir; aunque todavía es superior a δ_A.

En el instante t_3 el ángulo de par vuelve a valer δ_A, pero la aceleración negativa que lleva la máquina hace que se vuelva a sobrepasar este punto y el ángulo de par siga disminuyendo. En t_3 la velocidad alcanza su valor mínimo Ω_{min}.

A partir de t_3 el ángulo de par es inferior a δ_A y, consecuentemente, el par eléctrico es inferior al par mecánico de la turbina. Luego, el sistema se acelera y la velocidad vuelve a aumentar, aunque, de momento, se mantiene por debajo de Ω_1.

Analizando de esta manera los demás instantes de tiempo se comprueba que se producen una serie de oscilaciones del ángulo de par alrededor del punto δ_A y de la velocidad alrededor de la velocidad síncrona Ω_1. Estas oscilaciones se van amortiguando (ver la Fig. 2) y al final la máquina alcanza el punto de equilibrio A con la velocidad síncrona Ω_1.

4. ESTABILIDAD DINÁMICA. MÉTODO DE LA IGUALDAD DE LAS ÁREAS

En el fenómeno oscilante explicado en el apartado anterior la máquina no pierde su estabilidad. Las oscilaciones van amortiguándose y la máquina es capaz de alcanzar un estado de equilibrio final en el punto A.

Esto es así porque en todo momento el par sincronizante; es decir, la diferencia entre los pares eléctrico y mecánico (igual al par M_A en el punto de equilibrio final), tiende a que la máquina vaya hacia el punto A. En concreto, cuando la máquina alcanza el punto E, donde el ángulo de par es máximo, el par M_E es superior a M_A y esto provoca que la máquina decelere y, al final, tras las oscilaciones, acabe en el punto de equilibrio A.

Pero, si la oscilación hubiera sido más grande, pudiera ser que la máquina alcance ángulos de par superiores a 90º. En este caso, una vez superados los 90º (o $\pi/2$ radianes), mayores valores de δ significan que el par eléctrico disminuye. Aún así, si en la primera oscilación el punto extremo E tiene un par M_E superior a M_A la máquina será capaz de estabilizarse en el punto A (Fig. 4).

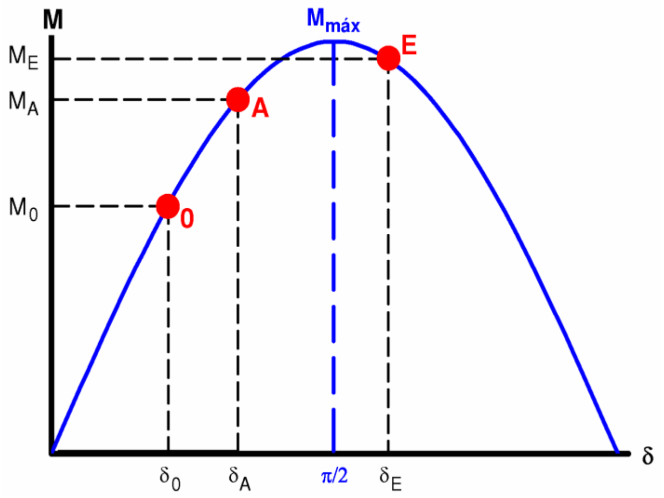


Fig. 4: Funcionamiento estable con $\delta_E > \pi/2$

Pero, si en la primera oscilación el ángulo de par supera el valor correspondiente al punto G (Fig. 5), donde

$$M_G = M_A \; ; \qquad \delta_G = \pi - \delta_A \tag{21}$$

empezará a suceder que el par eléctrico es inferior al par mecánico y la máquina se acelerará indefinidamente, alejándose cada vez más del punto A y acabará por perder el sincronismo.

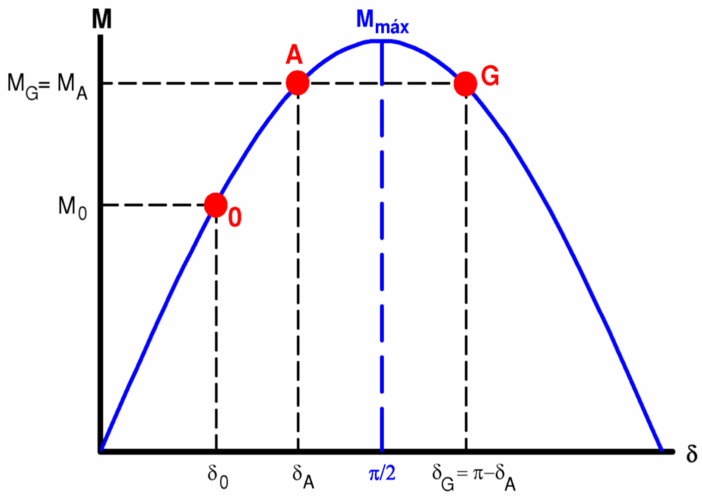


Fig. 5: La máquina perderá estabilidad si durante las oscilaciones el ángulo de par supera el valor δ_G.

Por lo tanto, para saber si las oscilaciones pendulares harán perder el sincronismo a la máquina síncrona habrá que determinar cuál será el mayor valor del ángulo de par δ_E durante la primera oscilación. Para ello se utiliza el <u>*método de igualdad de las áreas*</u>.

Supóngase que la máquina síncrona carece del par amortiguador M_a. En este caso las oscilaciones serán mayores de lo que son en realidad. Luego, esta es una hipótesis conservadora: se supone una situación peor que la realidad.

Si no existe par amortiguador, el incremento de energía cinética que se va acumulando mientras la máquina acelera desde el punto 0 hasta el punto A (Fig. 6) será la misma que luego se pierde mientras decelera desde el punto A hasta el punto E. Por lo tanto, en la suposición de que M_a es nulo, el ángulo δ_E se determina buscando el punto E donde la energía cinética perdida desde A hasta E iguale a la ganada entre 0 y A.

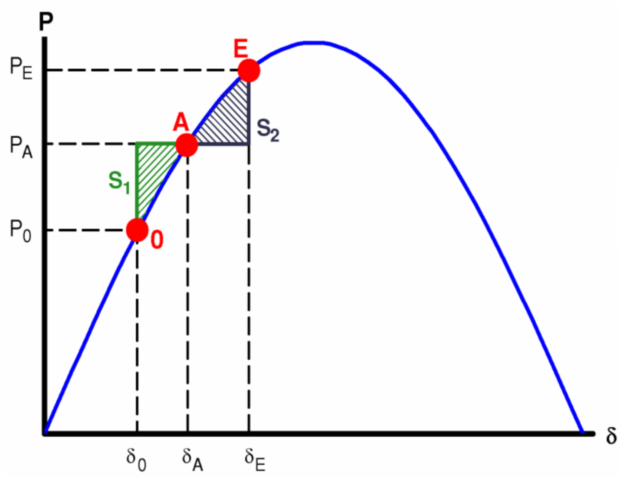


Fig. 6: Método de igualdad de las áreas

En la Fig. 6 se muestra la curva de potencia de una máquina síncrona, que es similar a la curva de par. Se puede demostrar que la energía cinética que el sistema va ganando mientras acelera entre los puntos 0 y A es proporcional al área S_1. Por otra parte, la energía cinética que se pierde en el proceso de deceleración entre A y E es proporcional al área S_2. En consecuencia, el punto E se determina imponiendo la condición de que las áreas S_1 y S_2 sean iguales.

Si sucede que el punto E se encuentra por encima del punto A, el sistema será estable; pero en caso contrario será inestable.

El ***límite de estabilidad dinámica*** se producirá cuando el punto E se encuentre exactamente a la misma altura que el nudo A (Fig. 7).

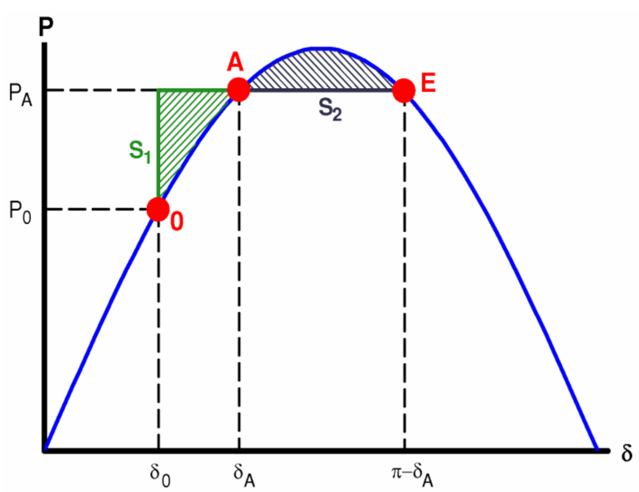


Fig. 7: Límite de estabilidad dinámica

Es decir, partiendo del punto de equilibrio estable 0, con el par M_0, se puede aumentar de forma brusca el par hasta un valor límite M_A tal que las áreas S_1 y S_2 de la Fig. 7 sean iguales. El ángulo de par δ_A es inferior a 90º, por lo que este criterio de estabilidad es más exigente que el de la estabilidad estática.

Obsérvese que el límite de estabilidad dinámica no es un valor fijo sino que depende de cual sea el punto 0 de equilibrio inicial.

5. OSCILACIONES LIBRES DE PEQUEÑA AMPLITUD

Sea la máquina síncrona cilíndrica en red de potencia infinita descrita en el apartado 3 (oscilaciones libres). En el punto de equilibrio final se cumplirá que:

$$M_m = M_A \tag{22}$$

Durante las oscilaciones se verificará la relación de pares (2):

$$M_m = M + M_i + M_a \tag{2}$$

Combinando las expresiones anteriores se deduce que

$$M_A = M + M_i + M_a$$

$$0 = (M - M_A) + M_i + M_a$$

$$M_s + M_i + M_a = 0 \tag{23}$$

M_s es el par sincronizante, igual a la diferencia del par eléctrico M menos el par M_A en el punto de equilibrio.

Supóngase, de momento, que el par amortiguador M_a es despreciable. Sucede entonces que

$$M_s + M_i = 0 \tag{24}$$

Considérese que las oscilaciones son de pequeña amplitud, lo que significa que los ángulos de desvío δ_d no superan el valor de 20º. En este caso, se puede utilizar la expresión (8) para obtener el par sincronizante. Por otra parte, la relación (15) proporciona el par de inercia. Luego, se deduce que

$$K_s \cdot \delta_d + \frac{J}{p} \frac{d^2 \delta_d}{d t^2} = 0 \tag{25}$$

La solución de esta ecuación diferencial es del tipo

$$\delta_d = \delta_{d\,máx} \cos(\omega_p t) ; \quad (\omega_p = 2 \pi f_p) \tag{26}$$

ω_p es la pulsación de las oscilaciones libres y f_p es la *frecuencia propia de oscilación* del sistema. Sustituyendo (26) dentro de la relación (25) y operando se llega a

$$\omega_p = \sqrt{\frac{p\,K_s}{J}} \quad ; \quad \boxed{f_p = \frac{\omega_p}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{p\,K_s}{J}}} \tag{27}$$

De (27) se deduce que f_p no es constante. Depende de K_s que, según se aprecia en la relación (9), varía con el punto A de equilibrio final, con la corriente de excitación (que influye sobre E_0) y del nivel de saturación de la máquina síncrona (que afecta a X_s). La frecuencia propia de oscilación es máxima en vacío y disminuye con la carga. Al acercarse la máquina al límite de estabilidad estática (donde $\delta = 90º$ y $K_s = 0$) la frecuencia propia f_p tiende a anularse.

En el caso de no despreciar el par amortiguador M_a se obtiene que el ángulo de desvío δ_d va disminuyendo su amplitud con el tiempo y, además, la frecuencia propia de oscilación f_p es ligeramente menor que la calculada mediante la fórmula (27). Considerando M_a se obtiene la siguiente expresión para f_p:

$$\boxed{f_p = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{p\,K_s}{J} - \left(\frac{p\,K_a}{2\,J}\right)^2}} \tag{28}$$

6. OSCILACIONES FORZADAS EN UNA MÁQUINA SÍNCRONA

Cuando una máquina síncrona tiene su eje acoplado a un motor o a una carga mecánica cuyo par M_m no es constante, aparecen unas oscilaciones forzadas en la velocidad y en la posición angular del rotor.

Como ya se indicó en el apartado 2 (Pares a considerar en las oscilaciones pendulares), en este caso el par mecánico M_m se puede expresar como la suma del par medio M_{m0} y de unos pares armónicos M_{mh}:

$$M_m = M_{m0} + \sum_h M_{mh} = M_{m0} + \sum_h M_{mh\,max}\ \mathrm{sen}\left(h\,\Omega_1\,t - \Psi_h\right) \tag{3}$$

El orden h de los armónicos M_{mh} de par depende del tipo de máquina considerado. El armónico de orden h más bajo (*primer armónico* o *armónico fundamental*) es el de mayor amplitud y, consecuentemente, el que ejerce mayor efecto sobre las oscilaciones forzadas.

En un motor de explosión monocilíndrico de 4 tiempos, Diesel o de gasolina, el orden h del primer armónico es 1/2 por repetirse el ciclo cada dos vueltas. Si el motor es de 4 tiempos y dos cilindros, el armónico fundamental tiene un orden h = 1 y si es de 4 cilindros, el primer armónico es h = 2. En un motor de explosión de dos tiempos y doble efecto, el orden h del armónico fundamental es h = 2 si es de dos cilindros, h = 4 si es de 4 cilindros, etc.

En el análisis de las oscilaciones forzadas hay que distinguir entre dos casos. Uno es cuando la máquina síncrona está aislada, en el cual sólo existen oscilaciones forzadas. Otro es cuando la máquina está conectada a una red de potencia infinita, en el cual existen tanto oscilaciones libres como forzadas y puede llegar a producirse un fenómeno de resonancia que provoca que la máquina pierda el sincronismo.

6.1. Oscilaciones forzadas en una máquina síncrona aislada

Considérese un alternador síncrono que funciona aislado y que está movido por un motor alternativo (que tiene un par mecánico con oscilaciones). En este caso la frecuencia de la tensión V será igual a la de la f.e.m. E_0, pues no hay una red que obligue a mantener constante la frecuencia. Por lo tanto, las oscilaciones en la velocidad de rotación afectan de igual manera a ambas magnitudes y el ángulo de par δ (ángulo entre los fasores $\overline{E}_0$ y $\overline{V}$) permanece prácticamente constante durante las oscilaciones. Desde luego, las oscilaciones en la velocidad darán lugar a variaciones de la posición angular del rotor superpuestas al movimiento de giro a la velocidad media Ω_1. Sin embargo, en una máquina aislada estas variaciones de la posición angular del rotor no se corresponden con variaciones del ángulo de par δ. En consecuencia, las variaciones en la posición del rotor ya no provocan variaciones en el par eléctrico de la máquina síncrona. Luego, ahora el par eléctrico es constante durante las oscilaciones y no existe el par sincronizante M_s.

Por lo tanto, el par mecánico medio M_{m0} está equilibrado por el par eléctrico y los demás pares mecánicos armónicos se equilibran con pares de inercia y de amortiguación. Así pues, el balance de pares dado por la relación (2) se desdobla en:

$$M_{m0} = M \tag{29}$$

$$\sum_h M_{mh\,máx} \operatorname{sen}\left(h\,\Omega_1 t - \Psi_h\right) = M_i + M_a \tag{30}$$

En estas oscilaciones el par amortiguador M_a es pequeño. Si se desprecia el par amortiguador y se aplica el principio de superposición a la ecuación (30), esta se descompone en una serie de ecuaciones; una para cada armónico h. Estas ecuaciones son así:

$$M_{mh\,máx} \operatorname{sen}\left(h\,\Omega_1 t - \Psi_h\right) = J\,\frac{d\,\Omega_h}{d\,t} \tag{31}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (31) se deduce que:

$$\Omega = \Omega_1 + \sum_h \Omega_h = \Omega_1 + \sum_h \Omega_{h\,max} \operatorname{sen}\left(h\,\Omega_1 t - \chi_h\right) \tag{32}$$

$$\Omega_{h\,max} = \frac{M_{mh\,máx}}{J\,h\,\Omega_1} \tag{33a}$$

$$\chi_h = \Psi_h - \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \Omega_h = -\Omega_{h\,max} \cos\left(h\,\Omega_1 t - \Psi_h\right) \tag{33b}$$

Se aprecia que los armónicos de menor orden (de menor valor de h) -que son, además, a los que corresponde normalmente un mayor valor de $M_{mh\,máx}$- son los que ejercerán mayor influencia en las oscilaciones. Por esta razón, muchas veces de estos armónicos sólo se tiene en cuenta el primero (el armónico fundamental).

Se define el *coeficiente de irregularidad* ε como este cociente:

$$\varepsilon = \frac{\Omega_{\text{máx}} - \Omega_{\text{min}}}{\Omega_{\text{máx}} + \Omega_{\text{min}}} = \frac{\Omega_{\text{máx}} - \Omega_{\text{min}}}{2\,\Omega_1} \qquad (34)$$

Si sólo se tiene en cuenta el armónico fundamental sucederá que:

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_{h\,max} \cos\left(h\,\Omega_1\,t - \Psi_h\right) \qquad (35)$$

$$\Omega_{\text{máx}} = \Omega_1 + \Omega_{h\,\text{máx}} \qquad (36)$$

$$\Omega_{\text{min}} = \Omega_1 - \Omega_{h\,\text{máx}} \qquad (37)$$

donde h es el orden armónico más pequeño (el del armónico fundamental).

Sustituyendo (36) y (37) en (34) y teniendo en cuenta la relación (33a) se deduce que

$$\varepsilon = \frac{\left(\Omega_1 + \Omega_{h\,\text{máx}}\right) - \left(\Omega_1 - \Omega_{h\,\text{máx}}\right)}{2\,\Omega_1} = \frac{\Omega_{h\,\text{máx}}}{\Omega_1}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{M_{mh\,\text{máx}}}{J\,h\,\Omega_1^2}} \qquad (38)$$

Mediante esta expresión se comprueba que cuando la máquina síncrona funciona aislada sólo se puede reducir la amplitud de las oscilaciones aumentando el momento de inercia J. Esto se puede conseguir construyendo la máquina de forma que su rotor tenga un momento de inercia alto o acoplando un volante de inercia en el eje de la máquina.

6.2. <u>Oscilaciones forzadas en una máquina síncrona en red de potencia infinita</u>

Considérese una máquina síncrona, tanto actuando como generador o como motor, conectada a una red de potencia infinita y sometida a la acción de un par mecánico variable dado por la relación (3).

Las oscilaciones en el par mecánico provocarán oscilaciones en la velocidad y en la posición de angular del rotor superpuestas al movimiento a la velocidad de sincronismo Ω_1. Estas oscilaciones de la posición angular repercuten como oscilaciones del ángulo de par δ, por lo que el par eléctrico no será constante y aparecerá un par sincronizante M_s (diferencia entre el par eléctrico en un momento dado y el par eléctrico en el punto medio de oscilación). Además, la red de potencia infinita impondrá que la frecuencia f_1 y la velocidad de sincronismo Ω_1 permanezcan invariables.

Las oscilaciones del ángulo de par se realizarán alrededor del punto medio A donde el par eléctrico iguala al par mecánico medio. Luego:

$$M_{m0} = M_A \qquad (39)$$

$$\delta = \delta_A + \delta_d \quad ; \qquad \delta_d = \sum_h \delta_h = \sum_h \delta_{h\,max}\,\text{sen}\left(h\,\Omega_1\,t - \lambda_h\right) \qquad (40)$$

En consecuencia, la ecuación mecánica (2) se convierte en

$$M_A + \sum_h M_{mh} = M + M_i + M_a \tag{41}$$

$$\sum_h M_{mh} = \left(M - M_A\right) + M_i + M_a = M_s + M_i + M_a \tag{42}$$

Si se aplica el principio de superposición en la expresión (42), esta se descompone en una serie de ecuaciones, una por cada armónico h. Si, además, se desprecia el par amortiguador M_a y las oscilaciones pendulares son de pequeña amplitud (con $\delta_d < 20º$), la ecuación para cada armónico h es de esta forma:

$$M_{mh\,máx}\ \text{sen}\left(h\,\Omega_1\,t - \Psi_h\right) = K_s \cdot \delta_h + \frac{J}{p}\,\frac{d^2\,\delta_h}{d\,t^2} \tag{43}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene que:

$$\delta_{h\,máx} = \frac{M_{mh\,máx}}{\frac{J}{p}\,h^2\,\Omega_1^2 - K_s} \tag{44a}$$

$$\lambda_h = \Psi_h + \pi \quad \rightarrow \quad \delta_h = -\delta_{h\,max}\ \text{sen}\left(h\,\Omega_1\,t - \Psi_h\right) \tag{44b}$$

La frecuencia forzada para el armónico de orden h es

$$f_{F\,h} = \frac{h\,\Omega_1}{2\,\pi} \tag{45}$$

que se denominará simplemente f_F cuando se trate del armónico fundamental (el de menor orden h).

Comparando las relaciones (27), (44a) y (45) se llega a la siguiente relación:

$$\boxed{\delta_{h\,máx} = \frac{M_{mh\,máx}}{K_s\left[\left(\frac{f_{F\,h}}{f_p}\right)^2 - 1\right]} = \frac{M_{mh\,máx}\ f_p^2}{K_s\left(f_{F\,h}^2 - f_p^2\right)}} \tag{46}$$

De esta expresión se deduce que si la frecuencia forzada para un armónico de orden h tiene el mismo valor que la frecuencia propia de oscilación; es decir, si

$$f_{F\,h} = f_p\ ; \qquad \frac{f_{F\,h}}{f_p} = 1 \tag{47}$$

la máquina entra en *resonancia* y las oscilaciones se hacen prácticamente infinitas. Esto provoca que la máquina pierda el sincronismo, por lo que esta es una situación a evitar a toda costa en el funcionamiento de una máquina síncrona.

Si no se desprecia el par amortiguador se obtiene que

$$\delta_{h\,\text{máx}} = \frac{M_{mh\,\text{máx}}}{h\,\Omega_1 \sqrt{K_a^2 + \left(\frac{J}{p}\,h^2\,\Omega_1^2 - K_s\right)^2}} \tag{48}$$

El par amortiguador hace que en caso de resonancia las oscilaciones no lleguen a ser tan grandes. Pero aún así, hay que procurar que la máquina síncrona funcione en un estado lo suficientemente alejado de la situación de resonancia. Como las frecuencias forzadas vienen determinadas por el par mecánico, sólo se puede alejar el sistema de la zona de resonancia modificando la frecuencia propia. Para ello se actúa sobre el momento de inercia J del conjunto de las partes giratorias.

Para estar suficientemente lejos de la condición de resonancia se recomienda que la frecuencia propia f_p sea, al menos, un 20% menor que la frecuencia forzada f_F del armónico fundamental. Es decir, se recomienda que se cumpla esta condición:

$$f_p \leq 0{,}8 \cdot f_F \tag{49}$$

Si se cumple la relación (49) para la frecuencia forzada del armónico fundamental, con mucha mayor razón se cumplirá para los demás armónicos que tienen frecuencias forzadas más altas. Luego, si se verifica la relación (49) para el armónico fundamental se está seguro de que la máquina funciona lo suficientemente lejos de la condición de resonancia para todos los armónicos.

En algunos casos el conseguir que se cumpla la relación (49) exige aumentar mucho el momento de inercia, con el consiguiente encarecimiento del grupo. Entonces recomienda que la frecuencia propia f_p sea, al menos, un 20% mayor que la frecuencia forzada f_F del armónico fundamental; pero sin ser mayor del doble de f_F. Es decir, se recomienda que se cumpla lo siguiente:

$$f_p \geq 1{,}2 \cdot f_F \;; \qquad f_p \leq 2 \cdot f_F \tag{50}$$

Esta solución da lugar a oscilaciones mayores que con la condición (49) (en la relación (46) se aprecia que aunque la diferencia, en valor absoluto, entre f_F y f_p sea la misma; se obtienen oscilaciones mayores cuanto mayor es f_p). Además, habrá que comprobar que, aunque se cumpla la relación (50) para el armónico fundamental, se está suficientemente lejos de la condición de resonancia para los demás armónicos.

Por otra parte, la frecuencia propia f_p no tiene un valor constante, como ya se constató anteriormente en el apartado sobre las oscilaciones libres. Esto habrá que tenerlo en cuenta cuando se apliquen las condiciones (49) y (50) y utilizar en ellas el máximo o el mínimo valor previsto para f_p, respectivamente.