

#### UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

#### DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA



# FRENADO DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

**Doctor Ingeniero Industrial** 

## **ÍNDICE**

	,		,			,
<b>FRENADO</b>	DF MAO	IIINAS A	SINCRO	NASO	DE INDI	ICCIÓN
INLINDU				JINAS O	PLIND	CLUI

Introduccion	1
Fundamentos de la máquina asíncrona	1
Ecuaciones básicas. Circuito equivalente. Parámetros	1
Balance de potencias de una máquina asíncrona actuando como motor	3
Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con $V_1$ y $f_1$ constantes	5
Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con $I_1$ y $f_1$ constantes	6
Punto de funcionamiento	8
Frenado por recuperación de energía (frenado regenerativo)	9
Generador asíncrono	9
Ejemplos de frenado regenerativo	11
Frenado a contracorriente	12
Frenado por inyección de corriente continua (frenado dinámico)	15
Máquina asíncrona alimentada con tensión continua	17
Ejemplo de frenado dinámico	20
Bibliografía	21
ANEXOS	
ANEXO A: Comportamiento del estator y determinación de I <sub>1eq</sub> cuando una máquina asíncrona se alimenta con corriente continua	23
F.m.m. de un devanado trifásico alimentado con corriente alterna trifásica	23
Análisis del estator de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua	24
ANEXO B: Consideraciones sobre la máquina asíncrona alimentada con corriente continua (frenado dinámico)	28
Velocidad de la f.m.m. del rotor	28
Ecuación eléctrica del rotor	28
Corriente en el rotor. Saturación magnética. Inductancia	
magnetizante $L_{\mu}$	35
Potencias en el rotor. Par	38
ANEXO C: Ejemplo de cálculo de diferentes sistemas de frenado de una máquina asíncrona	42



#### UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

#### DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA



# FRENADO DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

#### Miguel Angel Rodríguez Pozueta

**Doctor Ingeniero Industrial** 

© 2017, Miguel Angel Rodríguez Pozueta Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0</a> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor: <a href="http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm">http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm</a>

#### FRENADO DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS O DE INDUCCIÓN

#### Miguel Angel Rodríguez Pozueta

#### **INTRODUCCIÓN**

Se entiende que una máquina eléctrica funciona como freno cuando ejerce un par de frenado; es decir, de sentido contrario a su velocidad. Dependiendo de cómo sea el par de la carga mecánica, se tiene que el comportamiento del sistema máquina eléctrica-carga mecánica cuando la primera actúa como freno es así:

- \* Si la carga mecánica deja de actuar como tal y pasa a ejercer un par motor, el sistema buscará un punto de funcionamiento en el que se equilibre este par con el de frenado de la máquina eléctrica y la velocidad alcanzará un valor constante.
  - Esto es lo que sucede cuando un vehículo eléctrico desciende una pendiente. Mientras subía la pendiente la máquina eléctrica ejercía un par motor que tenía que vencer al par resistente debido al peso y a los rozamientos. Cuando el vehículo desciende la pendiente el par debido al peso pasa a ser un par motor y la máquina eléctrica se conecta de modo que ejerza un par de frenado que impida que la velocidad aumente excesivamente.
- \* Si la carga mecánica sigue actuando como tal, se suman los pares de frenado de la carga y de la máquina eléctrica provocando la disminución de la velocidad, que incluso puede llegar hasta la detención del sistema máquina eléctrica-carga mecánica.

Esto es lo que sucede cuando un vehículo eléctrico circula en un trayecto plano. La máquina actúa, en principio, como motor y los rozamientos del vehículo constituyen la carga mecánica. Si ahora se desea frenar el vehículo, se conecta la máquina eléctrica como freno para que el vehículo disminuya su velocidad merced al efecto conjunto del par de frenado de la máquina eléctrica más el par de carga de los rozamientos.

Existen varios procedimientos para que una máquina asíncrona pase a actuar como freno que se van a explicar más adelante.

#### **FUNDAMENTOS DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA**

#### Ecuaciones básicas. Circuito equivalente. Parámetros

Antes de empezar a estudiar los diferentes sistemas de frenado se van a repasar algunos conceptos básicos del comportamiento de una máquina de inducción (para más detalles puede consultar mi texto [13]).

Cuando el estator de una máquina asíncrona de p pares de polos está recorrido por un sistema trifásico equilibrado de corrientes de frecuencia  $f_1$  hercios (Hz), el campo magnético que se obtiene gira con una velocidad de  $n_1$  r.p.m. (que equivale a  $\Omega_1$  rad/s) denominada velocidad de sincronismo o velocidad síncrona:

$$n_1 = \frac{60 \, f_1}{p}; \qquad \Omega_1 = \frac{2 \, \pi}{60} \, n_1 = \frac{2 \, \pi \, f_1}{p}$$
 (1)

M.A.R. Pozueta -1-

Si el eje de la máquina gira a una velocidad de n r.p.m. (o  $\Omega$  rad/s) su deslizamiento s es una magnitud adimensional que se obtiene así:

$$s = \frac{n - n_1}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \tag{2}$$

La velocidad relativa a la cual el rotor "ve" girar el campo magnético se llama  $n_2$  cuando se mide en r.p.m. y  $\Omega_2$  si se mide en rad/s:

$$n_2 = n_1 - n = s \cdot n_1; \qquad \Omega_2 = \Omega_1 - \Omega = s \cdot \Omega_1$$
 (3)

Esto hace que en el rotor se induzcan fuerzas electromotrices (f.e.m.s) y circulen corrientes, todas ellas de frecuencia  $f_2$  y pulsación  $\omega_2$ :

$$f_2 = \frac{p \cdot n_2}{60} = \frac{p \cdot \Omega_2}{2\pi} = s \cdot f_1;$$
  $\omega_2 = 2\pi f_2 = p \cdot \Omega_2 = \frac{2\pi}{60} \cdot p \cdot n_2$  (4)

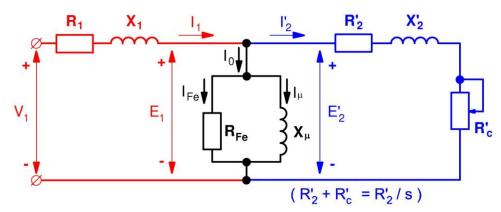


Fig. 1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona

La Fig. 1 muestra el *circuito equivalente* completo de una máquina asíncrona con el rotor reducido al estator. Las reactancias que aparecen en este circuito son

$$X_1 = 2 \pi f_1 L_{d1}; \quad X'_2 = 2 \pi f_1 L'_{d2}; \quad X_u = 2 \pi f_1 L_u$$
 (5)

En este texto se va a suponer que las resistencias ( $R_1$  y  $R'_2$ ) y las inductancias de dispersión ( $L_{d1}$  y  $L'_{d2}$ ) son constantes e independientes de f2. Es decir, no se va considerar el efecto pelicular que aparece en las máquinas de doble jaula y de ranura profunda. La inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  depende del nivel de saturación de los núcleos magnéticos y permanece constante mientras el campo magnético en el entrehierro permanezca aproximadamente constante. En la mayor parte de los casos se puede prescindir de la resistencia de pérdidas en el hierro  $R_{Fe}$  y suprimirla del circuito equivalente de la Fig. 1.

La resistencia de carga R'c se obtiene así:

$$R'_{c} = R'_{2} \left( \frac{1}{s} - 1 \right) = R'_{2} \left( \frac{1 - s}{s} \right)$$
 (6)

M.A.R. Pozueta -2-

Por lo que, en el circuito equivalente de la Fig. 1 la suma de todas las resistencias que hay en el rotor vale

$$R'_{2} + R'_{c} = \frac{R'_{2}}{s} \tag{7}$$

#### Balance de potencias de una máquina asíncrona actuando como motor

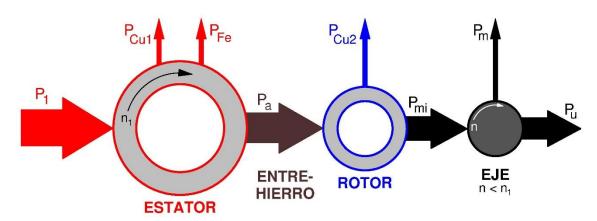


Fig. 2: Balance de potencias de una máquina asíncrona actuando como motor

En la Fig. 2 se muestra el *balance de potencias* de una máquina asíncrona cuando está actuando como <u>motor</u>. En esta forma de funcionamiento la máquina absorbe por el estator una potencia eléctrica (potencia activa)  $P_1$  y suministra por el eje una potencia mecánica  $P_u$ . Esta es la potencia útil cuando actúa como motor. Para otras formas de funcionamiento se va a seguir denominando  $P_u$  a la potencia mecánica en el eje, aunque ya no se trate de la potencia útil.

En la conversión de la potencia eléctrica  $P_1$  en mecánica  $P_u$  se pierde algo de potencia que se disipa en forma de calor. Hay diferentes tipos de potencia perdida o *pérdidas*:

P<sub>Cu1</sub> *Pérdidas en el cobre del estator*, debidas a la resistencia R<sub>1</sub> de las fases del devanado del estator.

 $P_{Fe}$  Pérdidas magnéticas o en el hierro, debidas a las corrientes de Foucault y a la histéresis en los núcleos magnéticos. En funcionamiento normal el deslizamiento s y la frecuencia rotórica  $f_2$  son pequeños, lo que hace que las pérdidas magnéticas del rotor sean despreciables y solamente se tengan en consideración las pérdidas en el hierro en el estator. En el circuito equivalente de la Fig. 1 estas pérdidas son las que se disipan en la resistencia  $R_{Fe}$ .

P<sub>Cu2</sub> *Pérdidas en el cobre del rotor*, debidas a la resistencia R<sub>2</sub> (o R'<sub>2</sub> si se usa el rotor reducido al estator) de las fases del devanado del rotor.

P<sub>m</sub> Pérdidas mecánicas y de ventilación debidas a los rozamientos mecánicos de la máquina y a la potencia consumida por su sistema de refrigeración. Estas pérdidas no se reflejan en el circuito equivalente de la Fig. 1.

M.A.R. Pozueta -3-

Además de estas pérdidas existen las *pérdidas adicionales* que engloban a pérdidas debidas a diferentes causas de difícil cuantificación y que no se han tenido en cuenta en este estudio.

La potencia en el entrehierro  $P_a$  (Fig. 2) es la potencia que fluye del estator hacia el rotor a través del entrehierro. En el circuito equivalente de la Fig. 1 esta potencia es la que se gasta en la totalidad de las resistencias del rotor:

$$P_{a} = P_{1} - (P_{Cu1} + P_{Fe})$$
 (8)

$$P_{a} = m_{1} I_{2}^{2} \frac{R_{2}^{\prime}}{s}$$
 (9)

En la expresión anterior  $m_1$  es el número de fases del estator, que usualmente va a valer 3 (máquina trifásica).

La potencia interna es la que la máquina transforma de potencia electromagnética en potencia mecánica. Vista desde el lado mecánico se trata de la *potencia mecánica interna*  $P_{mi}$  y es la que internamente se ejerce sobre el eje. En el circuito equivalente (Fig. 1) esta potencia es la que se gasta en la resistencia de carga  $R'_c$ :

$$P_{mi} = P_a - P_{Cu2} \tag{10}$$

$$P_{\text{mi}} = m_1 \, I_2^2 \, R_c' = m_1 \, I_2^2 \, R_2' \left( \frac{1}{s} - 1 \right) \tag{11}$$

La potencia mecánica  $P_u$  que la máquina suministra al exterior por su eje se obtiene restando las pérdidas mecánicas  $P_m$  de la potencia mecánica interna  $P_{mi}$  y, en la práctica, se la puede considerar prácticamente igual a la potencia mecánica interna:

$$P_{11} = P_{mi} - P_{m} \approx P_{mi} \tag{12}$$

Sea cual sea el modo de funcionamiento de la máquina asíncrona, sus pérdidas siempre se disipan en forma de calor y, en consecuencia, tienen siempre el sentido mostrado en la Fig. 2. Las potencias  $P_1$ ,  $P_a$ ,  $P_{mi}$  y  $P_u$  tienen diferentes sentidos según la forma de funcionamiento de la máquina (motor, generador o freno (Fig. 3)). Se considera que estas potencias son positivas cuando tienen el mismo sentido que cuando la máquina actúa como motor; es decir, el sentido indicado en la Fig. 2.

En cualquier tipo de funcionamiento de la máquina de inducción, la potencia  $P_1$  tiene el mismo sentido que la potencia  $P_a$  y, por otra parte, también sucede que la potencia  $P_{mi}$  tiene el mismo sentido que la potencia  $P_u$ . El signo de la potencia  $P_a$  (y de  $P_1$ ) es el de la resistencia  $R'_2/s$  (como se deduce de la relación (9)) y el de la potencia  $P_{mi}$  (y de  $P_u$ ) es el signo de la resistencia  $R'_c$  (ver (11)).

M.A.R. Pozueta -4-

#### Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con V<sub>1</sub> y f<sub>1</sub> constantes

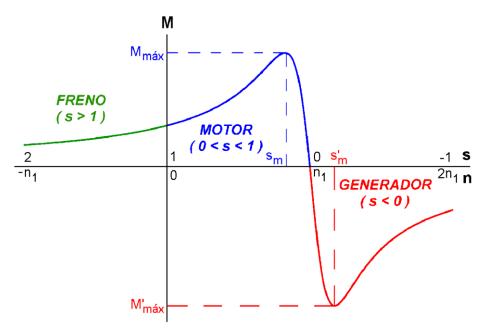


Fig. 3: Curva de par de una máquina asíncrona polifásica a V<sub>1</sub> y f<sub>1</sub> constantes

En la Fig. 3 se muestra la *curva de par* de una máquina asíncrona cuando se la alimenta con una <u>fuente de tensión</u> que suministra a las fases del estator un sistema trifásico equilibrado de tensiones sinusoidales cuyo valor eficaz  $V_1$  y cuya frecuencia  $f_1$  son constantes. En el eje de abscisas de esta gráfica se ha colocado una doble escala: una para la velocidad de giro del rotor n y otra para el deslizamiento s correspondiente según (2). En el eje de ordenadas se muestra el par M. Una vez elegido arbitrariamente el sentido positivo para la velocidad n, el par M se considera positivo si intenta hacer girar al eje en sentido positivo (funcionamiento motor en sentido positivo).

En la curva de par de la Fig. 3 se supone que el campo magnético gira con una velocidad n<sub>1</sub> positiva y que las pérdidas mecánicas P<sub>m</sub> son despreciables. Es decir, se va a trabajar con el *par interno* M que se supone prácticamente igual al *par útil* Mu.

$$M_u = \frac{P_u}{\Omega}; \quad M = \frac{P_{mi}}{\Omega}; \quad M_u \approx M$$
 (13)

Por esta razón se obtiene un par M nulo cuando la velocidad n iguala a la velocidad de sincronismo n<sub>1</sub>. En la curva de la Fig. 3 se pueden distinguir tres formas de funcionamiento de la máquina asíncrona:

- Motor: Cuando la velocidad n tiene un valor entre 0 y la velocidad síncrona n<sub>1</sub>, lo que, según (2), equivale a que el deslizamiento s tome valores entre 1 y 0.
- <u>Generador</u>: Cuando la velocidad n tiene un valor superior a la velocidad de sincronismo n<sub>1</sub>, lo que equivale a que el deslizamiento s sea negativo.
- <u>Freno a contracorriente</u>: Cuando la velocidad n es de sentido contrario a la velocidad de sincronismo n<sub>1</sub>, lo que, según la relación (2), equivale a que el deslizamiento s tome valores superiores a 1.

M.A.R. Pozueta -5-

En la Fig. 3 se puede apreciar que cuando la máquina actúa como motor el par M y la velocidad n son del mismo signo. Sin embargo, en los funcionamientos como generador y como freno a contracorriente el par M y la velocidad n son de signos opuestos y, por lo tanto, el par es un par de frenado.

La expresión del par M en función del deslizamiento s utilizada para obtener la curva de la Fig. 3 es la siguiente:

$$M_{u} \approx M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{P_{a}}{\Omega_{1}} = \frac{P_{a}}{\frac{2 \pi}{60} n_{1}}$$

$$(14)$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2 \pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}$$
(15)

Los valores extremos de la curva de par -que son  $M_{m\acute{a}x}$  en funcionamiento motor y  $M'_{m\acute{a}x}$  funcionando como generador (Fig. 3)- tienen valores absolutos ligeramente distintos y se producen a unos deslizamientos -que son  $s_m$  y  $s'_m$ , respectivamente- de iguales valores absolutos:

$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{2\left(\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}\right)}; \qquad s_m = \pm \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}}$$
(16)

Las fórmulas anteriores dan los valores de  $M_{m\acute{a}x}$  y de  $s_m$ , respectivamente, cuando se utiliza el signo "+" y los valores de  $M'_{m\acute{a}x}$  y de  $s'_m$  si se utiliza el signo "-".

Lo más habitual es que una máquina asíncrona funcione con una velocidad n ligeramente distinta de la de sincronismo  $n_1$ ; es decir, con deslizamientos s muy pequeños. Si  $V_1$  y  $f_1$  son constantes sucede que, cuando el deslizamiento s es pequeño, la amplitud del campo magnético en el entrehierro se conserva prácticamente constante y, entonces, el flujo por polo  $\Phi_M$  también se mantiene prácticamente constante.

#### Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con I1 y f1 constantes

Ahora se va a estudiar a una máquina asíncrona alimentada por una <u>fuente de corriente</u> que hace que por las fases del estator circule un sistema trifásico equilibrado de corrientes sinusoidales cuyo valor eficaz I<sub>1</sub> y cuya frecuencia f<sub>1</sub> no varían y tienen siempre los mismos valores a todas las velocidades. Para más información sobre esta forma de funcionamiento se pueden consultar los libros [1] y [3].

En este caso la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del estator siempre conserva el mismo valor, pues  $I_1$  es constante. Sin embargo, la corriente del rotor  $I_2$  variará con la velocidad y, consecuentemente, la f.m.m. del rotor será variable. El campo magnético en el entrehierro depende del efecto conjunto de ambas f.m.m.s y será, pues, variable con la velocidad y, en consecuencia, el flujo por polo  $\Phi_M$  también será variable.

M.A.R. Pozueta -6-

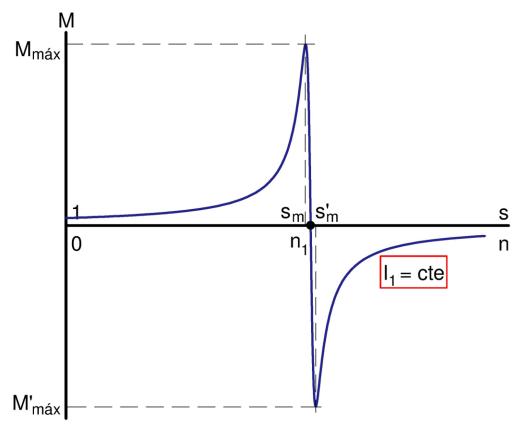


Fig. 4: Curva de par de una máquina asíncrona polifásica a I<sub>1</sub> y f<sub>1</sub> constantes

En la Fig. 4 se muestra la *curva de par* de una máquina asíncrona cuando por el estator se la alimenta con una fuente de corriente de valor eficaz  $I_1$  y frecuencia  $f_1$  constantes. Al igual que en la Fig. 3, en el eje de abscisas se ha colocado una doble escala: una para la velocidad de giro del rotor n y otra para el deslizamiento s correspondiente según (2). En el eje de ordenadas se muestra el par M.

La expresión que ahora relaciona el par M con el deslizamiento s es

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{2 \pi f_1} \frac{s \cdot X_{\mu}^2}{R'_2^2 + s^2 (X'_2 + X_{\mu})^2} I_1^2$$
 (17)

Teniendo en cuenta las relaciones (1) a (5), la expresión anterior se convierte en

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{\omega_2} \frac{(\omega_2 \cdot L_{\mu})^2}{R'_2^2 + [\omega_2 \cdot (L'_{d2} + L_{\mu})]^2} I_1^2$$
(18)

La curva de la Fig. 4 es completamente simétrica; luego, sus valores extremos,  $M_{máx}$  y  $M'_{máx}$ , tienen el mismo valor absoluto:

$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_{\mu}^2}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_1^2$$
 (19)

Estos valores extremos se producen con deslizamientos ( $s_m$  y  $s'_m$ ), frecuencias ( $f_{2m}$  y  $f'_{2m}$ ) y pulsaciones ( $\omega_{2m}$  y  $\omega'_{2m}$ ) de iguales valores absolutos, respectivamente:

$$s_{m} = \pm \frac{R'_{2}}{X'_{2} + X_{\mu}}; \qquad f_{2m} = \pm \frac{R'_{2}}{2\pi \left(L'_{d2} + L_{\mu}\right)}; \qquad \omega_{2m} = \pm \frac{R'_{2}}{L'_{d2} + L_{\mu}} \quad (20)$$

De estas expresiones y de la Fig. 4 se deduce que funcionando con corriente  $I_1$  constante la máquina tiene unos valores de  $s_m$  -o de  $\omega_{2m}$ - muy pequeños. Los valores extremos se producen a unas velocidades muy cercanas a la de sincronismo  $n_1$ . También se aprecia que las magnitudes  $f_{2m}$  y  $\omega_{2m}$  no dependen de la frecuencia en el estator  $f_1$ .

La expresión (18) indica que, si la máquina mantiene constante el valor eficaz  $I_1$  de la corriente del estator, proporcionará el mismo par M cuando en el rotor exista la misma pulsación  $\omega_2$  (o, lo que es equivalente, la misma frecuencia  $f_2$ ), con independencia del valor de la frecuencia  $f_1$  en el estator. Según las relaciones (3) y (4), lo anterior equivale a decir que, si la máquina mantiene constante la amplitud de la f.m.m. estatórica, para iguales valores de la diferencia  $n_2$  entre la velocidad de sincronismo  $n_1$  y de giro de la máquina n se obtendrá el mismo par M, independientemente del valor de la velocidad de sincronismo  $n_1$ .

El circuito equivalente de la Fig. 2 aumenta su impedancia total a medida que disminuye el deslizamiento s. Como ahora este circuito tiene una corriente  $I_1$  constante, esto significa que a medida que disminuye el deslizamiento s aumenta la tensión  $V_1$  en el estator; lo que, a su vez, hace que la amplitud del campo magnético aumente también. Por lo tanto, salvo que la corriente del estator  $I_1$  sea pequeña (inferior a la corriente de vacío que tiene la máquina en condiciones asignadas), para valores muy pequeños del deslizamiento s la máquina estará fuertemente saturada y esto afectará al valor de la inductancia magnetizante  $L_\mu$ . Este parámetro no permanecerá constante, sino que irá disminuyendo a medida que el núcleo magnético se satura más, es decir, a medida que disminuye el deslizamiento s o, lo que es equivalente, a medida que la velocidad de la máquina n se acerque a la de sincronismo  $n_1$ . En este caso, las expresiones para el par máximo (19) y (20) -obtenidas suponiendo que  $L_\mu$  es constante- solamente dan valores aproximados y en ellas se deberá emplear el valor correspondiente de dicho parámetro  $L_\mu$ .

#### Punto de funcionamiento

Cuando un motor asíncrono mueve una carga mecánica en régimen permanente se establece un equilibrio entre el par motor M proporcionado por la máquina asíncrona y el par resistente  $M_{\rm r}$  de la carga. Por lo tanto, el sistema motor-carga funciona con velocidad constante en un punto en el que se verifica la siguiente igualdad

Punto de funcionamiento: 
$$M = M_r$$
 (21)

En la Fig. 5 se han representado sobre los mismos ejes de coordenadas las curvas par-velocidad del motor y de la carga mecánica. El punto de funcionamiento del sistema (P en la Fig. 5) será el punto de corte de ambas curvas.

M.A.R. Pozueta -8-

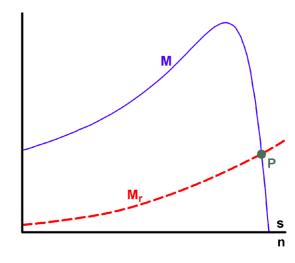


Fig. 5: Punto de funcionamiento

Nótese que los convenios de signos para M y Mr son opuestos:

- M es el par de la máquina asíncrona y con él se usa el convenio de signos motor; esto es, un par a favor de la velocidad de su mismo signo. Por lo tanto, cuando el par M es positivo es un par que intenta que la velocidad sea positiva y cuando M es negativo pretende que la velocidad sea negativa.
- $M_r$  es el par del elemento mecánico acoplado al eje de la máquina asíncrona y que, en principio, se supone que es una carga mecánica. Luego para  $M_r$  se aplica el convenio de signos del par resistente: es un par opuesto a la velocidad de su mismo signo. Esto significa que cuando  $M_r$  es positivo es un par que se opone a que la velocidad sea positiva; es decir, intenta que la velocidad sea negativa. Mientras que cuando  $M_r$  es negativo se opone a que la velocidad sea negativa; es decir, pretende que la velocidad sea positiva.

#### FRENADO POR RECUPERACIÓN DE ENERGÍA (FRENADO REGENERATIVO)

Este sistema de frenado consiste en hacer funcionar la máquina de inducción como generador, con lo cual se invierte su balance de potencias (Fig. 7) y ejerce un par de sentido contrario a la velocidad (Figs. 3 y 8). Para ello hay que conseguir que la velocidad de la máquina sea superior a su velocidad de sincronismo, bien aumentando la primera o bien disminuyendo la segunda.

#### Generador asíncrono

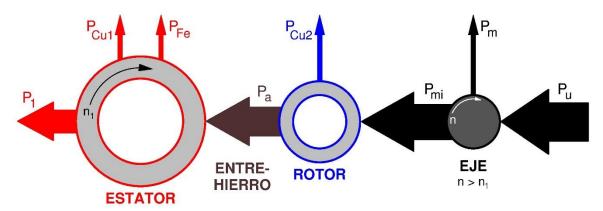
Una máquina asíncrona actúa como generador cuando su velocidad n supera a la de sincronismo  $n_1$ , resultando entonces que el deslizamiento s es negativo (ver (2)).

Con deslizamiento s negativo sucede que la resistencia total del rotor  $R'_2/s$  es negativa, lo que origina que la potencia en el entrehierro  $P_a$  y la potencia eléctrica en el estator  $P_1$  sean negativas (ver las relaciones (8) y (9)). También sucede que la resistencia de carga  $R'_c$  es negativa, lo que conlleva que la potencia mecánica interna  $P_{mi}$  y la potencia mecánica  $P_u$  también sean negativas (ver las relaciones (6), (10) y (11)). Todo esto, que está reflejado en el resumen de la Fig. 6, hace que el balance de potencias (Fig. 7) ahora sea el inverso a cuando la máquina actuaba como motor (Fig. 2).

## 

Fig. 6: Resumen de la máquina asíncrona con el rotor en cortocircuito actuando como generador

energía activa pero es incapaz de generar energía reactiva.



<u>Fig. 7</u>: Balance de potencias en un generador asíncrono con el rotor en cortocircuito (Se ha mantenido la misma nomenclatura que cuando la máquina actúa como motor. Por esta razón, se ha denominado  $P_u$  a la potencia en el eje, aunque ahora -actuando como generador- ya no es la potencia útil)

En funcionamiento como generador la máquina de inducción absorbe una potencia mecánica por el eje  $P_u$ , para lo cual debe ejercer un par de frenado M (opuesto a la velocidad n), y genera una potencia eléctrica  $P_1$  que suministra por el estator.

Nótese que en el circuito equivalente de una máquina asíncrona con el rotor en cortocircuito (Fig. 1) las reactancias no cambian nunca de signo y siempre son inductivas. Esto significa que el factor de potencia de la máquina siempre va a ser inductivo y nunca podrá generar potencia reactiva.

Por lo tanto, un generador asíncrono con el rotor en cortocircuito produce potencia activa, pero no potencia reactiva. Esto, en principio, impide que una máquina asíncrona funcione como generador aislado, alimentando ella sola a una carga eléctrica; sino que debe estar acoplado a otro generador o a una red que suministre la potencia reactiva necesaria.

M.A.R. Pozueta -10-

No obstante lo anterior, existe la posibilidad de que la máquina asíncrona pueda funcionar como generador aislado colocando condensadores en paralelo con el estator, los cuales proporcionan potencia reactiva. Sin embargo, es un sistema poco práctico para alimentar cargas eléctricas cuya potencia no permanezca constante. Para más información puede consultar el libro de Fraile [8].

Se puede conseguir que una máquina asíncrona pueda actuar como generador aislado si no tiene su rotor en cortocircuito sino alimentado a través de un convertidor de frecuencia (máquina asíncrona doblemente alimentada), lo que exige que se trate de una máquina de rotor bobinado. En este texto no se estudia esta forma de funcionamiento. Para más detalles consulte mi texto [16].

#### Ejemplos de frenado regenerativo

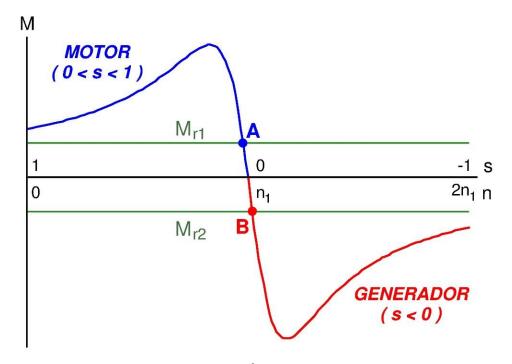


Fig. 8: Frenado regenerativo

Un ejemplo de este tipo de frenado es el vehículo que sube y baja una pendiente que se muestra en la Fig. 8. Si se desprecia el efecto de los rozamientos, mientras el vehículo sube, la máquina asíncrona actúa de motor dando un par M que debe vencer el par resistente M<sub>r1</sub> debido al peso del vehículo y la velocidad n es ligeramente inferior a la de sincronismo n<sub>1</sub> (punto A de la Fig. 8). Cuando baja la pendiente el par debido al peso es ahora un par motor o, lo que es igual, un par resistente negativo M<sub>r2</sub> (Fig. 8). El vehículo aumenta su velocidad debido a la acción motora conjunta de la máquina de inducción y de su peso hasta que supera la velocidad de sincronismo. A partir de este momento, la máquina asíncrona comienza a girar con una velocidad superior a la de sincronismo y empieza a actuar de freno (de generador) alcanzándose el equilibrio cuando el par M de la máquina (que ahora es un par de frenado) iguale al par  $M_{r2}$  (punto B de la Fig. 8). De esta manera la máquina asíncrona "retiene" el vehículo impidiendo que alcance velocidades excesivas. La velocidad final será pues ligeramente superior a la de sincronismo. Como se aprecia en este ejemplo, una máquina de inducción pasa automáticamente a funcionar como freno regenerativo si el sistema se acelera y su velocidad sobrepasa a la de sincronismo n<sub>1</sub>.

M.A.R. Pozueta -11-

Si la máquina de inducción está alimentada mediante un variador de frecuencia se la puede hacer actuar como generador sin que aumente su velocidad. Para ello hay que reducir la frecuencia  $f_1$  de forma que la velocidad de sincronismo  $n_1$  sea inferior a la de giro del rotor n. De esta manera, disminuyendo gradualmente el valor de la frecuencia  $f_1$  hasta valores muy bajos se puede ir reduciendo paulatinamente la velocidad n hasta casi provocar la parada de la máquina.

En este frenado la máquina actúa como generador por lo que se puede recuperar la energía de frenado (menos la disipada en las pérdidas de la máquina) convirtiéndola en energía eléctrica que se devuelve a la red por el estator de la máquina asíncrona.

#### FRENADO A CONTRACORRIENTE

En este frenado se invierte el sentido de giro del campo magnético con respecto al de giro del rotor, por lo que, según (2), la máquina empieza a funcionar con un deslizamiento superior a 1 y a ejercer un par de frenado (ver la Fig. 3).

Con deslizamiento s mayor que 1 resulta que la resistencia total del rotor  $R'_2/s$  es positiva, lo que origina que la potencia en el entrehierro  $P_a$  y la potencia eléctrica en el estator  $P_1$  sean positivas (ver las relaciones (8) y (9)). También sucede que la resistencia de carga  $R'_c$  es negativa, lo que conlleva que la potencia mecánica interna  $P_{mi}$  y la potencia mecánica  $P_u$  sean negativas (ver las relaciones (6), (10) y (11)). Todo esto, que está reflejado en el resumen de la Fig. 9, hace que el balance de potencias sea el de la Fig. 10.

#### FRENO ASÍNCRONO A CONTRACORRIENTE

φ<sub>2</sub> es mayor que cuando funciona como motor, luego peor f.d.p. <u>Un freno asíncrono a contracorriente absorbe tanto potencia</u> <u>eléctrica por su estator como potencia mecánica por su eje y</u> ambas las transforma íntegramente en calor.

Es un funcionamiento peligroso para el motor. Para reducir las corrientes se utilizan sistemas similares a los de arranque.

Fig. 9: Resumen de la máquina asíncrona actuando como freno a contracorriente

M.A.R. Pozueta -12-

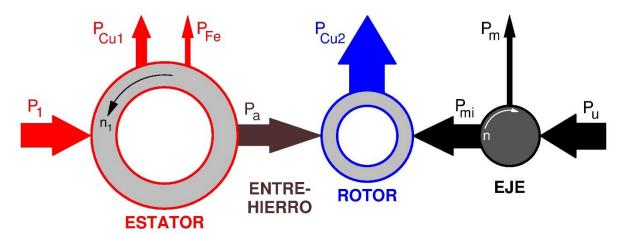


Fig. 10: Balance de potencias en un freno a contracorriente

En funcionamiento como freno a contracorriente la máquina de inducción absorbe una potencia mecánica por el eje  $P_u$ , para lo cual debe ejercer un par de frenado M (opuesto a la velocidad n). Por otra parte, por el estator absorbe una potencia eléctrica  $P_1$  que, tras las pérdidas correspondientes, da lugar una potencia  $P_a$  que atraviesa el entrehierro desde el estator hacia el rotor. Es decir, a la máquina le entra potencia eléctrica por el estator y potencia mecánica por su eje. Toda esa potencia acaba disipándose en forma de calor porque en su totalidad se transforma en las diferentes pérdidas de la máquina, especialmente en las pérdidas del cobre del rotor  $P_{Cu2}$ .

Todo esto hace que en este tipo de funcionamiento la máquina tenga unas corrientes muy elevadas (superiores a las de arranque) y se caliente mucho, lo que puede provocar su deterioro. Por esta razón, no debe emplearse más que en casos excepcionales o en motores especialmente diseñados. A veces se utilizan sistemas similares a los de arranque (disminuir la tensión del estator o añadir impedancias en serie con el rotor) para reducir las corrientes durante este tipo de frenado.

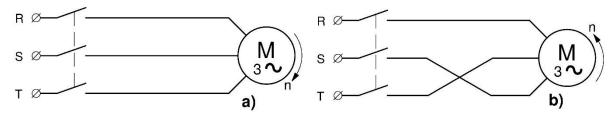


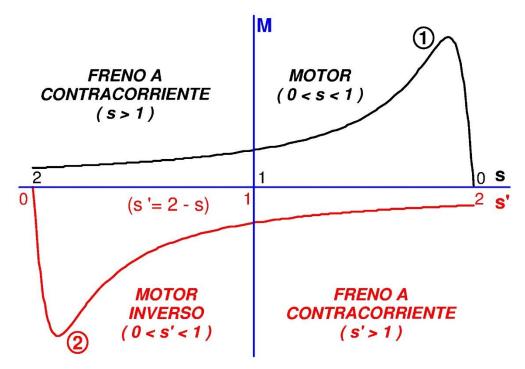
Fig. 11: Inversión del sentido de giro en un motor trifásico

En el caso de motores trifásicos la inversión del sentido de giro del campo magnético se consigue permutando la conexión de dos de las fases del estator (Fig. 11).

Cuando la máquina asíncrona tiene su campo magnético girando en sentido positivo (con velocidad  $n_1$ ) ejerce el par dado por la curva (1) de la Fig. 12, la cual es similar a la mostrada en la Fig. 3. En estas condiciones, de acuerdo con la relación (2), cuando la máquina gira con una velocidad n el deslizamiento s viene dado por:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \tag{22}$$

M.A.R. Pozueta



<u>Fig. 12</u>: Curva del par con los 4 cuadrantes de una máquina asíncrona en la que se puede cambiar el sentido de giro de su campo magnético:

- (1): Curva de par cuando la velocidad de sincronismo es positiva.
- (2): Curva de par cuando se invierte el sentido de giro del campo magnético y la velocidad de sincronismo es negativa.

Si se invierte el sentido de giro del campo magnético, la velocidad de sincronismo pasa a ser  $-n_1$  con lo que a la velocidad n el deslizamiento ahora pasa a ser:

$$s' = \frac{-n_1 - n}{-n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \tag{23}$$

Cuando la velocidad de sincronismo es negativa (velocidad -n<sub>1</sub>), la máquina funciona como motor si su par M y su velocidad n son negativos y, por consiguiente, tienen el mismo sentido. Luego, para deslizamientos s' comprendidos entre 0 y 1 el par es negativo. Para el resto de valores de s' el par M es de sentido contrario a la velocidad n. Entonces, lo que sucede es que la máquina asíncrona ha pasado a funcionar con la curva (2) de la Fig. 12, la cual es simétrica respecto a la curva (1).

De todo lo anterior se deduce que la curva de par de una máquina asíncrona cuando se puede cambiar el signo de su velocidad de sincronismo incluye los cuatro cuadrantes y es la representada en la Fig. 12.

En la Fig. 13 se muestra un ejemplo de este tipo de frenado cuando el par resistente  $M_r$  es debido a un rozamiento seco. Este es un par resistente constante, pero siempre de sentido contrario a la velocidad. En este ejemplo el sistema inicialmente se encontraba en el punto A actuando la máquina asíncrona como motor venciendo el par resistente. Ahora se quiere frenar rápidamente el sistema y se invierten las conexiones de las fases del estator para conseguir el cambio de sentido de giro del campo magnético. Esta inversión se puede realizar muy rápidamente, de forma que cuando ya

M.A.R. Pozueta -14-

se ha producido la inversión, la velocidad del rotor aún no le ha dado tiempo a cambiar debido a la inercia mecánica del conjunto máquina asíncrona-carga mecánica. Esto hace que la curva de la máquina pase de ser la (1) a ser la (2) y el motor en el instante de la inversión pase a estar actuando como freno a contracorriente en el punto B. El sistema se ve ahora sometido a un par de frenado total que es la suma del par de la máquina asíncrona y del par resistente  $M_r$  de la carga. Esto provoca que la velocidad vaya disminuyendo rápidamente hasta que la máquina se sitúa en el punto C cuando la velocidad se ha anulado. En este instante se debe desconectar la alimentación del estator de la máquina asíncrona. De no hacerse así, la máquina volvería a actuar como motor, pero girando en sentido negativo, y acabaría por funcionar en el punto estable D.

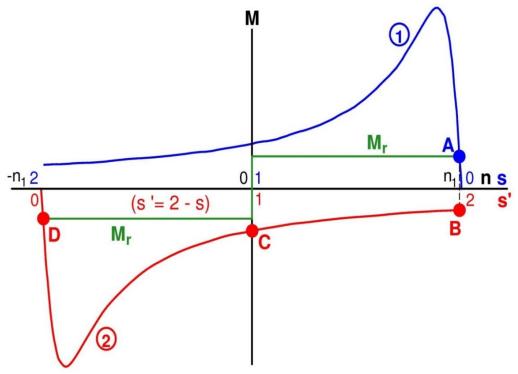


Fig. 13: Frenado a contracorriente

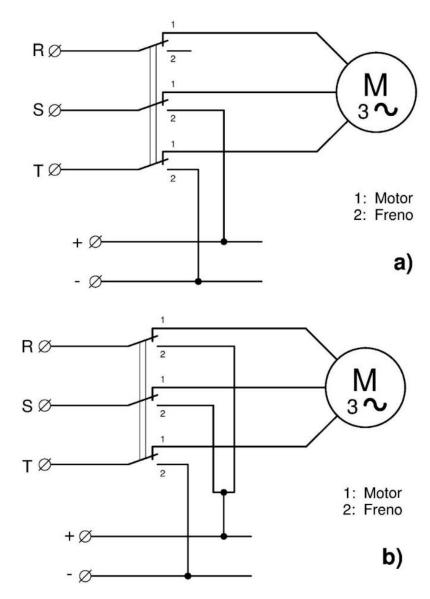
En el momento de la inversión, cuando la máquina aún no ha modificado su velocidad y pasa del punto A al B (Fig. 13), se produce un aumento muy grande de la corriente.

#### FRENADO POR INYECCIÓN DE CORRIENTE CONTINUA (FRENADO DINÁMICO)

En este procedimiento de frenado se alimenta el estator con corriente continua. De esta manera en el entrehierro de la máquina aparece un campo magnético fijo que induce f.e.m.s en los conductores del rotor si éste se está moviendo. Las corrientes rotóricas debidas a estas f.e.m.s se combinan con el campo magnético para producir un par que trata de evitar las variaciones de flujo sobre el devanado del rotor. Por lo tanto, este par intenta que el rotor no se mueva (para que los conductores rotóricos no "vean" un campo magnético variable) y se trata, pues, de un par de frenado.

Por lo tanto, la máquina asíncrona alimentada con corriente continua se comporta como un generador síncrono cuyo inductor -alimentado con corriente continua- está situado en el estator y cuyo inducido está ubicado en el rotor y está en cortocircuito.

M.A.R. Pozueta -15-



<u>Fig. 14</u>: La conexión de corriente continua al estator de una máquina asíncrona puede realizarse de las dos maneras ("a" y "b") representadas en estos esquemas

Otra forma de comprender este funcionamiento es interpretar que en este caso la máquina funciona como asíncrona con un campo magnético giratorio cuya velocidad de sincronismo es nula (campo magnético inmóvil).

Si durante este frenado se quiere mantener la conexión estrella o triángulo que tenían las fases del estator cuando funcionaba con corriente alterna trifásica, existen dos formas de conectar la corriente continua a la máquina que se muestran en la Fig. 14.

Como con corriente continua en la ley de Ohm sólo intervienen las resistencias, pero no las reactancias, la tensión continua con que se alimenta el estator debe tener un valor pequeño para que no origine corrientes peligrosamente altas.

El par de frenado de la máquina se puede regular variando la tensión continua con que se alimenta el estator y, si la máquina es de rotor bobinado, añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor.

M.A.R. Pozueta -16-

#### Máquina asíncrona alimentada con tensión continua

En este tipo de funcionamiento el <u>estator</u> se ve sometido a un campo magnético constante e inmóvil, por lo que no se inducen f.e.m.s en su devanado. Esto hace que las corrientes continuas que circulan por sus fases no cambien cuando la velocidad varía. Estas corrientes solamente dependen del valor de la tensión continua con que se alimenta al estator. Luego, mientras que no se varíe dicha tensión la máquina funciona con una corriente estatórica constante. Por otra parte, el núcleo magnético del estator no tiene pérdidas en el hierro, ya que "ve" un campo magnético invariable.

Además, como se ha comentado anteriormente, el estator funciona como el inductor de un generador síncrono y lo único que hace es originar el campo magnético inductor de la máquina. En consecuencia, no se transmite potencia entre el estator y el rotor a través del entrehierro. Es decir, en esta forma de funcionamiento la potencia en el entrehierro, Pa, es nula.

De todo lo anterior se deduce que la potencia eléctrica  $P_1$  absorbida por el estator se consume íntegramente en las pérdidas en el cobre  $P_{Cu1}$ .

El <u>rotor</u> actúa como el inducido de un generador síncrono en cortocircuito, ya que se le hace girar a una velocidad de n r.p.m. (lo que equivale a  $\Omega$  rad/s) bajo la acción de un campo magnético inmóvil. Luego, desde el rotor este campo magnético se lo "ve" variable con el tiempo y da lugar a que en sus fases haya f.e.m.s y corrientes y a que su núcleo magnético tenga pérdidas en el hierro.

El movimiento del rotor se debe a que la máquina absorbe por el eje una potencia mecánica  $P_u$  (para lo cual debe ejercer un par de frenado). Una pequeña parte de  $P_u$  se pierde en las pérdidas mecánicas  $P_m$  y la máquina transforma al resto en potencia electromagnética. Una parte de esta potencia se gasta en las pérdidas en el hierro  $P_{Fe}$  y la mayor parte de la potencia electromagnética generada se consume en la propia de resistencia  $R_2$  de los devanados del rotor en forma de pérdidas en el cobre  $P_{Cu2}$ . Todo esto se refleja en el resumen de la Fig. 15 y da lugar al balance de potencias de la Fig. 16.

#### MÁQUINA ASÍNCRONA ALIMENTADA CON C.C.

#### Estator:

Su corriente no depende de la velocidad.

Actúa como inductor. No transmite potencia al rotor ( $P_a = 0$ ).

Sometido a un campo magnético constante: no tiene pérdidas magnéticas.

#### Rotor:

Al girar "ve" un campo magnético variable: tiene pérdidas magnéticas.

Absorbe potencia mecánica por su eje: ejerce un par de frenado.

Transforma la energía mecánica absorbida en eléctrica y ésta se disipa en la resistencia de sus fases.

Fig. 15: Resumen de la máquina asíncrona con el estator alimentado con corriente continua

M.A.R. Pozueta -17-

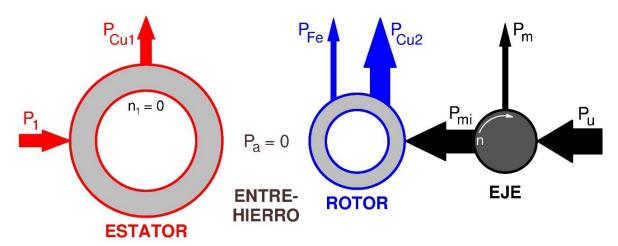


Fig. 16: Balance de potencias de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

La velocidad relativa con que el rotor "ve" girar al campo magnético (ver la relación (3)) es:

$$n_2 = -n; \qquad \Omega_2 = -\Omega \tag{24}$$

Luego, desde el rotor este campo se lo "ve" variable con el tiempo y da lugar a que en las fases del rotor haya f.e.m.s y corrientes de frecuencia  $f_2$  y pulsación  $\omega_2$ , que se pueden calcular partiendo de las expresiones (4) y (24):

$$f_2 = -\frac{n \cdot p}{60} = -\frac{\Omega \cdot p}{2\pi};$$
  $\omega_2 = 2\pi f_2 = -\frac{2\pi}{60} n \cdot p = -\Omega \cdot p$  (25)

El signo negativo de las expresiones anteriores indica que la secuencia de fases en el rotor es de sentido opuesto al de la velocidad de giro n.

La f.m.m. del estator permanece constante, pues la corriente del estator no varía. Es fácil comprobar que el comportamiento de la máquina en estas condiciones se puede analizar como si se trata de una máquina asíncrona alimentada con una corriente constante y cuya velocidad de sincronismo  $n_1$  es nula  $(n_1 = 0)$ .

Nótese que en este caso, donde la velocidad de sincronismo  $n_1$  es nula, no tiene sentido usar el deslizamiento s (relación (2)) como variable de referencia. En su lugar se va a utilizar la pulsación  $\omega_2$  de las corrientes del rotor que se obtiene mediante la relación (25).

Se va a denominar  $I_{1eq}$  al valor eficaz de las corrientes trifásicas con que sería preciso alimentar al estator para que este originase una fuerza magnetomotriz (f.m.m.) de igual amplitud que cuando se lo está alimentando con corriente continua. Es evidente que ambos casos la velocidad de la f.m.m. no va a ser la misma. Con corriente alterna trifásica la f.m.m. girará con una velocidad que depende de la frecuencia estatórica  $f_1$  y con corriente continua la f.m.m. está inmóvil. Pero en ambos casos la amplitud (el valor máximo) de la f.m.m. del estator tiene el mismo valor. Más adelante, en el Anexo A, se analizará la forma de determinar el valor de  $I_{1eq}$ .

M.A.R. Pozueta -18-

Ahora bien, al repasar la teoría de la máquina asíncrona ya se comprobó que, cuando funciona a corriente constante  $I_1$ , el par que origina depende de la frecuencia  $f_2$  (o lo que es equivalente, de la pulsación  $\omega_2$ ) de las corrientes del rotor y es independiente de la frecuencia  $f_1$  de las corrientes del estator. Por lo tanto, se va a obtener el mismo par M con la máquina alimentada con corriente continua que con las corrientes trifásicas de valor eficaz  $I_{1eq}$ , independientemente de la frecuencia  $f_1$  de estas, siempre que la pulsación del rotor  $\omega_2$  sea la misma en ambos casos. Por lo tanto, en este tipo de frenado el par se calcula a partir de la relación (18) así:

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{\omega_2} \frac{\left(\omega_2 \cdot L_{\mu}\right)^2}{R'_2^2 + \left[\omega_2 \cdot \left(L'_{d2} + L_{\mu}\right)\right]^2} I_{1eq}^2$$
 (26)

Teniendo en cuenta que la pulsación del rotor  $\omega_2$  viene dada por la relación (25), la expresión anterior se puede transformar en:

$$M = -\frac{m_1 R'_2}{\Omega} \frac{\left(p \cdot \Omega \cdot L_{\mu}\right)^2}{R'_2^2 + \left[p \cdot \Omega \cdot \left(L'_{d_2} + L_{\mu}\right)\right]^2} I_{1eq}^2 ; \qquad \left(\Omega = \frac{2\pi}{60} n\right)$$
 (27)

Obsérvese en la relación (27) que el par M es siempre de signo opuesto a la velocidad n (o  $\Omega$ , si se mide en rad/s). Esto significa que la máquina siempre va a dar un par de frenado cuando está alimentada con corriente continua. Es decir, siempre va a actuar de freno.

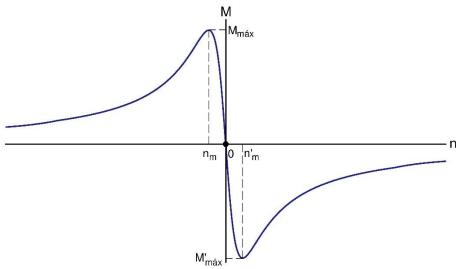


Fig. 17: Curva de par de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

La relación (27) permite obtener la curva de par durante el frenado dinámico, la cual está representada en la Fig. 17. Se aprecia que esta curva es simétrica, por lo que sus valores extremos,  $M_{máx}$  el extremo positivo y  $M'_{máx}$  el extremo negativo, son de iguales valores absolutos. Estos valores extremos se pueden obtener de la relación (19):

$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_{\mu}^2}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_{1\text{eq}}^2$$
 (28)

M.A.R. Pozueta

Las velocidades donde se producen estos valores extremos se denominan, respectivamente,  $n_m$  y  $n'_m$ , si se miden en r.p.m., o  $\Omega_m$  y  $\Omega'_m$ , si se miden en rad/s, tienen el mismo valor absoluto, que es muy pequeño, y se pueden determinar partiendo de las relaciones (20) y (25):

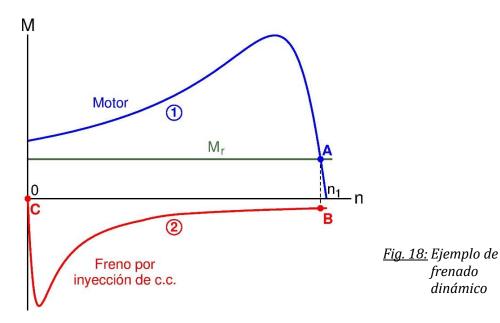
$$\Omega_{\rm m} = \pm \frac{-R'_2}{p(L'_{\rm d2} + L_{\mu})}; \qquad n_{\rm m} = \frac{60}{2\pi} \Omega_{\rm m}$$
(29)

Si en las relaciones (28) y (29) se utiliza el signo "+" se obtienen las magnitudes  $M_{m\acute{a}x}$  y  $\Omega_{m}$ , respectivamente, y si se usa el signo "-" se obtienen  $M'_{m\acute{a}x}$  y  $\Omega'_{m}$ , respectivamente.

Salvo que la corriente  $I_{1eq}$  sea pequeña (inferior a la corriente de vacío en condiciones asignadas), la máquina se satura cada vez más cuanto más pequeña es su velocidad, como ya se indicó al estudiar la máquina alimentada por una fuente de corriente. El parámetro  $L_{\mu}$  varía con la saturación magnética y, en consecuencia, a velocidades pequeñas deja de ser constante y su valor disminuye. Esto hace que las expresiones (28) y (29) -obtenidas suponiendo que  $L_{\mu}$  es constante- solo den valores aproximados y en ellas se deberá emplear el valor correspondiente de  $L_{\mu}$ .

En la relación (27) se aprecia que, para una velocidad  $\Omega$  dada, el par de frenado se puede modificar actuando sobre la corriente  $I_{1eq}$  -lo cual se consigue modificando el valor de la tensión continua aplicada al estator- y sobre la resistencia  $R_2$ , la cual se puede modificar, si la máquina es de rotor bobinado, añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor.

#### Ejemplo de frenado dinámico



En la Fig. 18 se muestra un ejemplo de aplicación de un frenado dinámico de una máquina asíncrona que inicialmente actuaba como motor venciendo un par resistente M<sub>r</sub> constante con la velocidad como, por ejemplo, el debido a una grúa.

M.A.R. Pozueta -20-

Cuando la máquina asíncrona está actuando como motor su curva de par es la (1) y el punto de funcionamiento es el A (Fig. 18). Estando en dicho punto se quiere frenar rápidamente el sistema máquina asíncrona-carga mecánica, para lo cual se inyecta corriente continua al estator de la máquina asíncrona y su curva de par pasa a ser la (2). En el momento de la conexión de la corriente continua la máquina, por inercia, conserva su velocidad y, por lo tanto, pasa a estar en el punto B. A partir de ese momento el conjunto máquina-carga está sometido a dos pares de frenado: el par resistente  $M_r$  de la carga y el par M de la máquina asíncrona. Esto hace que la velocidad descienda rápidamente y la máquina acabará deteniéndose (punto C de la Fig. 18).

#### **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] APARICIO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Madrid: Saber Hoy, S. A. de Ediciones.
- [2] AENOR. 2003. UNE-EN 60034-12: Máquinas eléctricas rotativas. Parte 12: Características de arranque de los motores trifásicos de inducción de jaula con una sola velocidad. Madrid: AENOR.
- [3] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines*. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [4] CHAPMAN. 2005. Máquinas eléctricas. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [5] CORTES CHERTA. 1977. Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo 3: Máquinas de corriente alterna asíncronas. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [6] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [7] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [8] FRAILE MORA, J. 2015. Máquinas eléctricas. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [9] GURRUTXAGA, J. A. 1985. *El fenómeno electromagnético. Tomo IV. Las máquinas eléctricas II.* Santander: Dpto. de publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander.
- [10] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. Máquinas eléctricas. Tomo 2. Moscú: Editorial Mir.
- [11] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. Máquinas eléctricas. Tomo II. Moscú: Editorial Mir.
- [12] LANGSDORF. 1977. Teoría de las máquinas de corriente alterna Méjico: McGraw-Hill.
- [13] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: Univers. de Cantabria. Disponible en: <a href="http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas caminos.pdf">http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas caminos.pdf</a>
- [14] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2011. *Campo magnético en el entrehierro de las máquinas eléctricas simétricas*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en: <a href="http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo magnentrehierro-web.pdf">http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo magnentrehierro-web.pdf</a>
- [15] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2015. *Máquinas síncronas*. Santander: Univ. de Cantabria. Disponible en: <a href="http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Maquina sincrona aislada.pdf">http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Maquina sincrona aislada.pdf</a>
- [16] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2016. *Máquina asíncrona doblemente alimentada*. Santander: Universidad de Cantabria. Disponible en: http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Asíncrona doblemente alimentada.pdf
- [17] SANZ FEITO. 2002. Máquinas eléctricas. Madrid: Pearson Educación.
- [18] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [19] SUÁREZ CREO, J. M. y MIRANDA BLANCO, B. N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [20] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

M.A.R. Pozueta -21-

## **ANEXOS**

-22-

M.A.R. Pozueta

## ANEXO A: COMPORTAMIENTO DEL ESTATOR Y DETERMINACIÓN DE 1<sub>1eq</sub> CUANDO UNA MÁQUINA ASÍNCRONA SE ALIMENTA CON CORRIENTE CONTINUA

#### F.m.m. de un devanado trifásico alimentado con corriente alterna trifásica

En este apartado se va analizar la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) en el entrehierro originada por un bobinado trifásico cuando sus fases están recorridas por un sistema trifásico equilibrado de corrientes sinusoidales. El lector interesado en profundizar en este tema puede consultar mi texto [14].

Inicialmente se va a considerar la actuación de <u>una sola fase</u> que está recorrida por una corriente. Esta fase origina a lo largo del entrehierro una f.m.m. que se distribuye periódicamente en p ciclos. Al descomponer esta distribución espacial de f.m.m. en series de Fourier se obtiene que solamente el primer armónico produce efectos apreciables y se pueden despreciar el resto de los armónicos. Por esta razón, a partir de ahora se aceptará que una fase recorrida por corriente origina una f.m.m. en el entrehierro que varía sinusoidalmente a lo largo del mismo; es decir, es una función sinusoidal de la coordenada angular. Si la corriente es constante (corriente continua) y vale I, el valor máximo en el espacio del primer armónico de la f.m.m. en el entrehierro originada por la fase vale:

En c.c.: 
$$\mathscr{F}_{M} = \frac{4}{\pi} \frac{\xi_{b} \cdot N}{2 p} I = C_{F} \cdot I$$
 (A1)

$$\left(C_{F} = \frac{2}{\pi} \frac{\xi_{b} \cdot N}{p}\right) \tag{A2}$$

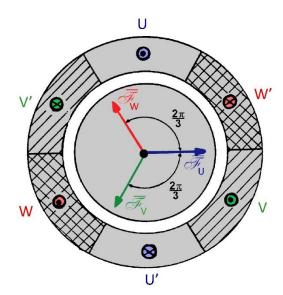
En las fórmulas anteriores N y  $\xi_b$  son, respectivamente, el número de espiras y el factor de bobinado. Ambos, y también  $C_F$ , son parámetros constructivos y para un devanado dado permanecen constantes.

Si la corriente que circula por la fase varía sinusoidalmente con el tiempo (corriente alterna monofásica) resultará que la f.m.m. no solamente variará sinusoidalmente en el espacio con la coordenada angular, sino que también será función sinusoidal del tiempo. El valor máximo en el espacio y en el tiempo de la f.m.m. originada por una fase recorrida por una corriente alterna cuyo valor eficaz es I, vale:

En c.a. monofásica: 
$$\mathscr{F}_{M} = \frac{4}{\pi} \frac{\xi_{b} \cdot N}{2 p} \left( \sqrt{2} \cdot I \right) = C_{F} \cdot \left( \sqrt{2} \cdot I \right)$$
 (A3)

En un <u>devanado trifásico</u> se tienen tres fases -U, V y W- de geometría idéntica y con un ángulo de desfase entre cada par de ellas de  $2\pi/3$  radianes eléctricos; esto es,  $120^\circ$  eléctricos. En la Fig. A1 se muestra de una forma esquemática el estator de una máquina asíncrona trifásica de dos polos. En esta figura se indica el sentido positivo de la corriente de cada fase y se muestran las f.m.m.s generadas por las tres fases -cuando sus corrientes son positivas- mediante los vectores  $\overline{\mathscr{F}_U}$ ,  $\overline{\mathscr{F}_V}$  y  $\overline{\mathscr{F}_W}$ . Estos son fasores espaciales de f.m.m., es decir, vectores dirigidos hacia la posición donde la f.m.m. en el entrehierro es máxima positiva y cuyo módulo es la amplitud (valor máximo) de la f.m.m. correspondiente.

M.A.R. Pozueta -23-



<u>Fig. A1</u>: F.m.m.s originadas por las fases de un devanado trifásico recorridas por corrientes positivas

Si un devanado trifásico se alimenta con un sistema trifásico equilibrado de corrientes sinusoidales, el *Teorema de Ferraris* señala que el efecto conjunto de las tres fases origina una fuerza magnetomotriz (f.m.m.) en el entrehierro giratoria cuya amplitud es igual a 3/2 del valor máximo de la f.m.m. generada por una fase actuando aisladamente. Por consiguiente, se verifica que:

En c.a. trifásica: 
$$\mathscr{F}_{M} = \frac{3}{2} \left[ \frac{4}{\pi} \frac{\xi_{b} \cdot N}{2 p} \left( \sqrt{2} \cdot I \right) \right] = \frac{3}{\sqrt{2}} \left[ C_{F} \cdot I \right]$$
 (A4)

#### Análisis del estator de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua

Se va a considerar la situación en la que el estator de una máquina trifásica se conecta a una red de corriente continua (c.c.) que proporciona una tensión  $V_{cc}$ .

En lo que sigue se van a utilizar estas magnitudes:

Fim es la amplitud (valor máximo) de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) originada por el conjunto de las tres fases del estator.

 $\mathscr{T}_{FM}$  es la amplitud (valor máximo) de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) originada por la fase que está recorrida por la corriente  $I_F$ .

 $I_{1Cu}$  es el valor eficaz de las corrientes trifásicas <u>de fase</u> en el estator que originan las mismas pérdidas en el cobre  $P_{Cu1}$  que cuando está conectado a la red de c.c.

I<sub>1CuL</sub> es el valor eficaz de las corrientes trifásicas <u>de línea</u> en el estator que originan las mismas pérdidas en el cobre P<sub>Cu1</sub> que cuando está conectado a la red de c.c.

 $I_{1eq}$  es el valor eficaz de las corrientes trifásicas <u>de fase</u> que deberían circular por el estator para originar la misma amplitud de la f.m.m. total  $\mathscr{T}_{1M}$  que cuando está conectado a la red de c.c.

 $I_{cc}$  es la corriente total que la red de corriente continua (c.c.) suministra al estator.

M.A.R. Pozueta -24-

IF es la mayor de las corrientes que circulan por las fases del estator cuando se lo conecta a la red de corriente continua (c.c.).

R<sub>1</sub> es la resistencia de una de las fases del estator.

 $R_{cc}$  es la resistencia equivalente que el conjunto de las tres fases del estator presenta frente a la red de c.c.

 $V_{cc}$  es la tensión que proporciona la red de corriente continua (c.c.) a la que se conecta el estator.

Sean  $I_{cc}$  la corriente total que el estator demanda de la red de c.c. y  $R_{cc}$  su resistencia equivalente. Es evidente que, según la Ley de Ohm, se cumplirá que:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R_{cc}} \tag{A5}$$

El valor de  $R_{cc}$  y el reparto de la corriente total  $I_{cc}$  entre las fases del estator dependen de la conexión de las fases entre sí y con la red. En el texto se ha indicado que hay dos formas de conectar el estator a la red de c.c. ("a" y "b" en la Fig. 14) cuando se desea conservar la conexión, estrella o triángulo, que la máquina tenía cuando estaba conectada a una red trifásica. Esto permite cuatro posibles combinaciones: estrella-a, estrella-b, triángulo-a y triángulo-b.

Además, es posible utilizar otras conexiones a la red de c.c. si se deshace la conexión estrella o triángulo: conectar una sola fase, conectar las tres fases en serie con una fase invertida y conectar las tres fases en paralelo con una fase invertida. Aquí no se van a tratar estas conexiones.

Seguidamente, a modo de ejemplo, se va a analizar una de las posibles conexiones, la cual va a ser la conexión **triángulo-a**. En la Fig. A2 se muestra como queda el estator conectado de esta manera a una red de c.c. Hay que tener en cuenta que en corriente continua no intervienen las reactancias de las fases y solamente hay que considerar sus resistencias, que es lo que se ha representado en la Fig. A2.

En la Fig. A2 es fácil comprobar que, frente a la red de c.c., las fases del estator, cuya resistencia es  $R_1$ , quedan conectadas formando dos ramas en paralelo: una de ellas incluye una sola fase (la U) y la otra consta de dos fases (V y W) en serie. Luego:

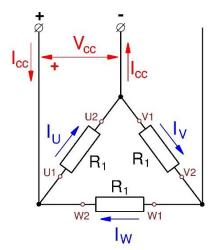


Fig. A2: Conexión triángulo-a

$$\frac{1}{R_{cc}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} = \frac{3}{2R_1} \rightarrow R_{cc} = \frac{2}{3}R_1$$
 (A6)

Por lo tanto, aplicando la Ley de Ohm (A5) se comprueba que con esta conexión sucede que:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R_{cc}} = \frac{3}{2} \frac{V_{cc}}{R_1}$$
 (A7)

De la Fig. A2 y de la relación (A7) se deduce que:

$$I_{\rm U} = \frac{V_{\rm cc}}{R_1} = \frac{2}{3} I_{\rm cc} \tag{A8}$$

$$I_{V} = I_{W} = -\frac{V_{cc}}{2 R_{1}} \rightarrow I_{V} = I_{W} = -\frac{I_{cc}}{3} = -\frac{I_{U}}{2}$$
 (A9)

Por consiguiente, la corriente <u>de fase</u>  $I_{1Cu}$  que en trifásica produce las mismas pérdidas en el cobre  $P_{Cu1}$  que con corriente continua vale:

$$P_{Cu1} = 3 \cdot R_1 \cdot I_{1Cu}^2 = R_1 \left[ I_U^2 + I_V^2 + I_W^2 \right]$$

$$3 \cdot I_{1Cu}^2 = I_{cc}^2 \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{6}{9} I_{cc}^2 = \frac{2}{3} I_{cc}^2$$

$$I_{1Cu} = \sqrt{\frac{2}{9}} I_{cc} = \frac{\sqrt{2}}{3} I_{cc}$$
(A10)

Y, dado que la conexión entre las fases del estator con que se está trabajando es triángulo, la corriente <u>de línea</u> correspondiente I<sub>1CuL</sub> resulta ser:

Conexión triángulo-a: 
$$I_{1CuL} = \sqrt{3} I_{1Cu} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_{cc}$$
 (A11)

De la relación (A9) se deduce que en c.c. la mayor corriente de fase  $I_F$  es  $I_U$ . Luego, teniendo también en cuenta las relaciones (A1) y (A8) se llega a:

$$I_F = I_U;$$
  $\mathscr{F}_{FM} = C_F \cdot I_F = \frac{2}{3} C_F \cdot I_{cc}$  (A12)

$$\mathscr{F}_{\text{UM}} = \mathscr{F}_{\text{FM}}; \qquad \mathscr{F}_{\text{VM}} = \mathscr{F}_{\text{WM}} = \frac{\mathscr{F}_{\text{FM}}}{2}$$
 (A13)

$$\overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{U}} > 0; \qquad \overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{V}} < 0; \qquad \overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{W}} < 0 \qquad \qquad \text{(A14)}$$

M.A.R. Pozueta

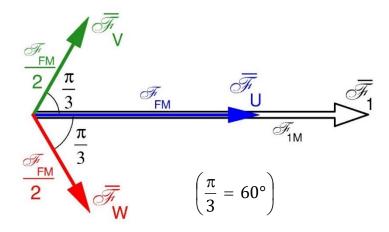


Fig. A3: F.m.m.s cuando el estator se conecta a una fuente de c.c. con la conexión triángulo-a

Teniendo en cuenta la Fig. A1 y las relaciones (A13) y (A14), la Fig. A3 muestra los tres fasores espaciales de f.m.m. de fase en este caso. La suma vectorial de estos fasores proporciona el fasor de la f.m.m. total del estator  $\overline{\mathscr{F}_1}$ , cuya amplitud es  $\mathscr{F}_{1M}$ . Luego:

$$\mathscr{F}_{1M} = \mathscr{F}_{FM} + 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) \frac{\mathscr{F}_{FM}}{2} = \frac{3}{2} \mathscr{F}_{FM} = \frac{3}{2} C_F I_F = C_F I_{cc} \tag{A15}$$

La fórmula (A4) señala que la corriente I<sub>1eq</sub> debe cumplir esta relación:

$$\mathscr{F}_{1M} = \frac{3}{\sqrt{2}} \left[ C_F \cdot I_{1eq} \right] \tag{A16}$$

Identificando (A15) con (A16) se llega finalmente a:

$$I_{1eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} I_{cc} \tag{A17}$$

Estudiando de la misma manera el resto de las conexiones del estator se obtienen los resultados indicados en la Tabla A.I.

Tabla A.I: Comportamiento de las diferentes conexiones del estator a una red de c.c.

CONEXIÓN:	$k_R = \frac{R_{cc}}{R_1}$	$k_F = \frac{I_F}{I_{cc}}$	$k_{CuL} = \frac{I_{1CuL}}{I_{cc}}$	$k_{eq} = \frac{I_{1eq}}{I_{cc}}$
Estrella-a	2	1	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$
Estrella-b	$\frac{3}{2} = 1.5$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707$
Triángulo-a	$\frac{2}{3} = 0,667$	$\frac{2}{3} = 0,667$	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$	$\frac{\sqrt{2}}{3}=0,471$
Triángulo-b	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707$	$\frac{1}{\sqrt{6}}=0,408$

M.A.R. Pozueta

## ANEXO B: CONSIDERACIONES SOBRE LA MÁQUINA ASÍNCRONA ALIMENTADA CON CORRIENTE CONTINUA (FRENADO DINÁMICO)

En este anexo se van a tratar con más detalle algunos aspectos de la máquina asíncrona alimentada con corriente continua; es decir, cuando realiza un frenado dinámico.

#### Velocidad de la f.m.m. del rotor

Cuando una máquina asíncrona se alimenta con corriente continua (c.c.) la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del estator es fija e inmóvil ( $n_1$  = 0). Sin embargo, el rotor al girar se ve sometido a un campo magnético variable, pues existe una velocidad relativa  $n_2$  no nula de esta f.m.m. respecto al rotor ( $n_2$  se calcula mediante la relación (24)). Esto provoca que en el rotor se induzcan unas fuerzas electromotrices (f.e.m.s) que dan lugar a que por sus fases circulen corrientes. Todas estas magnitudes del rotor tienen una frecuencia  $f_2$  que se puede obtener mediante la relación (25):

$$n_2 = -n;$$
  $f_2 = \frac{p \cdot n_2}{60} = -\frac{p \cdot n}{60}$  (B1)

Las corrientes rotóricas de frecuencia  $f_2$  originan una f.m.m. que gira respecto al rotor con una velocidad que se puede calcular utilizando una fórmula análoga a la empleada en (1):

$$\frac{60 \,\mathrm{f_2}}{\mathrm{p}} = \mathrm{n_2} = -\mathrm{n} \tag{B2}$$

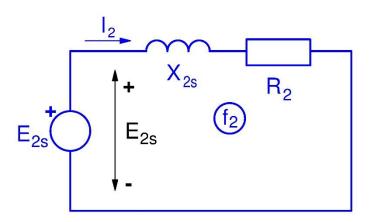
Luego, la f.m.m. rotórica gira con una velocidad -n respecto al rotor, el cual gira con una velocidad n. Esto significa que la f.m.m. del rotor tiene velocidad nula; es decir, la f.m.m. del rotor es inmóvil.

Dado que tanto la f.m.m. del estator como la f.m.m. del rotor son inmóviles, la f.m.m. total también es inmóvil y la máquina tiene un campo magnético total en el entrehierro fijo e invariable en el tiempo. Por esta razón, en el estator no hay pérdidas en el hierro ni se inducen f.e.m.s; por lo que la corriente del estator no está influenciada por lo que suceda en el rotor y no se transfiere potencia entre el estator y el rotor a través del entrehierro (ver la Fig. 16).

#### Ecuación eléctrica del rotor

En la Fig. B1 se muestra como es el circuito eléctrico de una fase del rotor. En esta figura y en lo que sigue se va a mantener la misma nomenclatura y los mismos convenios de signos que se explicaron en mi texto [13] y que son los que se han utilizado en la Fig. 1. Por esta razón, se han mantenido las denominaciones  $E_{2s}$  y  $X_{2s}$  para las magnitudes que varían con la frecuencia del rotor (y, por tanto, también con la velocidad); aunque en alimentación con corriente continua ya no se utilice el deslizamiento s como variable de referencia, sino la pulsación  $\omega_2$ .

M.A.R. Pozueta -28-



<u>Fig. B1</u>: Circuito de una fase del rotor

La corriente en una fase del rotor, cuyo valor eficaz es I<sub>2</sub>, se considera positiva cuando origina una f.m.m. que, al contrario de la f.m.m. del estator, da lugar a un campo magnético negativo.

Aunque, por abreviar, en este texto se le llame f.e.m. a  $E_{2s}$ , realmente su convenio de signos es el de una fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.); esto es, en una fase su valor instantáneo  $e_{2s}$  se calcula empleando la Ley de Faraday con signo "+":

$$e_{2s} = +\frac{d \psi_2}{d t} \tag{B3}$$

 $\psi_2$  es el valor instantáneo de los *enlaces de flujo*  $\Psi_2$  que el campo magnético común total origina en una fase del rotor. Este campo magnético da lugar a un *flujo por polo*  $\Phi_M$  y el valor máximo de  $\Psi_2$  se obtiene así:

$$\Psi_{2M} = N_2 \xi_{b2} \Phi_M \tag{B4}$$

En la expresión anterior  $N_2$  es el número de espiras en serie y  $\xi_{b2}$  es el factor de bobinado de una fase del rotor. Aplicando la *Ley de Faraday* (B3) y operando se deduce que el fasor  $\overline{E}_{2s}$  y el valor eficaz  $E_{2s}$  de la f.e.m. del rotor son:

$$\overline{E}_{2s} = j \omega_2 \overline{\Psi}_2 \tag{B5}$$

$$E_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2 \Psi_{2M} \tag{B6}$$

$$E_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \pi f_2) (N_2 \xi_{b2} \Phi_M) = 4,44 f_2 N_2 \xi_{b2} \Phi_M$$
 (B7)

En la expresión (B5)  $\overline{\Psi}_2$  es el fasor de enlaces de flujo del rotor.

Por otra parte, la reactancia de dispersión del rotor  $X_{2s}$  se puede expresar en función de la inductancia de dispersión del rotor  $L_{d2}$  así:

$$X_{2s} = 2 \pi f_2 L_{d2} = \omega_2 L_{d2}$$
 (B8)

M.A.R. Pozueta -29-

De la Fig. B1 se deduce que:

$$\overline{E}_{2s} = j \omega_2 \overline{\Psi}_2 = \overline{I}_2 (R_2 + j X_{2s}) = \overline{I}_2 (R_2 + j \omega_2 L_{d2})$$
(B9)

Para trabajar más cómodamente se va a realizar la **reducción del rotor al estator**. Esto equivale a sustituir el rotor real por uno equivalente <u>que sigue girando a la velocidad n</u> y que tiene los mismos parámetros que el estator:

$$m'_2 = m_1;$$
  $N'_2 = N_1;$   $\xi'_{b2} = \xi_{b1}$  (B10)

En las relaciones anteriores  $m_1$ ,  $N_1$  y  $\xi_{b1}$  son, respectivamente: el número de fases, el número de espiras en serie de una fase y el factor de bobinado del estator.

Esto hace que las magnitudes del rotor reducidas al estator se obtengan a partir de sus correspondientes magnitudes del rotor real y de las relaciones de transformación de tensiones  $m_{\nu}$  y de corrientes  $m_{i}$  de la máquina mediante estas expresiones:

$$\begin{split} m_{V} &= \frac{N_{1} \ \xi_{b1}}{N_{2} \ \xi_{b2}}; \qquad m_{i} = \frac{m_{1}}{m_{2}} \ m_{V} \\ \overline{E}'_{2s} &= m_{V} \cdot \overline{E}_{2s}; \qquad \overline{\Psi}'_{2} = m_{V} \cdot \overline{\Psi}_{2}; \qquad \overline{I}'_{2} = \frac{\overline{I}_{2}}{m_{i}} \\ R'_{2} &= m_{V} \cdot m_{i} \cdot R_{2} \\ X'_{2s} &= m_{V} \cdot m_{i} \cdot X_{2s}; \qquad L'_{d2} = m_{V} \cdot m_{i} \cdot L_{d2} \end{split}$$
 (B11) 
$$\begin{split} \Psi'_{2M} &= N_{1} \ \xi_{b1} \ \Phi_{M} \end{split}$$

$$E'_{2s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2 \ \Psi'_{2M} = 4,44 \ f_2 \ N_1 \ \xi_{b1} \ \Phi_M$$
 (B13)

Esta reducción al estator es un poco diferente a la que se utiliza cuando la máquina funciona alimentada con corriente alterna trifásica, que es con la que se dedujo el circuito equivalente de la Fig. 1 (ver mi texto [13]). Esto se debe a que ahora se utiliza un rotor equivalente que sigue girando a la velocidad n y no un rotor equivalente inmóvil. Por lo tanto, las magnitudes reducidas al estator son de frecuencia  $f_2$  y pulsación  $g_2$  y la ecuación del rotor queda similar a la (B9); esto es, no hay que introducir ninguna resistencia de carga:

$$\overline{E}'_{2s} = j \omega_2 \overline{\Psi}'_2 = \overline{I}'_2 (R'_2 + j X'_{2s}) = \overline{I}'_2 (R'_2 + j \omega_2 L'_{d2})$$
(B14)

En efecto, al aplicar las relaciones (B11) en (B9) se obtiene que:

$$\frac{\overline{E'_{2s}}}{m_v} = j \omega_2 \frac{\overline{\Psi'_2}}{m_v} = \left(m_i \cdot \overline{I'_2}\right) \cdot \left(\frac{R'_2}{m_v \cdot m_i} + j \frac{X'_{2s}}{m_v \cdot m_i}\right) = \frac{\overline{I'_2}}{m_v} \cdot \left(R'_2 + j X'_{2s}\right)$$

Luego, se comprueba que se cumple la relación (B14).

M.A.R. Pozueta -30-

Si se linealiza el circuito magnético de la máquina y, en consecuencia, se supone que se mantiene constante su nivel de saturación tanto cuando actúa la f.m.m. total como cuando actúa aisladamente la f.m.m. estatórica o la f.m.m. rotórica; se puede aceptar que el fasor de los enlaces de flujo totales del rotor reducido al estator  $\overline{\Psi}'_2$  se obtiene sumando los respectivos fasores de enlaces de flujo originados por la f.m.m. del estator  $\overline{\Psi}'_{21}$  y por la f.m.m. del rotor  $\overline{\Psi}'_{22}$ :

$$\overline{\Psi}'_2 = \overline{\Psi}'_{21} + \overline{\Psi}'_{22} \tag{B15}$$

Los enlaces de flujo  $\Psi'_{22}$  en el rotor reducido al estator debidos al campo magnético originado por la acción exclusiva de la f.m.m. del rotor constituyen un fenómeno de autoinducción y se pueden calcular mediante la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$ . Dado el convenio de signos establecido para  $I_2$  e  $I'_2$  (producen una f.m.m. opuesta al campo magnético) y teniendo presente la relación (B15) se deduce que:

$$\overline{\Psi}'_{22} = -L_{\mu} \bar{I}'_{2}; \qquad \overline{\Psi}'_{2} = \overline{\Psi}'_{21} - L_{\mu} \bar{I}'_{2}$$
 (B16)

Mientras no se modifique la tensión continua  $V_{cc}$  con que se alimenta a la máquina, las corrientes de las fases del estator no varían y, por tanto, tampoco, cambia la f.m.m. estatórica. En consecuencia, mientras que no se modifique la tensión continua  $V_{cc}$ , los enlaces de flujo  $\Psi'_{21}$  que el estator origina sobre una fase del rotor reducido al estator se mantienen constantes.

Si el rotor estuviera en circuito abierto, su corriente I'2 sería nula y los enlaces de flujo en una fase del rotor reducido al estator se deberían únicamente a la f.m.m. del estator y, por consiguiente, serían iguales a  $\Psi'_{21}$  (cuyo valor máximo es  $\Psi'_{21M}$ ). El fasor de la f.e.m. que se induce en esta situación en cada fase del rotor reducido al estator es  $\overline{E}'_{0s}$  y su valor eficaz es  $\overline{E}'_{0s}$ . Estas magnitudes se calculan así:

$$\overline{E}'_{0s} = j \omega_2 \overline{\Psi}'_{21};$$
  $E'_{0s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_2 \Psi'_{21M}$  (B17)

Combinando las relaciones (B14), (B16) y (B17) se llega a:

$$\overline{E}'_{0s} = j \omega_2 \overline{\Psi}'_{21} = \overline{I}'_2 \left[ R'_2 + j \omega_2 \left( L'_{d2} + L_{\mu} \right) \right] \tag{B18}$$

Se sabe que  $I_{1eq}$  es el valor eficaz de las corrientes trifásicas que hacen que el estator origine una f.m.m. de la misma amplitud que cuando se lo alimenta con corriente continua. Los enlaces de flujo  $\Psi'_{21}$  en el rotor reducido al estator debidos al campo magnético originado por la acción exclusiva de la f.m.m. del estator constituyen un fenómeno de inducción mutua. Dado que (si el rotor está reducido al estator) los bobinados del estator y del rotor son iguales,  $\Psi'_{21}$  se puede calcular también mediante la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$ . Luego, trabajando con valores eficaces se deduce que:

$$\Psi'_{21} = L_{\mu} I_{1eq}$$
 (B19)

M.A.R. Pozueta -31-

Sea  $\overline{I}_{1eq}$  un fasor cuyo módulo es  $I_{1eq}$  y cuyo argumento es el mismo que el del fasor  $\overline{\Psi}'_{21}$ . Sucede que:

$$\overline{\Psi}'_{21} = L_{\mu} \overline{I}_{1eq} \tag{B20}$$

Llevando la igualdad (B20) a la ecuación del rotor (B18) finalmente se llega al siguiente resultado:

$$\overline{E}'_{0s} = j\omega_2 L_{\mu} \overline{I}_{1eq} = \overline{I}'_2 \left[ R'_2 + j\omega_2 \left( L'_{d2} + L_{\mu} \right) \right]$$
(B21)
(Usar el valor absoluto de  $\omega_2$ )

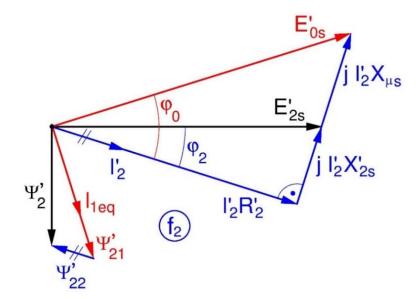
La relación anterior es la *ecuación eléctrica del rotor reducido al estator* cuando la máquina está alimentada con corriente continua; la cual es similar a la que se obtiene cuando se la alimenta con una fuente de corriente trifásica que suministra una corriente  $I_{1eq}$  constante. Como se comprobará más adelante, en esta expresión debe emplearse el valor absoluto de la pulsación  $\omega_2$ , independientemente del sentido de giro del rotor.

La ecuación eléctrica del rotor reducido al estator (B21) también puede escribirse de esta otra manera:

$$\overline{E}'_{0s} = \overline{I}'_{2} \left[ R'_{2} + j \left( X'_{2s} + X_{\mu s} \right) \right]$$
(B22)
(Usar el valor absoluto de  $\omega_{2}$ )

En la relación (B22) los parámetros de f.e.m. y de reactancia dependen de la pulsación  $\omega_2$ , por lo tanto se ha incluido el subíndice "s" en su nombre:

$$\overline{E}'_{0s} = j \omega_2 \overline{\Psi}'_{21}; \qquad \qquad X'_{2s} = \omega_2 L'_{d2}; \qquad \qquad X_{\mu s} = \omega_2 L_{\mu} \qquad \qquad (B23)$$



<u>Fig. B2</u>: Diagrama fasorial del rotor reducido al estator

M.A.R. Pozueta -32-

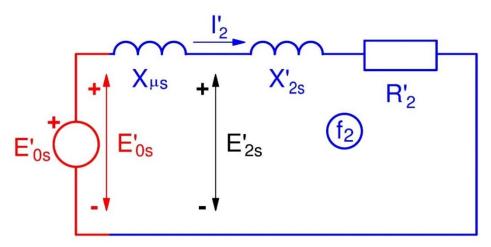


Fig. B3: Circuito equivalente del rotor reducido al estator

La relación (B22) da lugar al diagrama fasorial de la Fig. B2 y permite obtener el circuito equivalente del rotor mostrado en la Fig. B3.

Ya se indicó en el texto que cuando la pulsación  $\omega_2$  tiene signo negativo significa que la secuencia de las fases del rotor se invierte respecto a cuando  $\omega_2$  es positivo. Pero, puesto que en este tipo de funcionamiento la única fuente de energía eléctrica que actúa en cada fase del rotor es la f.e.m. que se induce sobre ella (Fig. B3), el comportamiento de una fase individual debe ser independiente del signo de  $\omega_2$ . Siempre sucede que una fase del rotor se comporta como una f.e.m. inducida actuando sobre una impedancia inductiva (Fig. B3). Por el hecho de que la pulsación  $\omega_2$  cambie de signo no puede suceder que la impedancia cambie a ser capacitiva. Viéndolo de otra manera, ya que el convenio de signos es arbitrario, no puede suceder que el comportamiento de una fase sea inductivo o capacitivo según el signo de  $\omega_2$ . Finalmente, el balance de potencias en el rotor (Fig. 16) no depende del signo de  $\omega_2$ : independientemente del sentido de giro del rotor, la máquina absorbe una potencia mecánica  $P_u$  por su eje, ejerciendo un par de frenado, y la disipa en las pérdidas en el rotor, especialmente en las pérdidas en el cobre. Es por esta razón que en las expresiones anteriores se debe usar el valor absoluto de  $\omega_2$ .

Otra forma de entender esto es percatarse que cuando la pulsación  $\omega_2$  es negativa, los ángulos entre fasores se deben interpretar en sentido contrario a como se hace habitualmente (cuando  $\omega_2$  es positiva). Así, si un fasor queda adelantado en sentido antihorario un ángulo respecto a otro y la pulsación  $\omega_2$  es negativa, esto significa que la magnitud que representa el primer fasor no está adelantada, sino que está retrasada en el tiempo respecto a la del segundo. Por lo tanto, aunque en la expresión (B21) se dé signo negativo a  $\omega_2$  se obtiene los mismos resultados que cuando se le da signo positivo.

Para comprobarlo, ahora se va a utilizar una versión reducida del diagrama fasorial de la Fig. B2 y, además, en vez de  $\overline{E}'_{2s}$  se va a tomar como fasor de referencia al fasor  $\overline{\Psi}'_{21}$ , que no depende de  $\omega_2$ . Se dibujan dos diagramas fasoriales, uno con una pulsación  $\omega_2$  positiva y otro con una pulsación  $\omega_2'$  negativa ( $\omega_2' = -\omega_2$ ). Estos diagramas fasoriales están representados en la Fig. B4a y en la Fig. B4b. En dichas figuras se tiene que:

$$\omega'_2 = -\omega_2; \qquad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \tag{B24}$$

M.A.R. Pozueta -33-

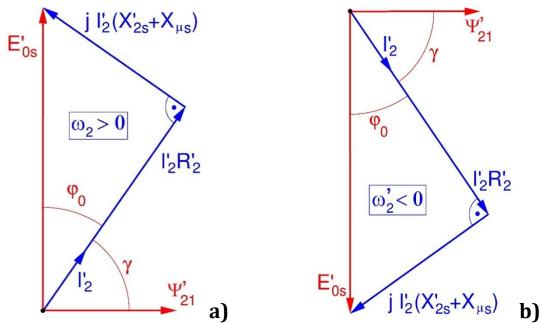


Fig. B4: Diagramas fasoriales de una máquina asíncrona alimentada con corriente continua: a) utilizando una pulsación  $\omega_2$  positiva; b) utilizando una pulsación  $\omega'_2$  negativa ( $\omega'_2 = -\omega_2$ )

En la Fig. B4a se trabaja con una pulsación  $\omega_2$  positiva. Esto quiere decir que los fasores son vectores que giran con una velocidad  $\omega_2$  en sentido <u>antihorario</u> y cuya proyección horizontal multiplicada por  $\sqrt{2}$  da el valor instantáneo de la magnitud que representan. Luego, de la Fig. B4a se deduce que:

$$\psi'_{21} = \sqrt{2} \ \Psi'_{21} \cos(\omega_{2}t)$$

$$i'_{2} = \sqrt{2} \ I'_{2} \cos(\omega_{2}t + \gamma)$$

$$e'_{0s} = \sqrt{2} \ E'_{0s} \cos(\omega_{2}t + \frac{\pi}{2})$$
(B25)

Supóngase que ahora se invierte el sentido de giro de la velocidad, aunque conservando su valor absoluto. La pulsación obtenida mediante la fórmula (25) sale negativa y ahora es  $\omega'_2 = -\omega_2$ . De momento, se va a utilizar la pulsación tal cual, sin poner su valor absoluto, en las expresiones (B21) y (B22). Esto significa que todos los fasores conservan su módulo, pero que los fasores de f.e.m., y también las reactancias, cambian de signo; lo que obliga a que el fasor de corriente  $\bar{I}'_2$  ahora aparezca adelantado respecto al fasor de f.e.m.  $\bar{E}'_{0s}$ . En consecuencia, el diagrama fasorial pasa a ser el mostrado en la Fig. B4b.

En la Fig. B4b se trabaja con una pulsación  $\omega'_2$  negativa, cuyo valor absoluto es  $\omega_2$ . Esto quiere decir que ahora los fasores son vectores que giran con una velocidad  $\omega_2$  en sentido <u>horario</u> y cuya proyección horizontal multiplicada por  $\sqrt{2}$  da el valor instantáneo de la magnitud que representan. Luego, de la Fig. B4b se deduce que:

$$\psi'_{21} = \sqrt{2} \ \Psi'_{21} \cos(\omega'_{2}t) = \sqrt{2} \ \Psi'_{21} \cos(-\omega_{2}t)$$

$$i'_{2} = \sqrt{2} \ I'_{2} \cos(\omega'_{2}t - \gamma) = \sqrt{2} \ I'_{2} \cos(-\omega_{2}t - \gamma)$$

$$e'_{0s} = \sqrt{2} \ E'_{0s} \cos(\omega'_{2}t - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \ E'_{0s} \cos(-\omega_{2}t - \frac{\pi}{2})$$

$$(B26)$$

Es sabido que se verifica esta relación trigonométrica:

$$\cos\left(-\mathbf{x}\right) = \cos\mathbf{x} \tag{B27}$$

Por consiguiente, las relaciones (B26) se convierten en:

$$\psi'_{21} = \sqrt{2} \ \Psi'_{21} \cos(-\omega_{2}t) = \sqrt{2} \ \Psi'_{21} \cos(\omega_{2}t)$$

$$i'_{2} = \sqrt{2} \ I'_{2} \cos(-\omega_{2}t - \gamma) = \sqrt{2} \ I'_{2} \cos(\omega_{2}t + \gamma)$$

$$e'_{0s} = \sqrt{2} \ E'_{0s} \cos(-\omega_{2}t - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \ E'_{0s} \cos(\omega_{2}t + \frac{\pi}{2})$$

$$(B28)$$

Es decir, se obtienen exactamente los mismos resultados que en las relaciones (B25), cuando la pulsación  $\omega_2$  era positiva. Esto quiere decir, que ambos diagramas fasoriales de la Fig. B4 representan las mismas magnitudes y son equivalentes. Pero trabajar con el diagrama de la Fig. B4b es farragoso, ya que cambia los convenios de signos utilizados usualmente en la Electrotecnia. Es por esta razón que en las expresiones (B21) y (B22) se usa el valor absoluto de  $\omega_2$  y se va a trabajar con el diagrama fasorial de la Fig. B2, del cual el representado en la Fig. B4a es una versión reducida.

Dado que en este tipo de funcionamiento de la máquina asíncrona la pulsación  $\omega_2$  se obtiene mediante la relación (25) y que en la relación (B21) se debe emplear su valor absoluto, se deduce que:

$$j p |\Omega| L_{\mu} \bar{I}_{1eq} = \bar{I}'_{2} [R'_{2} + j p |\Omega| (L'_{d2} + L_{\mu})]$$
 (B29)

Cuando se realiza el análisis lineal de un generador síncrono de rotor cilíndrico (método de Behn-Escheburg), el cual se describe en mi texto [15], se obtiene un circuito equivalente del inducido similar al mostrado en la Fig. B3 si el generador está en cortocircuito. En el generador síncrono,  $X'_{2s}$  sería -al igual que en la máquina asíncrona- la reactancia de dispersión  $(X_{\sigma})$ ,  $X_{\mu s}$  vendría a ser la reactancia de reacción de inducido  $(X_p)$  y la suma  $(X'_{2s} + X_{\mu s})$  pasaría a ser la reactancia síncrona  $(X_s)$ .

Lo anterior confirma la afirmación que se ha hecho anteriormente en el texto: una máquina asíncrona alimentada con corriente continua se comporta como un generador síncrono en cortocircuito cuyo inducido está ubicado en el rotor.

#### Corriente en el rotor. Saturación magnética. Inductancia magnetizante Lu

De las expresiones (B21), (B22) y (B29) se deduce que el fasor y el valor eficaz de la corriente del rotor reducida al estator se pueden obtener así:

$$\bar{I'}_2 = \frac{\overline{E'}_{0s}}{R'_2 + j\left(X'_{2s} + X_{\mu s}\right)} = \frac{\overline{E'}_{0s}}{R'_2 + j\,p\,|\Omega|\left(L'_{d2} + L_{\mu}\right)} = \frac{j\,p\,|\Omega|\,L_{\mu}\,\bar{I}_{1eq}}{R'_2 + j\,p\,|\Omega|\left(L'_{d2} + L_{\mu}\right)} \label{eq:interpolarization} \ (B30)$$

$$I'_{2} = \frac{p \left| \Omega \right| L_{\mu}}{\sqrt{R'_{2}^{2} + \left[ p \Omega \left( L'_{d2} + L_{\mu} \right) \right]^{2}}} \quad I_{1eq} = \frac{L_{\mu}}{\sqrt{\left( \frac{R'_{2}}{p \Omega} \right)^{2} + \left( L'_{d2} + L_{\mu} \right)^{2}}}} \quad I_{1eq} \quad (B31)$$

M.A.R. Pozueta

Estas relaciones permiten extraer una serie de conclusiones sobre la corriente del rotor:

- La corriente del rotor no depende del signo de la velocidad (n en r.pm. o  $\Omega$  en rad/s) de giro de la máquina.
- La corriente del rotor aumenta con la velocidad. Cuanto mayor es la velocidad  $\Omega$  a la que gira la máquina, mayor es la corriente del rotor (ver la relación (B31)).

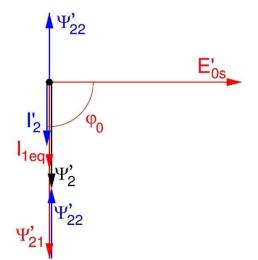
Cuando la velocidad del rotor es nula, la relación (B31) indica que corriente del rotor también es nula. Esto es lógico, si el rotor no se mueve no se inducen f.e.m.s en sus fases y, consecuentemente, no hay corriente circulando por ellas.

Aunque la corriente del rotor reducida al estator aumenta con la velocidad, su valor eficaz  $I'_2$  siempre permanece con un valor inferior a  $I_{1eq}$ . Así, en el límite  $I'_2$  vale:

$$\Omega \to \infty \implies I'_2 = \frac{L_{\mu}}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_{1eq} = \frac{1}{\frac{L'_{d2}}{L_{\mu}} + 1} I_{1eq}$$
 (B32)

• La relación (B30) y el diagrama fasorial de la Fig. B2 indican que cuanto mayor es la velocidad  $\Omega$  y, por lo tanto, mayores son la pulsación  $\omega_2$  y las reactancias  $X'_{2s}$  y  $X_{\mu s}$ , más inductivo es el circuito del rotor y mayor es el ángulo  $\phi_0$  de desfase entre los fasores  $\overline{E}'_{0s}$  e  $\overline{I}'_2$ . En el límite  $\overline{I}'_2$  estaría retrasada  $90^\circ$  con respecto a  $\overline{E}'_{0s}$ .

Al estudiar la máquina síncrona (ver mi texto [15]) se comprueba que cuanto más inductiva es la corriente del inducido su f.m.m. se opone cada vez más a la f.m.m. del inductor. En el límite, cuando la corriente inducida es inductiva pura, su f.m.m. es desmagnetizante porque tiene la misma dirección que la f.m.m. del inductor, pero crea un campo magnético de sentido contrario. Ambas f.m.m.s se oponen y el campo magnético total es inferior al de vacío.



<u>Fig. B5</u>: Efecto desmagnetizante de una corriente rotórica puramente inductiva

M.A.R. Pozueta -36-

Para el caso de la máquina asíncrona alimentada con corriente continua este efecto desmagnetizante de I'2 se puede comprobar mediante el diagrama fasorial de la Fig. B5, que se ha deducido de la Fig. B2 tomando como referencia al fasor  $\overline{E}'_{0s}$ . En esta figura se observa que cuando el ángulo  $\varphi_0$  vale 90° el fasor  $\overline{\Psi}'_{22}$  tiene sentido opuesto al fasor  $\overline{\Psi}'_{21}$ , lo que hace que el fasor de los enlaces de flujo totales  $\overline{\Psi}'_2$  sea menor.

De todo lo anterior se desprende que a medida que aumenta la velocidad crece el efecto desmagnetizante de la *reacción de inducido* (es decir, de la f.m.m. originada por el rotor) porque aumenta su valor y su efecto es cada vez más opuesto al de la f.m.m. del inductor (es decir, del estator). Pero la f.m.m. del inducido nunca superará la f.m.m. inductora (pues siempre sucede que  $I'_2 < I_{1eq}$ ). En consecuencia, el campo magnético en el entrehierro disminuye al aumentar la velocidad, mientras que a bajas velocidades el campo magnético aumenta. Esto hace que la máquina se sature apreciablemente cuando la velocidad es baja, salvo que la corriente  $I_{1eq}$  sea muy pequeña.

Si se supone a la máquina con un comportamiento lineal (con saturación magnética constante), de las relaciones (B16) y (B19) se deduce que:

$$\overline{\Psi}'_{2} = L_{\mu} \left( \overline{I}_{1eq} - \overline{I}'_{2} \right) \tag{B33}$$

$$\overline{\Psi}'_2 = L_{\mu} \, \overline{I}_{0eq}; \qquad \overline{I}_{0eq} = \overline{I}_{1eq} - \overline{I}'_2$$
 (B34)

La relación (B33) vuelve a mostrar como la corriente del rotor  $I'_2$  tiene un efecto desmagnetizante, opuesto a la f.m.m. originada por  $I_{1eq}$ . En la relación (B34) se ha introducido el fasor  $\bar{I}_{0eq}$ , el cual se ha definido por analogía con la corriente de vacío utilizada al estudiar la máquina asíncrona alimentada con corriente alterna trifásica.

Aplicando la relación (B30) en (B34) se obtienen estas expresiones para el fasor y el valor eficaz de  $I_{0eq}$ :

$$\bar{I}_{0eq} = \frac{R'_2 + j X'_{2s}}{R'_2 + j \left(X'_{2s} + X_{\mu s}\right)} \bar{I}_{1eq} = \frac{R'_2 + j p \left|\Omega\right| L'_{d2}}{R'_2 + j p \left|\Omega\right| \left(L'_{d2} + L_{\mu}\right)} \bar{I}_{1eq}$$
(B35)

$$I_{0eq} = \sqrt{\frac{R'_{2}^{2} + (p \Omega L'_{d2})^{2}}{R'_{2}^{2} + [p \Omega (L'_{d2} + L_{\mu})]^{2}}} I_{1eq} = \sqrt{\frac{\left(\frac{R'_{2}}{p \Omega}\right)^{2} + L'_{d2}^{2}}{\left(\frac{R'_{2}}{p \Omega}\right)^{2} + (L'_{d2} + L_{\mu})^{2}}} I_{1eq}$$
(B36)

Mediante estas expresiones se observa que -como es lógico por la relación (B34)- la corriente  $I_{0\rm eq}$  varía con la velocidad de forma inversa a como lo hace la corriente del rotor  $I'_2$ . Para una velocidad nula  $I_{0\rm eq}$  es igual es igual a  $I_{1\rm eq}$  (ya que entonces  $I'_2=0$ ). A medida que aumenta la velocidad de giro  $\Omega$ , la corriente  $I_{0\rm eq}$  disminuye -y, en consecuencia, también se reduce el campo magnético de la máquina- hasta que en el límite esta intensidad vale:

M.A.R. Pozueta -37-

$$\Omega \to \infty \implies I_{0eq} = \frac{L'_{d2}}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_{1eq} = \frac{1}{\frac{L'_{\mu}}{L_{d2}} + 1} I_{1eq}$$
 (B37)

A efectos prácticos se puede considerar que la máquina se satura a partir del momento en que la corriente  $I_{0eq}$  tiene un valor mayor que la corriente de vacío de la máquina cuando está alimentada por una fuente de tensión alterna trifásica y funciona en condiciones asignadas. Entonces, este criterio permite que, para un valor dado y constante de la corriente  $I_{1eq}$ , mediante la relación (B36) se pueda determinar la velocidad límite por debajo de la cual la máquina se considera que está saturada. En efecto, poniendo en la relación (B36) que la corriente  $I_{0eq}$  es igual a la corriente de vacío en condiciones asignadas, se obtiene una ecuación que, para un valor dado de  $I_{1eq}$ , permite despejar la velocidad a la cual la máquina se empieza a saturar (véanse también las últimas páginas del anexo C).

En resumen, si -como es habitual- la corriente  $I_{1eq}$  es mayor que la corriente de vacío en condiciones asignadas, sucede que para velocidades pequeñas la máquina puede llegar a alcanzar una saturación magnética elevada y esto hace que la *inductancia magnetizante*  $L_{\mu}$  se vaya reduciendo a medida que la velocidad disminuye. Es decir, la saturación magnética hace que a bajas velocidades la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  no sea un parámetro constante.

En la práctica se puede dar al parámetro  $L_{\mu}$  un valor constante e igual al que tiene en condiciones asignadas, si la velocidad  $\Omega$  es superior a aquella que hace que la corriente  $I_{0eq}$  sea igual a la intensidad de vacío en condiciones asignadas. Para velocidades inferiores a esta, se considera que la máquina empieza a saturarse y la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  tiene un valor variable y menor que en condiciones asignadas; tanto más pequeño cuanto menor es la velocidad (y más se satura la máquina). Habrá que tener en cuenta esta variación de la inductancia  $L_{\mu}$  en las expresiones obtenidas anteriormente.

#### Potencias en el rotor. Par

El balance de potencias, representado en la Fig. 16, señala que la potencia mecánica <u>absorbida</u> en el eje se transforma en las pérdidas en el cobre, en el hierro y mecánicas. Por lo tanto, se puede escribir que:

$$-P_{u} = P_{Cu2} + P_{Fe} + P_{m}$$
 (B38)

El signo "-" que parece afectando a la potencia mecánica  $P_u$  en la relación anterior se debe al convenio de signos que se ha establecido. Recuerde que se consideran positivas las potencias que tienen el mismo signo que cuando la máquina actúa como motor (Fig. 2), lo que significa que la potencia mecánica  $P_u$  es positiva cuando la máquina la produce y, consecuentemente,  $P_u$  es negativa cuando la máquina la absorbe, que es lo que sucede ahora.

M.A.R. Pozueta -38-

Todas las pérdidas que figuran en el lado derecho del balance (B38) aumentan con la velocidad:

- Las *pérdidas en el cobre del rotor*  $P_{Cu2}$  dependen del cuadrado del valor eficaz  $I'_2$  de la corriente rotórica, que, como se ha indicado en el apartado anterior, aumenta su valor con la velocidad de giro  $\Omega$ .
- Las pérdidas en el hierro P<sub>Fe</sub> se producen solamente en el rotor, pues el estator está sometido a un campo magnético fijo e inmóvil. Estas pérdidas son debidas a la histéresis magnética y a las corrientes parásitas de Foucault, las cuales dependen de la frecuencia y de la inducción magnética. Como estas dos magnitudes aumentan con la velocidad, resulta que P<sub>Fe</sub> es una potencia que aumenta con la velocidad.
- Las pérdidas mecánicas y de ventilación P<sub>m</sub> se deben a los rozamientos en los cojinetes donde se apoya el eje y al consumo de potencia del equipo de refrigeración de la máquina. Estas pérdidas también aumentan con la velocidad.

Si se acepta que las pérdidas mecánicas son despreciables y se tiene en cuenta el convenio de signos usado para las potencias, se deduce que, como en casos anteriores, la *potencia mecánica interna*  $P_{mi}$  es prácticamente igual a la potencia mecánica  $P_{u}$ . Luego, teniendo presente el balance (Fig. 16 y relación (B38)), sucede que:

$$-P_{mi} = P_{Cu2} + P_{Fe} = -(P_{u} - P_{m}) \approx -P_{u}$$

$$P_{u} \approx P_{mi} = -(P_{Cu2} + P_{Fe})$$
(B39)

Si, como es lo más frecuente, se puede aceptar que las pérdidas en el hierro  $P_{Fe}$  son mucho más pequeñas que las pérdidas en el cobre  $P_{Cu2}$  y se tienen en cuenta las relaciones (B31) y (B39), se deduce que:

$$P_{mi} \approx -P_{Cu2} = -m_1 R'_2 I'_2^2$$

$$P_{mi} \approx -m_1 R'_2 \frac{L_{\mu}^2}{\left(\frac{R'_2}{p \cdot \Omega}\right)^2 + \left(L'_{d2} + L_{\mu}\right)^2} I_{1eq}^2$$
(B40)

En consecuencia, el par de la máquina se puede calcular de esta manera:

$$M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = -\frac{m_1 R'_2}{\Omega} \frac{L_{\mu}^2}{\left(\frac{R'_2}{p \cdot \Omega}\right)^2 + \left(L'_{d_2} + L_{\mu}\right)^2} I_{1eq}^2$$
 (B41)

Este par M siempre es de frenado, pues siempre tiene signo opuesto al de la velocidad  $\Omega$ . El verdadero par de frenado de la máquina es algo superior al que se calcula mediante la relación anterior debido a las pérdidas en el hierro y mecánicas que se han despreciado en dicha fórmula.

M.A.R. Pozueta -39-

Aceptando, de momento, que la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  es constante, los valores de velocidad a la cual el par M alcanza sus valores extremos se obtienen derivando la expresión (B41) respecto a la velocidad  $\Omega$  e igualando dicha derivada a cero. Se obtienen dos velocidades de iguales valores absolutos:

$$\Omega_{\rm m} = \pm \frac{-R'_2}{p(L'_{\rm d2} + L_{\rm u})}; \qquad n_{\rm m} = \frac{60}{2\pi} \Omega_{\rm m}$$
(B42)

Sustituyendo estos valores de velocidad, obtenidos mediante la relación (B42), en la fórmula del par (B41), se deduce que los valores extremos del par son:

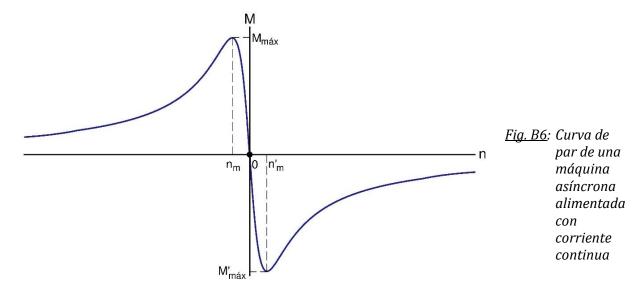
$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_{\mu}^2}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_{1\text{eq}}^2$$
 (B43)

En (B43) y (B42) se emplea el signo "+" para obtener el par máximo positivo  $M_{m\acute{a}x}$  y su correspondiente velocidad negativa  $\Omega_m$  (o  $n_m$ ) y se usa el signo "-" para obtener el par máximo negativo  $M'_{m\acute{a}x}$  y su correspondiente velocidad positiva  $\Omega'_m$  (o  $n'_m$ ) (Fig. B6).

El parámetro  $L_{\mu}$  es bastante mayor que el resto de parámetros de resistencia y de inductancia del circuito equivalente. Observando la relación (B42), esto significa que los valores extremos del par se producen para unas velocidades muy pequeñas.

Las fórmulas (B41), (B42) y (B43) confirman lo indicado en el texto: la curva par-velocidad es completamente simétrica y sus dos valores extremos tienen los mismos valores absolutos y se producen para velocidades también de iguales valores absolutos. Como el nivel de saturación de la máquina depende del valor de la velocidad, pero no de su signo, sucede que, incluso considerando el efecto de la saturación magnética, la curva par-velocidad sigue siendo simétrica.

La citada curva par-velocidad de una máquina asíncrona está representada en la Fig. 17, que se repite seguidamente:



M.A.R. Pozueta -40-

Las relaciones (B42) y (B43) se han obtenido suponiendo que la inductancia  $L_{\mu}$  es constante, lo que no es cierto si la máquina llega a saturarse. Además, como se acaba de comprobar, los valores extremos del par se producen a velocidades muy bajas donde la máquina tendrá altos niveles de saturación. Luego, en general no es correcto considerar que el parámetro  $L_{\mu}$  permanece constante. Por lo tanto, las fórmulas (B42) y (B43) dan solamente valores aproximados de  $\Omega_m$  y  $M_{máx}$  y en ellas habrá que utilizar el valor de  $L_{\mu}$  que corresponda al nivel de saturación magnética para la velocidad  $\Omega_m$ .

Esto hace que los valores máximos de par sean algo menores que los que se obtendrían en la relación (B43) con el valor no saturado de  $L_{\mu}$  y que la curva par-velocidad no presente una variación de pendiente tan abrupta cuando el par es máximo, sino que la saturación "aplana" dicha zona. La saturación también hace que la velocidad  $\Omega_m$ , que se calcula mediante la relación (B42), sea algo mayor que sin saturación magnética.

En la expresión (B41) que calcula el par también debe tenerse en cuenta que la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  es variable y usar el valor de este parámetro que corresponda al nivel de saturación para la velocidad que se esté analizando. En esta fórmula se observa que el par de frenado se puede controlar actuando sobre  $I_{1eq}$  y sobre  $R_2$ .

De lo indicado en el anexo A, especialmente en la tabla A.1 y en la relación (A5), se deduce que la corriente  $I_{1eq}$  se puede obtener así:

$$I_{1eq} = \frac{k_{eq}}{k_R} \cdot \frac{V_{cc}}{R_1};$$
  $(k_{eq} = \frac{I_{1eq}}{I_{cc}}; k_R = \frac{R_{cc}}{R_1})$  (B44)

En esta relación  $k_{eq}$  y  $k_R$  son unas constantes que dependen de la forma de conexión del estator (tabla A.1). Se deduce, pues, que modificando la tensión de continua  $V_{cc}$  con que se alimenta al estator se puede regular la corriente  $I_{1eq}$ . Por otra parte, el campo magnético y, por lo tanto, también el nivel de saturación de la máquina dependen de  $I_{1eq}$ . En consecuencia, según (B41), el par M variará cuadráticamente con  $V_{cc}$  mientras la máquina no se sature y en una medida algo menor cuando hay saturación magnética.

La regulación del par mediante la resistencia del rotor  $R'_2$  solamente se puede realizar en máquinas de rotor bobinado y se consigue añadiendo resistencias en serie con las fases del rotor a través del colector de anillos. Si no hay saturación, el añadir resistencias en serie con el rotor -lo que equivale a aumenta la resistencia  $R'_2$ - no modifica el valor de  $M_{máx}$ , pero aumenta la velocidad  $\Omega_m$  a la que se produce (ver las relaciones (B42) y (B43)). Además, al aumentar  $R'_2$  disminuye la corriente del rotor  $I'_2$ , lo que origina que el campo magnético aumente (ver las relaciones (B16) y (B31)). Por lo tanto, si hay saturación magnética sucede que al aumentar  $R'_2$  también aumenta la saturación y la inductancia  $L_\mu$  disminuye, lo que provoca que el par máximo  $M_{máx}$  disminuya algo y la velocidad de par máximo  $\Omega_m$  sea algo mayor que sin saturación.

M.A.R. Pozueta -41-

### ANEXO C: EJEMPLO DE CÁLCULO DE DIFERENTES SISTEMAS DE FRENADO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA

Una máquina asíncrona trifásica tiene estas características:

$V_{1NL} = 500 \text{ V}$	Estator conectado en <u>triángulo</u> R' <sub>2</sub> = 0,24 Ω		$f_1 = 50 \text{ Hz}$
$R_1 = 0.1 \Omega$			2p = 4  polos
$X_{cc} = 1.2 \Omega$	$X'_{2}/X_{cc} = 0.5$	$X_{II} = 24.4 \Omega$	$n_N = 1446 \text{ r.p.m.}$

Responda a las siguientes cuestiones:

- a) Inicialmente la máquina está funcionando como motor alimentada a su tensión y frecuencia asignadas. Calcule el par  $M_N$  y la corriente en cada fase del estator  $I_{1N}$  cuando la máquina funciona en las condiciones asignadas ¿cuál será el máximo par motor que la máquina puede proporcionar funcionando de esta manera y a qué velocidad se produce?
- b) Estando la máquina funcionando como motor a la velocidad asignada se la quiere frenar haciéndola funcionar como <u>freno a contracorriente</u>. Para ello se permutan dos fases de la red de alimentación. Calcule la corriente de fase en el estator y el par de frenado justo después de realizar esta conmutación de las fases cuando, por inercia, la máquina aún no ha cambiado su velocidad ¿Cuál será el máximo par de frenado que la máquina puede proporcionar funcionando de esta manera y a qué velocidad se produce?
- c) 1. Ahora la máquina está alimentada mediante un convertidor de frecuencia que actúa como una fuente de tensión. Estando la máquina funcionando como motor a la velocidad asignada, se la quiere frenar haciéndola funcionar como generador (frenado regenerativo). Para ello se reduce la frecuencia del estator a f<sub>1</sub> = 47 Hz y la tensión de línea pasa a ser V<sub>1L</sub> = 471 V. Calcule los valores de la corriente de fase en el estator y del par de frenado justo después de realizar este cambio de la frecuencia cuando, por inercia, la máquina aún no ha cambiado su velocidad.
  - **2.** Cuando la máquina funciona alimentada con su tensión y frecuencia asignadas ¿Cuál será el máximo par de frenado regenerativo que la máquina puede proporcionar y a qué velocidad se produce?
- d) Por último, estando la máquina funcionando como motor a la velocidad asignada se la quiere frenar alimentándola con corriente continua (<u>frenado dinámico</u>) Para ello se usa la conexión b de la Fig. 14 (máquina con la conexión triángulo-b) y la tensión de continua con que se la alimenta  $V_{cc}$  tiene un valor tal que la corriente  $I_{1eq}$  es igual a la corriente de fase asignada  $I_{1N}$  obtenida en el apartado **a**).
  - **1.** Calcule el valor de la tensión continua V<sub>cc</sub>.
  - **2.** Calcule la corriente del rotor reducida al estator l'<sub>2</sub> y el par de frenado justo después de alimentar con corriente continua a la máquina cuando, por inercia, aún no ha cambiado su velocidad ¿Cuál será el máximo par de frenado que la máquina puede proporcionar funcionando de esta manera y a qué velocidad se produce?

NOTA: En este frenado suponer que a la velocidad asignada la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  tiene el mismo valor que en condiciones asignadas y que cuando proporciona el máximo par de frenado la saturación reduce este parámetro  $L_{\mu}$  en un 25%.

M.A.R. Pozueta -42-

### **SOLUCIÓN:**

- a)  $M_N = 674 \text{ Nm}$ ;  $I_{1N} = 75,5 \text{ A}$ ;  $M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}$ ;  $n_m = 1201 \text{ r.p.m.}$
- **b)** M = -392 Nm; I<sub>1</sub> = 410 A; El máximo par de frenado se produce en el arranque (n = 0 r.p.m.); M<sub>a</sub> = -737 Nm
- c) 1. Para 47 Hz y 471 V: M = -482 Nm;  $I_1 = 54$  A
  - **2.** Para 50 Hz y 500 V:  $M'_{máx}$  = -2162 Nm;  $n'_{máx}$  = 1800 r.p.m.
- **d)** 1.  $V_{cc} = 9,25 \text{ V}$ 
  - 2. M = -25,8 Nm; I'<sub>2</sub> = 73,7 A; M'<sub>máx</sub> = -965 Nm; n'<sub>m</sub> = 19 r.p.m.

### SOLUCIÓN DETALLADA:

### **Cuestiones preliminares**

Tensión asignada de fase, V<sub>1N</sub>:

Estator con conexión triángulo 
$$\implies$$
  $V_{1N} = V_{1NL} \implies V_{1N} = 500 \text{ V}$ 

• Número de pares de polos, p:

$$2p = 4 \text{ polos} \implies p = 2 \text{ pares de polos}$$

• Velocidad asignada en rad/s,  $\Omega_N$ :

$$\Omega = \frac{2\pi}{60} \, n; \qquad n = \frac{60}{2\pi} \, \Omega \tag{C0}$$
 
$$\Omega_N = \frac{2\pi}{60} \, n_N \, = \frac{2\pi}{60} \cdot 1446 \ \Rightarrow \ \underline{\Omega_N = 151,42 \, \text{rad/s}}$$

• Velocidad de sincronismo a frecuencia asignada ( $f_1 = 50 \text{ Hz}$ ):

(1): 
$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \implies \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

(1): 
$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} \, n_1 = \frac{2\pi \, f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \implies \underline{\Omega_1 = 157,08 \, \text{rad/s}}$$

• Reactancias de dispersión a frecuencia asignada ( $f_1 = 50 \text{ Hz}$ ):

$$X'_{2}/X_{cc} = 0.5;$$
  $X_{cc} = X_{1} + X'_{2};$   $X_{cc} = 1.2 \Omega$  
$$X_{1} = 0.6 \Omega;$$
 
$$X'_{2} = 0.6 \Omega$$

• Inductancias:

$$\begin{split} L_{d1} &= \frac{X_1}{2 \, \pi \, f_1} = \frac{0.6}{2 \, \pi \, 50} \; \Rightarrow \; \underline{L_{d1}} = 0.00191 \, H \\ \\ L'_{d2} &= \frac{X'_2}{2 \, \pi \, f_1} = \frac{0.6}{2 \, \pi \, 50} \; \Rightarrow \; \underline{L'_{d2}} = 0.00191 \, H \\ \\ L_{cc} &= L_{d1} + L'_{d2} = \frac{X_{cc}}{2 \, \pi \, f_1} = \frac{1.2}{2 \, \pi \, 50} \; \Rightarrow \; \underline{L_{cc}} = 0.00382 \, H \\ \\ L_{\mu} &= \frac{X_{\mu}}{2 \, \pi \, f_1} = \frac{24.4}{2 \, \pi \, 50} \; \Rightarrow \; \underline{L_{\mu}} = 0.0777 \, H \end{split}$$

• Ecuaciones de la máquina asíncrona conectada a una tensión trifásica:

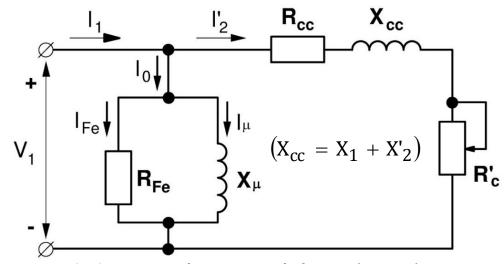


Fig. C1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona

Del circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona (Fig. C1) se obtiene que:

$$I'_{2} = \frac{V_{1}}{\sqrt{\left(R_{1} + \frac{R'_{2}}{s}\right)^{2} + X_{cc}^{2}}}$$
(C1)

Por otra parte, se va a utilizar esta variable auxiliar que simplifica los cálculos:

$$x = R'_2/s \tag{C2}$$

Con esta variable auxiliar la ecuación (C1) se convierte en:

$$I'_{2} = \frac{V_{1}}{\sqrt{(R_{1} + x)^{2} + X_{cc}^{2}}}$$
 (C3)

Utilizando esta variable auxiliar -dada por (C2)- y teniendo en cuenta, además, la relación (C3), la ecuación del par (15) cuando la máquina funciona alimentada con una fuente de tensión alterna trifásica se convierte en:

$$M = \frac{m_1 x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 x}{\Omega_1} I_2^2$$
 (C4)

En esta máquina el número de fases del estator es tres, es decir:  $m_1 = 3$  fases.

La corriente de pérdidas en el hierro  $I_{Fe}$  es mucho más pequeña que la corriente magnetizante  $I_{\mu}$ . Por lo tanto, la corriente de vacío  $I_0$  es prácticamente igual a la corriente  $I_{\mu}$  y no se comete un error apreciable si en el circuito equivalente exacto de la Fig. 1 se suprime la resistencia de pérdidas en el hierro  $R_{Fe}$  y se utiliza el circuito equivalente mostrado en la Fig. C2:

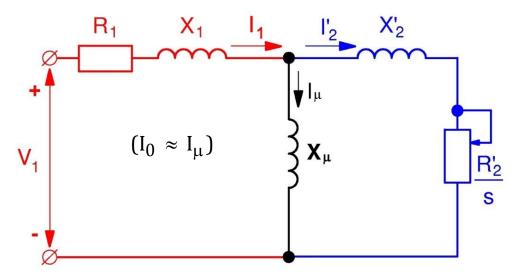


Fig. C2: Circuito equivalente de una máquina asíncrona sin la resistencia RFe

En vacío, la corriente I'2 es nula y la corriente I<sub>0</sub> se puede deducir de la Fig. C2:

$$I_0 \approx I_{\mu} = \frac{V_1}{\sqrt{R_1 + (X_1 + X_{\mu})^2}} \approx \frac{V_1}{X_1 + X_{\mu}}$$
 (C5)

En los circuitos equivalentes de la Fig. 1, la Fig. C1 y la Fig. C2 se observa que:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_0 + \vec{I}'_2 \tag{C6}$$

Cuando el deslizamiento s es pequeño las corrientes  $I_0$  e  $I'_2$  son casi perpendiculares entre sí y se puede utilizar esta aproximación:

$$|\mathbf{s}| << \Rightarrow \mathbf{I}_1 \approx \sqrt{\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_2^2} \tag{C7}$$

M.A.R. Pozueta -45-

Cuando el deslizamiento s es elevado la corriente del rotor  $I'_2$  aumenta y se puede despreciar la corriente  $I_0$  en la relación (C6). En consecuencia, se verifica esta aproximación:

$$|s| \gg \Rightarrow I_1 \approx I_2$$
 (C8)

Esto es lo que sucede en el arranque, donde el deslizamiento s vale 1, y para deslizamientos superiores ( $|s| \ge 1$ ).

Ecuaciones de la máquina asíncrona conectada a una tensión continua:

En este caso se va a utilizar una nueva variable auxiliar para simplificar los cálculos:

$$y = \frac{R'_2}{\omega_2} = \frac{R'_2}{p \Omega} \tag{C9}$$

Con esta variable auxiliar la ecuación (B31), que permite calcular la corriente del rotor reducida al estator I'2, se convierte en:

$$I'_{2} = \frac{L_{\mu}}{\sqrt{y^{2} + (L'_{d2} + L_{\mu})^{2}}} I_{1eq}$$
 (C10)

Utilizando esta variable auxiliar -dada por (C9)- y teniendo en cuenta, además, la relación (C10), la ecuación del par (B41) (o su equivalente, la relación (27)) cuando la máquina funciona alimentada con una fuente de tensión continua se transforma en:

$$M = -(m_1 \cdot p \cdot y) \frac{L_{\mu}^2}{y^2 + (L'_{d_2} + L_{\mu})^2} I_{1eq}^2 = -(m_1 \cdot p \cdot y) I'_2^2$$
 (C11)

#### a) Motor alimentado por una fuente de tensión trifásica de V<sub>1N</sub> y f<sub>1N</sub>

• En este caso la velocidad vale  $n_N = 1446$  r.p.m. y el deslizamiento correspondiente se calcula mediante la relación (2):

(2): 
$$s_N = \frac{1500 - 1446}{1500} \implies \underline{s_N = 0,036}$$

Cuando la máquina está funcionando a la velocidad asignada, la variable auxiliar definida mediante la relación (C2) vale:

(C2): 
$$x_N = \frac{0.24}{0.036} \implies x_N = 6.667 \Omega$$

M.A.R. Pozueta -46-

• La corriente del rotor reducida al estator  $I'_{2N}$  y el par  $M_N$  se obtienen mediante las relaciones (C3) y (C4), respectivamente:

(C3): 
$$I'_{2N} = \frac{500}{\sqrt{(0.1 + 6.667)^2 + 1.2^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 72.75 \text{ A}}$$

(C4): 
$$M_N = \frac{3 \cdot 6,667}{157.08} 72,75^2 \implies M_N = 674 \text{ Nm}$$

• La corriente de vacío en condiciones asignadas se obtiene usando la relación (C5):

(C5): 
$$I_0 = \frac{500}{0.6 + 24.4} \implies I_0 = 20 \text{ A}$$

• La corriente de fase del estator se puede calcular mediante la expresión (C7) puesto que el deslizamiento asignado s<sub>N</sub> es pequeño:

(C7): 
$$I_{1N} = \sqrt{20^2 + 72.8^2} \implies I_{1N} = 75.5 \text{ A}$$

Como el estator está conectado en triángulo, su corriente de línea asignada vale:

Conexión triángulo 
$$\Rightarrow$$
  $I_{1NL} = \sqrt{3} \ I_{1N} = \sqrt{3} \cdot 75,5 \Rightarrow I_{1NL} = 131 \ A$ 

• El deslizamiento de par máximo actuando la máquina como motor se calcula utilizando el signo "+" en la segunda de las relaciones (16):

(16): 
$$s_{\rm m} = \frac{0.24}{\sqrt{0.1^2 + 1.2^2}} \implies \underline{s_{\rm m} = 0.199}$$

Luego, la velocidad de par motor máximo se obtiene despejándola en la relación (2):

(2): 
$$n_m = n_1 (1 - s_m) = 1500 \cdot (1 - 0.199) \implies n_m = 1201 \text{ r.p.m.}$$

(2): 
$$\Omega_{\rm m} = \Omega_1 \left( 1 - s_{\rm m} \right) = 157,08 \cdot \left( 1 - 0,199 \right) \implies \Omega_{\rm m} = 125,82 \, {\rm rad/s}$$

La variable auxiliar ahora vale:

(C2): 
$$x_{\rm m} = \frac{0.24}{0.199} \implies x_{\rm m} = 1.206 \,\Omega$$

El par motor máximo se puede calcular mediante la relación (C4) si en ella se utiliza x<sub>m</sub>:

(C4): 
$$M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 1,206}{157,08} \frac{500^2}{(0,1+1,206)^2 + 1,2^2} \Rightarrow M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}$$

-47-

M.A.R. Pozueta

Alternativamente, el par motor máximo también se puede calcular directamente por medio de la primera de las expresiones (16) si en ella se utiliza el signo "+":

(16): 
$$M_{\text{máx}} = \frac{3}{157,08} \frac{500^2}{2(0.1 + \sqrt{0.1^2 + 1.2^2})} \Rightarrow M_{\text{máx}} = 1831 \text{ Nm}$$

• Cuando la máquina actúa como motor a la tensión y frecuencia asignadas, la corriente asignada de fase vale  $I_{1N}$  = 75,5 A, el par asignado es  $M_N$  = 674 Nm, el par máximo vale  $M_{máx}$  = 1831 Nm y la velocidad de par máximo es  $n_m$  = 1201 r.p.m.

#### b) Funcionamiento como freno a contracorriente

• En este caso la velocidad sigue siendo la asignada ( $n_N$  = 1446 r.p.m.), pero la velocidad de sincronismo es negativa. El deslizamiento en este caso se puede calcular mediante la expresión (23):

(23): 
$$n_1 = -1500 \text{ r.p.m.}; \qquad \Omega_1 = -157,08 \text{ rad/s}$$
$$s = 2 - s_N = 2 - 0,036 \implies s = 1,964$$

En consecuencia, según (C2), la variable auxiliar ahora vale:

(C2): 
$$x = \frac{0.24}{1.964} \implies x = 0.1222 \Omega$$

• La corriente del rotor reducida al estator I'2 y el par M se obtienen mediante las relaciones (C3) y (C4), respectivamente:

(C3): 
$$I'_2 = \frac{500}{\sqrt{(0.1 + 0.1222)^2 + 1.2^2}} \implies \underline{I'_2 = 410 \text{ A}}$$

(C4): 
$$M = \frac{3 \cdot 0,1222}{-157.08} 409,7^2 \implies M = -392 \text{ Nm}$$

Ahora el deslizamiento tiene un valor elevado y la corriente l'<sub>2</sub> es mucho mayor que la corriente I<sub>0</sub>. Por lo tanto, se puede usar la aproximación (C8):

(C8): 
$$I_1 \approx I'_2 \Rightarrow I_1 = 410 \text{ A}$$

Como el estator está conectado en triángulo, su corriente de línea vale:

Conexión triángulo 
$$\implies$$
  $I_{1L} = \sqrt{3} \ I_1 = \sqrt{3} \cdot 410 \implies I_{1L} = 710 \ A$ 

M.A.R. Pozueta -48-

Observando la curva de par de la Fig. 12 se aprecia que, cuando la velocidad de sincronismo es negativa, el par máximo (en valor absoluto) se produce cuando la máquina actúa como motor inverso (con velocidad negativa). Por lo tanto, este valor máximo no es el mayor par de frenado. En dicha Fig. 12 se deduce que, actuando como freno, el máximo par de la máquina asíncrona se produce en el arranque; es decir, cuando la velocidad es nula y el deslizamiento s vale 1:

Par máximo de frenado a contracorriente 
$$\Rightarrow$$
  $n = 0$  r.p.m.

El par de arranque se puede obtener mediante la fórmula del par (15) si en ella se da el valor 1 al deslizamiento s:

• En el frenado a contracorriente de esta máquina se obtiene que el par de frenado a la velocidad asignada vale M = -392 Nm y la corriente de fase del estator correspondiente vale I<sub>1</sub> = 410 A. El máximo par de frenado a contracorriente se produce en el arranque (n = 0 r.p.m.) donde el par vale M<sub>a</sub> = -737 Nm.

#### c) Funcionamiento como freno regenerativo

#### 1. Funcionamiento a la velocidad asignada y alimentada a 47 Hz y 471 V

• Dada la conexión triángulo del estator, ahora su tensión de fase vale:

Estator con conexión triángulo 
$$\implies$$
  $V_1 = V_{1L} \implies V_1 = 471 \text{ V}$ 

 Con una frecuencia en el estator f<sub>1</sub> = 47 Hz, los valores de la velocidad síncrona y de las reactancias se modifican con respecto a sus valores a la frecuencia asignada de 50 Hz (estos últimos aparecen en el enunciado y se han obtenido en el apartado "Cuestiones preliminares"). Por lo tanto, ahora estas magnitudes pasan a valer:

(1): 
$$n_1 = \frac{60 \, f_1}{p} = \frac{60 \cdot 47}{2} \implies \underline{n_1 = 1410 \, \text{r.p.m.}}$$

(1): 
$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 47}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 147,65 \text{ rad/s}}$$

$$X_1 = 2\pi f_1 L_{d1} = 2\pi \cdot 47 \cdot 0,00191 \Rightarrow \underline{X_1 = 0,564 \Omega}$$

$$X_{cc} = 2\pi f_1 L_{cc} = 2\pi \cdot 47 \cdot 0,00382 \Rightarrow \underline{X_{cc} = 1,128 \Omega}$$

$$X_{\mu} = 2\pi f_1 L_{\mu} = 2\pi \cdot 47 \cdot 0,0777 \Rightarrow X_{\mu} = 22,94 \Omega$$

-49-

M.A.R. Pozueta

• La velocidad asignada vale  $n_N = 1446$  r.p.m. y el deslizamiento correspondiente se calcula mediante la relación (2):

(2): 
$$s = \frac{1410 - 1446}{1410} \implies \underline{s = -0.0255}$$

El deslizamiento negativo indica que ahora la máquina está actuando como generador y, por lo tanto, ejerce un par de frenado en su eje.

En este estado de funcionamiento la variable auxiliar definida mediante la relación (C2) vale:

(C2): 
$$x = \frac{0.24}{-0.0255} \implies x = -9.412 \Omega$$

Este parámetro no es una resistencia real sino una resistencia equivalente que puede tomar valores negativos, como sucede ahora.

• La corriente del rotor reducida al estator I'<sub>2</sub> y el par M se obtienen mediante las relaciones (C3) y (C4), respectivamente:

(C3): 
$$I'_2 = \frac{471}{\sqrt{(0.1 - 9.412)^2 + 1.128^2}} \Rightarrow \underline{I'_2 = 50.22 \text{ A}}$$

(C4): 
$$M = \frac{3 \cdot (-9,412)}{-147.65} 50,22^2 \implies \boxed{M = -482 \text{ Nm}}$$

• Si el convertidor consigue que al cambiar la frecuencia el campo magnético permanezca constante, la corriente de vacío debe conservar el mismo valor que en condiciones asignadas. Esto se va a comprobar usando la relación (C5):

(C5): 
$$I_0 = \frac{471}{0,564 + 22,94} \Rightarrow I_0 = 20 \text{ A}$$

• La corriente de fase del estator ahora se puede calcular mediante la expresión (C7) puesto que el valor absoluto del deslizamiento es pequeño:

(C7): 
$$I_1 = \sqrt{20^2 + 50,2^2} \implies I_1 = 54 \text{ A}$$

Como el estator está conectado en triángulo, su corriente de línea vale:

Conexión triángulo 
$$\Rightarrow$$
  $I_{1L} = \sqrt{3} I_1 = \sqrt{3} \cdot 54 \Rightarrow I_{1L} = 93,6 A$ 

• En el frenado regenerativo de esta máquina se obtiene que el par de frenado con 47 Hz y 471 V a la velocidad asignada vale M = -482 Nm y la corriente de fase del estator correspondiente vale I<sub>1</sub> = 54 A.

M.A.R. Pozueta -50-

#### 2. Par máximo de frenado alimentada a la tensión y frecuencia asignadas

 Ahora los valores de la tensión de fase, de la velocidad de sincronismo y de las reactancias vuelven a ser los que aparecen en el enunciado y los que se calcularon en el apartado "Cuestiones preliminares".

Con esta alimentación la máquina deberá girar a una velocidad superior a la de sincronismo para que actúe como generador.

 El deslizamiento de par máximo actuando la máquina como generador se calcula utilizando el signo "-" en la segunda de las relaciones (16). Es evidente que este deslizamiento será igual al obtenido en el funcionamiento como motor cambiado de signo:

(16): 
$$s'_{m} = -s_{m} \implies s'_{m} = -0.199$$

La velocidad de par generador máximo se obtiene despejándola en la relación (2):

(2): 
$$n'_{m} = n_{1} (1 - s'_{m}) = 1500 \cdot (1 - (-0.199)) \Rightarrow n'_{m} = 1800 \text{ r.p.m.}$$

(2): 
$$\Omega'_{m} = \Omega_{1} (1 - s'_{m}) = 157,08 \cdot (1 - (-0.199)) \Rightarrow \Omega'_{m} = 188,34 \text{ rad/s}$$

Las relaciones (16) y (C2) indican que ahora el valor de la variable auxiliar será igual al obtenido en el funcionamiento como motor cambiado de signo:

(16) y (C2): 
$$x'_{m} = -x_{m} \implies x'_{m} = -1,206 \Omega$$

El par generador máximo se puede calcular mediante la relación (C4) si en ella se utiliza  $x'_m$ :

(C4): 
$$M'_{máx} = \frac{3 \cdot (-1,206)}{157,08} \frac{500^2}{(0.1 - 1,206)^2 + 1,2^2} \Rightarrow M'_{máx} = -2162 \text{ Nm}$$

Alternativamente, el par generador máximo también se puede calcular directamente por medio de la primera de las expresiones (16) en la que se utiliza el signo "-":

(16): 
$$M'_{m\acute{a}x} = -\frac{3}{157,08} \frac{500^2}{2\left(-0.1 + \sqrt{0.1^2 + 1.2^2}\right)} \Rightarrow M'_{m\acute{a}x} = -2162 \text{ Nm}$$

• Estando la máquina alimentada con su tensión y frecuencia asignadas, su par máximo efectuando un frenado regenerativo (funcionamiento como generador) vale M'<sub>max</sub> = -2162 Nm y se produce a una velocidad n'<sub>m</sub> = 1800 r.p.m.

M.A.R. Pozueta -51-

#### d) Funcionamiento como freno dinámico con la conexión triángulo-b y con I<sub>1eq</sub> = I<sub>1N</sub>

#### 1. Tensión continua necesaria

• La conexión del estator a la red de corriente continua (c.c.) en este caso es como se indica en la Fig. C3.

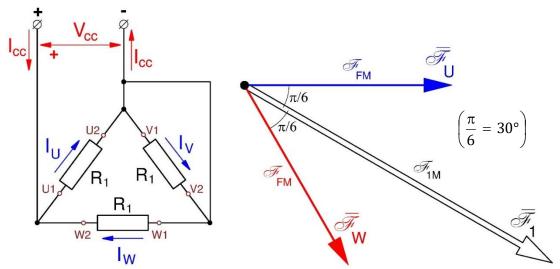


Fig. C3: Conexión triángulo-b

<u>Fig. C4</u>: F.m.m.s cuando el estator se conecta a una fuente de c.c. con la conexión triángulo-b

• Se va a analizar esta conexión siguiendo un procedimiento similar al empleado con la conexión triángulo-a en el anexo A.

En la Fig. C3 se observa que la fase V queda cortocircuitada y frente a la red de corriente continua el estator consiste en dos fases (la U y la W) en paralelo. Por lo tanto, se deduce que:

#### Triángulo-b:

$$R_{cc} = \frac{R_1}{2};$$
  $k_R = \frac{R_{cc}}{R_1} = \frac{1}{2}$  (C12)

$$I_{U} = I_{F};$$
  $I_{V} = 0;$   $I_{W} = -I_{F}$  (C13)

$$I_F = \frac{I_{cc}}{2};$$
  $k_F = \frac{I_F}{I_{cc}} = \frac{1}{2}$  (C14)

Las dos fases U y W tienen corrientes de igual valor (aunque de signos contrarios) y se ha elegido la fase U como la fase F; es decir, la fase por donde circula la corriente mayor. De (C13) se deduce que los fasores de f.m.m. de las fases son así:

$$\mathcal{F}_{\text{UM}} = \mathcal{F}_{\text{FM}}; \qquad \mathcal{F}_{\text{VM}} = 0; \qquad \mathcal{F}_{\text{WM}} = \mathcal{F}_{\text{FM}}$$
 (C15)

$$\overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{U}} > 0; \qquad \overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{V}} = 0; \qquad \overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{W}} < 0$$
 (C16)

M.A.R. Pozueta -52-

Con los resultados obtenidos en las relaciones (C15) y (C16) y de la Fig. A1, se deduce que los fasores espaciales de f.m.m. en la conexión triángulo-b (Fig. C3) son como se muestra en la Fig. C4. El fasor de f.m.m. total  $\overline{\mathscr{F}}_1$  se obtiene sumando vectorialmente los fasores de f.m.m. de las fases y su módulo es  $\mathscr{F}_{1M}$ :

$$\mathscr{F}_{1M} = 2 \mathscr{F}_{FM} \left( \cos \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \mathscr{F}_{FM}$$
 (C17)

Teniendo presente ahora que  $\mathscr{T}_{FM}$  se obtiene mediante la fórmula (A1) y que se verifica la relación (C14) se deduce que:

$$\mathscr{F}_{1M} = \sqrt{3} C_F I_F = \frac{\sqrt{3}}{2} C_F I_{cc}$$
 (C18)

Por otra parte, el valor máximo de la f.m.m. total producida por una corriente trifásica cuyo valor eficaz sea  $I_{1eq}$  se obtiene mediante la fórmula (A16), que proviene de la expresión (A4). Este valor máximo también vale  $\mathscr{F}_{1M}$ . Identificando (C18) con (A16), finalmente se llega a:

$$k_{eq} = \frac{I_{1eq}}{I_{cc}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$
 (C19)

Disponiendo de la Tabla A.I no era preciso realizar este análisis, pues de ella se pueden obtener directamente los parámetros  $k_R$  y  $k_{eq}$  (relaciones (C12) y (C19)).

• En el motor que se está estudiando, la corriente  $I_{cc}$  que se demanda a la red de c.c. (Fig. C3) se puede obtener mediante el parámetro  $k_{eq}$ . Este parámetro viene dado por la relación (C19) o, alternativamente, por la tabla A.I:

(C19) o (A.I): 
$$k_{eq} = \frac{75.5}{I_{cc}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \implies \underline{I_{cc} = 184.9 \text{ A}}$$

La resistencia equivalente  $R_{cc}$  del estator se puede obtener mediante el parámetro  $k_R$ . Este parámetro viene dado por la relación (C12) o, alternativamente, por la tabla A.I:

(C12) o (A.I): 
$$k_R = \frac{R_{cc}}{0.1} = \frac{1}{2} \implies R_{cc} = 0.05 \Omega$$

Finalmente, de la relación (A7) se deduce que:

(A7): 
$$184.9 = V_{cc}/0.05 \implies V_{cc} = 9.25 \text{ V}$$

• La tensión continua con que hay que alimentar esta máquina, si su estator tiene la conexión triángulo-b, para que  $I_{1eq} = 75.5$  A vale  $V_{cc} = 9.25$  V.

M.A.R. Pozueta -53-

#### 2. Pares y otras magnitudes

 A la velocidad asignada la variable auxiliar definida por la relación (C9) tiene este valor:

(C9): 
$$y_N = \frac{0.24}{2 \cdot 151.42} \implies y_N = 0.0007925 \frac{\Omega \cdot s}{rad}$$

Se va a denominar L' a esta inductancia:

$$L' = L'_{d2} + L_{\mu} \implies L' = 0,00191 + 0,0777 \implies L' = 0,07961 H$$

La corriente del rotor reducida al estator I'2 y el par de frenado se pueden obtener mediante las relaciones (C10) y (C11), respectivamente:

(C10): 
$$I'_2 = \frac{0,0777}{\sqrt{0,0007925^2 + 0,07961^2}} 75,5 \implies \boxed{I'_2 = 73,68 \text{ A}}$$

(C11): 
$$M = -(3 \cdot 2 \cdot 0,0007925) \cdot 73,68^2 \implies M = -25,8 \text{ Nm}$$

• Cuando la máquina suministra el máximo par de frenado dinámico su circuito magnético está saturado y esto, según indica el enunciado, hace que la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  se reduzca un 25%. respecto a su valor en condiciones asignadas. Por lo tanto, para el cálculo del par máximo se usa este nuevo valor del parámetro  $L_{\mu}$ :

$$L_{\mu} \,=\, 0.75\,\cdot\, 0.0777 \quad \Longrightarrow \quad L_{\mu} \,=\, 0.0583 \; H$$

Luego, ahora la inductancia L' vale

$$L' = L'_{d2} + L_{u} \implies L' = 0.00191 + 0.0583 \implies L' = 0.06021 H$$

La velocidad a la cual se obtiene el máximo par de frenado se obtiene mediante la relación (29) en la que se debe usar el signo "-" (ver la Fig. 17):

(29): 
$$\Omega_{\rm m} = -\frac{-0.24}{2 \cdot 0.06021} \implies \Omega_{\rm m} = 1.99 \text{ rad/s}$$

(29): 
$$n_{\rm m} = \frac{60}{2\pi} \, 1{,}99 \implies n_{\rm m} = 19 \, {\rm r.p.m.}$$

• Cuando la máquina está proporcionando su máximo par de frenado dinámico, la variable auxiliar definida por (C9) vale:

(C9): 
$$y_{m} = \frac{0.24}{2 \cdot 1.99} \implies y_{m} = 0.0603 \frac{\Omega \cdot s}{rad}$$

Luego, el par máximo durante el frenado dinámico se puede calcular empleando este valor de la variable auxiliar en la fórmula del par (C11):

(C11): 
$$M'_{\text{máx}} = -\left(3 \cdot 2 \cdot 0,0603\right) \frac{0,0583^{2}}{0,0603^{2} + 0,06021^{2}} 75,5^{2} \implies M'_{\text{máx}} = -965 \text{ Nm}$$

A este mismo resultado se podría haber llegado aplicando directamente la relación (28) en la que se debe usar el signo "-" (ver la Fig. 17):

(28): 
$$M'_{\text{máx}} = -\frac{3 \cdot 2}{2} \frac{0,0583^2}{0.06021} 75,5^2 \implies M'_{\text{máx}} = -965 \text{ Nm}$$

- En el frenado dinámico de esta máquina se obtiene que el par de frenado a la velocidad asignada vale M = -25,8 Nm y la corriente del rotor reducida al estator correspondiente vale I'<sub>2</sub> = 73,7 A. El máximo par en este frenado dinámico vale M'<sub>máx</sub> = -965 Nm y se produce a una velocidad n'<sub>m</sub> = 19 r.p.m.
- Para rematar el análisis de este frenado dinámico, seguidamente se van a estudiar varios aspectos relacionados con el nivel de *saturación magnética* de la máquina.
- Para tratar la saturación magnética de manera sencilla y práctica, lo que se hace es considerar que la máquina no se satura si su velocidad  $\Omega$  es superior a una dada  $\Omega_{sat}$  (o  $n_{sat}$ , si se mide en r.p.m.) y, entonces, la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  se mantiene constante. Para velocidades por debajo de  $\Omega_{sat}$  la máquina se satura, tanto más cuanto más baja sea su velocidad. En este caso la inductancia  $L_{\mu}$  no es constante y es tanto más pequeña cuanto más baja sea su velocidad. Justo en el límite, cuando la máquina gira exactamente a la velocidad  $\Omega_{sat}$ , la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  aún conserva el mismo valor que sin saturación.

Como valor constante de la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  cuando la máquina no está saturada (es decir, cuando su velocidad  $\Omega$  es igual o superior a  $\Omega_{sat}$ ) se suele emplear el valor de este parámetro  $L_{\mu}$  en condiciones asignadas, que en esta máquina es  $L_{\mu}$  = 0,0777 H.

La velocidad límite  $\Omega_{sat}$  depende de la corriente  $I_{1eq}$  y el criterio que se suele establecer para determinarla es que la corriente  $I_{0eq}$  a esta velocidad sea exactamente igual a la corriente de vacío que tiene la máquina cuando funciona conectada a una red trifásica y está en las condiciones asignadas. En este motor dicha corriente de vacío asignada vale 20 A.

Por lo tanto, partiendo de la relación (B36) se obtiene que:

M.A.R. Pozueta -55-

(B36): 
$$20 = \sqrt{\frac{\left(\frac{0.24}{2\Omega_{sat}}\right)^2 + 0.00191^2}{\left(\frac{0.24}{2\Omega_{sat}}\right)^2 + \left(0.00191 + 0.0777\right)^2}}$$
 75,5  $\Rightarrow \Omega_{sat} = 5.51 \text{ rad/s}$ 

(C0): 
$$n_{\text{sat}} = \frac{60}{2\pi} 5,51 \implies \underline{n_{\text{sat}} = 52,6 \text{ r.p.m.}}$$

Luego, en esta forma de funcionamiento la máquina se satura para velocidades inferiores a 52,6 r.p.m.

 Alimentada con tensión continua y a la <u>velocidad asignada</u> esta máquina tiene estos valores de las magnitudes que varían con la velocidad (y con la pulsación del rotor ω<sub>2</sub>):

(25): 
$$\omega_2 = 2 \cdot 151,42 \implies \omega_2 = 302,84 \text{ rad/s}$$

(25): 
$$f_2 = \frac{302,84}{2\pi} \Rightarrow f_2 = 48,2 \text{ Hz}$$

(B23): 
$$X'_{2s} = 302,84 \cdot 0,00191 \implies X'_{2s} = 0,578 \Omega$$

(B23): 
$$X_{\mu S} = 302,84 \cdot 0,0777 \implies X_{\mu S} = 23,53 \Omega$$

(B23): 
$$E'_{0s} = 23,53 \cdot 75,5 \implies E'_{0s} = 1776,5 \text{ V}$$

(Fig. B2): 
$$tg \, \phi_0 = \frac{X'_{2s} + X_{\mu s}}{R'_2} \implies tg \, \phi_0 = \frac{0,578 + 23,53}{0,24} = 100 \implies \underline{\phi_0 = 89,4^\circ}$$

Como el ángulo  $\phi_0$  es prácticamente igual a 90°, la f.m.m. del rotor es desmagnetizante y su efecto se opone directamente al de la f.m.m. del estator. Además, como la corriente del rotor reducida al estator I'2 es alta, de un valor muy cercano al de  $I_{1eq}$ , resulta que el campo magnético total será pequeño. Esta situación es la mostrada en el diagrama de la Fig. B5 donde los fasores  $\bar{I}_{1eq}$  e  $\bar{I}'_2$  están en fase y, entonces, la segunda de las relaciones(B34) se convierte en una resta aritmética:

(B34): 
$$I_{0eq} \approx I_{1eq} - I'_{2} \Rightarrow I_{0eq} \approx 75.5 - 73.7 \Rightarrow I_{0eq} \approx 1.8 \text{ A}$$

Esto se puede comprobar calculando la corriente  $I_{0eq}$  de forma más exacta mediante la relación (B36). Para ello se introducen las variables  $y_N$  y L' en (B36):

(B36): 
$$I_{0eq} = \sqrt{\frac{0,0007925^2 + 0,00191^2}{0,0007925^2 + 0,07961^2}}$$
 75,5  $\Rightarrow I_{0eq} = 2 \text{ A}$ 

M.A.R. Pozueta

Esta corriente  $I_{0eq}$  (2 A) es muy inferior a la corriente de vacío asignada (20 A), lo que ratifica que en este estado el campo magnético es muy bajo y la máquina no se satura. A esta misma conclusión se puede llegar observando que la velocidad asignada  $n_N$  (1446 r.p.m.) es bastante mayor que la velocidad límite de inicio de la saturación  $n_{sat}$  (52,6 r.p.m.).

• Alimentada con tensión continua y a la <u>velocidad de par máximo</u> esta máquina tiene estos valores de las magnitudes que varían con la velocidad (y con la pulsación del rotor  $\omega_2$ ):

(25): 
$$\omega_2 = 2 \cdot 1{,}99 \implies \omega_2 = 3{,}98 \text{ rad/s}$$

(25): 
$$f_2 = \frac{3.98}{2 \pi} \Rightarrow f_2 = 0.63 \text{ Hz}$$

(B23): 
$$X'_{2s} = 3.98 \cdot 0.00191 \implies X'_{2s} = 0.00760 \Omega$$

(B23): 
$$X_{\mu s} = 3.98 \cdot 0.0583 \implies X_{\mu s} = 0.232 \Omega$$

(B23): 
$$E'_{0s} = 0.232 \cdot 75.5 \implies E'_{0s} = 17.52 \text{ V}$$

(Fig. B2): 
$$tg \, \phi_0 = \frac{X'_{2s} + X_{\mu s}}{R'_2} \implies tg \, \phi_0 = \frac{0,00760 + 0,232}{0,24} = 1 \implies \underline{\phi_0 = 45^\circ}$$

La corriente del rotor reducida al estator I'2 vale ahora

(C10): 
$$I'_2 = \frac{0,0583}{\sqrt{0,0603^2 + 0,06021^2}} 75,5 \implies \underline{I'_2 = 51,65 \text{ A}}$$

La corriente  $I_{0eq}$  se calcula mediante la relación (B36):

(B36): 
$$I_{0eq} = \sqrt{\frac{0,0603^2 + 0,00191^2}{0,0603^2 + 0,06021^2}}$$
 75,5  $\Rightarrow I_{0eq} = 53,45 \text{ A}$ 

Esta corriente  $I_{0eq}$  (53,5 A) es muy superior a la corriente de vacío asignada (20 A), lo que ratifica que en este estado el campo magnético es muy alto y la máquina se satura de forma notable. A esta misma conclusión se puede llegar observando que la velocidad de par máximo  $n_m$  (19 r.p.m.) es bastante menor que la velocidad límite de inicio de la saturación  $n_{sat}$  (52,6 r.p.m.).

La saturación hace que la inductancia magnetizante  $L_{\mu}$  ahora tenga un valor inferior a cuando la máquina funciona en las condiciones asignadas (el enunciado supone que en este estado -cuando el par de frenado dinámico es máximo- el parámetro  $L_{\mu}$  ha reducido su valor en un 25% a causa de la saturación magnética).

M.A.R. Pozueta -57-