APENDICE I. FASORES TEMPORALES

En el estudio del régimen permanente de muchos circuitos de la electrotecnia intervienen con gran frecuencia magnitudes escalares (corrientes, tensiones, flujos magnéticos, etc.) cuyo conjunto de valores a lo largo del tiempo es representable mediante una curva senoidal de amplitud y periodo constantes. En tal caso, el valor instantáneo correspondiente a dicha magnitud física puede determinarse mediante *la proyección* cartesiana de un segmento orientado que gira en el plano complejo con módulo y velocidad constantes adecuadas, tal como aparece en la figura 1. Este método de representación simbólica está hoy en día universalmente difundido.

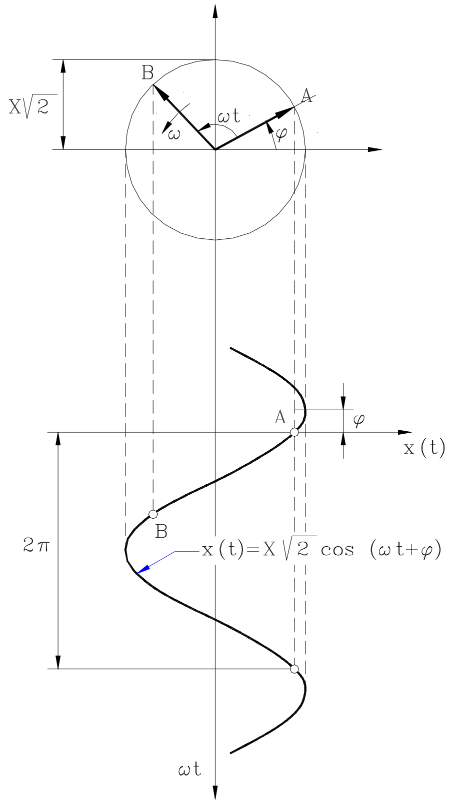


Fig. A-I-1. Fasor temporal

En la literatura electrotecnia española estaba antes bastante generalizado (cosa que hoy, afortunadamente, ya no es así) el nombre de vector aplicado también al segmento orientado de la *Fig. A-I-1*. Esto, si bien desde un punto de vista estrictamente matemático puede no ser incorrecto (si vector se identifica con segmento orientado), desde un punto de vista físico es poco adecuado.

En efecto, un vector es una herramienta que caracteriza *un único* valor en un *instante concreto* de una magnitud *vectorial* que, en los momentos posteriores, puede tener una *evolución arbitraria*. Por el contrario, el segmento orientado de la figura 1 caracteriza el *conjunto de valores* a lo largo del tiempo de una magnitud *escalar* que tiene una *variación senoidal*.

Para poner de manifiesto esas claras diferencias, a dicho segmento orientado y giratorio en el plano complejo de la figura 1, previa división de su módulo por $\sqrt{2}$, se designa como *fasor temporal* de la magnitud escalar *x(t)*. La velocidad angular, ω, de dicho fasor temporal recibe en electrotecnia el nombre de pulsación. Matemáticamente, si la magnitud física está definida por:

$$x(t) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (AI.1)$$

su fasor temporal es

$$\text{Fasor temporal de}\left[\, x(t) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)\right] = \vec{X} = X e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad (AI.2)$$

Según lo establecido, la magnitud temporal x(t) debe ser igual a la proyección instantánea de $\vec{X}$ sobre el eje real del plano complejo (o sea, a la *parte real* del fasor $\vec{X}$), multiplicada por √2, cosa que, en efecto, cumple la definición de $\vec{X}$ introducida en (AI.2), puesto que recordando la identidad de Euler

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\text{sen}\alpha \qquad (AI.3)$$

se tiene:

$$\sqrt{2}\,\text{Real}\,[\vec{X}] = \sqrt{2}\,\text{Real}\,[X e^{j(\omega t + \varphi)}] = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (AI.4)$$

El fasor temporal $\vec{X}$ puede adoptar tambien la siguiente forma de expresión equivalente

$$\vec{X} = X e^{j(\omega t + \varphi)} = X\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} = \overline{X}\, e^{j\omega t} = X_{\underline{|\varphi}}\, e^{j\omega t} \qquad (AI.5)$$

El término (con raya, en vez de flecha, en la parte superior)

$$\overline{X} = X\, e^{j\varphi} \qquad (AI.6)$$

es una constante compleja, y se designa como el nombre de *constante compleja del fasor temporal* $\vec{X}$. En electrotecnia es usual representarla con la notación alternativa $\overline{X} = X_{\underline{|\varphi}} = X\, e^{j\varphi}$. A menudo, y de una manera impropia, se identifican fasor y constante compleja del fasor. Esto tiene su origne en el uso generalizado de los fasores temporales en *teoría de circuitos* debido a las grandes ventajas que ofrecen para resolver problemas de corriente alterna en régimen permanente *a una frecuencia única y constante*. En tales casos, todas las magnitudes eléctricas del sistema (corrientes, tensiones, flujos, etc) tienen una pulsación o una frecuencia también fija y constante (50 Hz. en Europa, 60 Hz en EE. UU y otros lugares) y, por tanto, el término exponencial *ωt,* que alude al movimiento de giro del fasor, está presente en todos los términos de las ecuaciones, con lo cual puede eliminarse de ellas (véase, a este respecto, el ejemplo resuelto más adelante) y prácticamente nunca aparece de forma explícita. Pero conviene ser precavido en este sentido, porque esa igualdad de frecuencias ya no se cumple cuando se estudia el régimen permanente *de máquinas eléctricas rotativas*, en las que la frecuencia de las tensiones, corrientes, etc de sus devanados es diferente según el devanado se encuentre en el estator o en el rotor.

Si la magnitud temporal viene dada a través de la función seno, lo mejor es expresarla siempre a través de la función coseno equivalente. Asi, por ej., sea la magnitud temporal

$$g_1(t) = \sqrt{2}\, G\cos(\omega t + \beta) \qquad (AI.7)$$

Cuyo fasor temporal es

$$\overrightarrow{G_1} = G\, e^{j(\omega t + \beta)} \qquad (AI.8)$$

Si tenemos otra magnitud temporal tal que

$$g_2(t) = \sqrt{2}\, G\,\text{sen}(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\beta}) \qquad (AI.9)$$

la relación entre los fasores temporales de ambas magnitudes se obtiene de manera rápida expresando la segunda de ellas mediante su función coseno, es decir:

$$g_2(t)=\sqrt{2}\,G\,\mathrm{sen}(\omega t+\beta)=\sqrt{2}\,G\cos(\omega t+\beta-\pi/2)\ \Rightarrow$$

(AI.10)

$$\overrightarrow{G_2}=G\ e^{j(\omega t+\beta-\pi/2)}=G\ e^{j(\omega+\beta)}\ e^{-j\pi/2}=-j\ G\ e^{j(\omega+\beta)}$$

Como ejemplo de la gran utilidad y potencia de cálculo de los fasores temporales, consideremos un circuito formado por la conexión en serie de una resistencia e inductancia de valores R y L, respectivamente, al que se le aplica la tensión:

$$u(t)=\sqrt{2}\,U\cos(\omega t+\varphi_u)\quad\Rightarrow\quad \vec{U}=U^{j\varphi_u}\,e^{j\omega t}=\overline{U}\,e^{j\omega t} \qquad (AI.11)$$

Se trata de encontrar la corriente que circula por él *en régimen permanente*.

La ecuacion diferencial del circuito es:

$$u(t)=R\,i(t)+L\frac{d}{dt}i(t) \qquad (AI.12)$$

En vez de operar con ecuaciones diferenciales, es mucho más facil hacerlo con fasores temporales. En efecto, en régimen permanente, la corriente será de la forma:

$$i(t)=\sqrt{2}\,I\cos(\omega t+\varphi_i)\qquad\Rightarrow\quad \vec{I}=I^{j\varphi_i}\,e^{j\omega t}=\overline{I}\,e^{j\omega t} \qquad (AI.13)$$

Teniendo en cuenta (AI.11) y (AI.13), la ecuación (AI.12) del circuito se convierte en

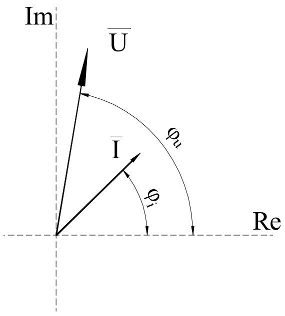
$$\sqrt{2}\,U\cos(\omega t+\varphi_u)=R\sqrt{2}\,I\cos(\omega t+\varphi_i)-\omega L\sqrt{2}\,I\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_i) \qquad (AI.14)$$

Expresando las magnitudes senoidales en función de sus fasores temporales[1], resulta

$$\mathrm{Real}\,[\overline{U}e^{j\omega t}]=R\cdot\mathrm{Real}\,[\overline{I}\,e^{j\omega t}]-\omega L\cdot\mathrm{Real}\,[-j\overline{I}\,e^{j\omega t}] \qquad (AI.15)$$

Como esa relación entre las partes reales de los fasores ha de cumplirse siempre cualesquiera que sean los valores de U, ωt y φ_u, se tiene:

$$\overline{U}e^{j\omega t}=R\,\overline{I}e^{j\omega t}+j\,\omega L\overline{I}\,e^{j\omega t} \qquad (AI.16)$$



Eliminando el término exponencial común $e^{j\omega t}$, queda

$$\overline{U}=R\,\overline{I}+j\omega L\,\overline{I} \qquad (AI.17)$$

que es la conocida ecuación entre las *constantes complejas* de los fasores temporales de un circuito serie RL. De ella se obtiene de inmediato la constante compleja del fasor temporal de corriente:

$$\overline{I}=\frac{\overline{U}}{R+j\omega L} \qquad (AI.18)$$

[1] En realidad, los fasores podrían haber sido aplicados ya a la ecuación (A1.12), recordando que la derivada de un fasor temporal **X** es jω**X** . Se ha preferido alargar un poco el desarrollo para mostrar el uso de (A1.10). Y, a propósito de la derivación, conviene subrayar que esa operación sólo puede aplicarse al fasor, y no a su constante compleja, aunque este hecho también queda a menudo operativamente enmascarado en la teoría de circuitos por razones similares a las arriba comentadas.

En general, en teoría de circuitos se considera el problema resuelto cuando se conoce la citada constante compleja, ya que las ecuaciones se formulan prácticamente siempre en el dominio complejo, y no en el temporal. No obstante, a partir de dicha constante es muy fácil determinar la evolución real de la corriente en función del tiempo. Para ello *basta simplemente calcular el módulo y argumento de **I*** en (AI.18) y aplicar en sentido inverso la definición de fasor temporal dada en (AI.2). A tal fin, lo más sencillo es multiplicr numerador y denomiandor de (AI.18) por (R – jωL), lo que proporciona:

$$\bar{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{R}\,\bar{\mathrm{U}}}{\mathrm{R}^2 + (\boldsymbol{\omega}\mathrm{L})^2} - \mathrm{j}\,\frac{\boldsymbol{\omega}\mathrm{L}\,\bar{\mathrm{U}}}{\mathrm{R}^2 + (\boldsymbol{\omega}\mathrm{L})^2} \qquad \textit{(AI.19)}$$

Si, para más simplicidad (y como no es infrecuente), se hubiera elegido el origen de tiempos de manera que el fasor **U** en el instante inicial quedara situado (y por tanto también su constante compleja) sobre el eje de abscisas, se deduce de (AI.19) que el módulo y argumento de la constante compleja **I** valdrían:

$$\left|\bar{I}\right| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \;;\quad \varphi_{i0} = arc\ \tan\frac{-\omega L}{R} \qquad \textit{(AI.20)}$$

Para el caso general de un origen de tiempos arbitrario, como corresponde a (AI.11) y como se muestra en la Fig AI.2 de este apéndice, dichos valores son:

$$\left|\bar{I}\right| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \;;\quad \varphi_i = \varphi_u - arc\ \tan\frac{\omega L}{R} \qquad \text{(AI.21)}$$

Conocidos esos valores basta aplicar la definición dada en (AI.2), de la que se obtiene:

$$i(t) = \sqrt{2}\,\frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + \varphi_i) \qquad \textit{(AI.22)}$$

<u>Breve nota histórica</u>. El origen de la *técnica operativa a base de fasores* ("vectores giratorios") se remonta al siglo XVIII y procede de la ingeniería mecánica, cuando los físicos se percataron de que las oscilaciones de un movimiento armónico simple podían ser tratadas de una manera gráfica y sencilla (y sin perder precisión matemática) a base de las proyecciones sobre un eje de un vector ("vector de Fresnel") que describiera una circunferencia con movimiento circular uniforme. Por ej., K. Fliegner, que dió clases durante años en el Politécnico de Zurich en el último tercio del siglo XIX, analizaba las oscilaciones armónicas de la válvula de corredera de una máquina de vapor mediante dicha técnica (La asignatura que impartía llevaba por título "Schiebersteuerungen", o sea, "controles deslizantes"). La idea de *extender esta misma técnica a las "oscilaciones eléctricas"* (corrienes alternas) le vino a Kapp no más tarde[2] del año 1887, quien la difundió en sus publicaciones posterio-

[2] G. Kapp "Inductions coils graphically treated". The Electrician 18 (1887), pp. 502 – 504, 524 – 525 y 568-571

res y en sus clases impartidas en Berlin-Charlotenburg (1895–1905) y en Birmingham (1905–1919), utilizando la trigonometría y la composición gráfica para llevar a cabo los cálculos fasoriales. A este respecto, conviene distinguir entre el concepto de fasor (Fig. A.1.1) y las herramientas analíticas que se utilizan (trigonometría, funciones exponenciales, números complejos, etc., sin excluir los métodos gráficos) para traducir a lenguaje matemático la idea fundamental subyacente a dicho concepto. La caracterización matemática de los fasores mediante números complejos para analizar los circuitos de corriente alterna en régimen permanente se debe a Ch. P. Steinmetz[3] y representó una excelente contribución a la ingeniería eléctrica (las operaciones resultan mucho más sencillas con números complejos que con fórmulas trigonométicas). Steinmetz desarrolló su método simbólico (utilizado hoy en día en todo el mundo) combinando dos ideas esenciales: la de impedancia compleja (tomada de A. Kenelly) y la representación gráfica de oscilaciones mediante fasores.

G. Kapp, hijo de padre alemán y madre escocesa, nació en Viena en 1852 y murió en Birmingham en 1922. Cursó la carrera de ingeniería mecánica en el Politécnico de Zurich.Tras finalizar sus estudios, trabajó primero en Augsburg y Viena. En 1875 marchó a Inglaterra y adquirío en 1881 la nacionalidad británica (que era la de su familia materna). Alli trabajó inicialmente en diversas empresas fabricantes de maquinaria eléctrica, y luego como consultor privado. De 1894 a 1905 Kapp vivió en Berlin, y su gran capacidad y creatividad le permitieron simultánear tres puestos de gran responsabilidad: secretario general de la Asociación Alemana VDE, redactor jefe de la revista ETZ (Elektrotechnische Zeitschrift) y profesor en la Escuela Superior de Ingeniería de Berlin. En 1905 se trasladó de nuevo a Inglaterra para dirigir la recién creada cátedra de ingeniería eléctrica de la Universidad de Birmingham, tarea que, pese a una penosa dolencia asmática, desempeñó con gran entereza hasta su retirada definitiva como emérito en 1921. Kapp recibió numerosos premios y galardones científicos, tanto alemanes como británicos, a los que jamás aludió.

Ch. P. Steinmetz nació en 1865 en Breslau (antigua Silesia alemana, hoy territorio polaco) y murió en Nueva York, en 1923. Estudió matemáticas e ingeniería eléctrica en la Universidad de Breslau, participando activamente en los movimientos socialistas juveniles de la época. En 1888, para evitar su más que probable detención (como ya le había ocurrido a varios compañeros de partido), y cuando estaba a punto de finalizar su doctorado, huyó de Alemania, primero a Suiza y, al año siguiente, enfrentado a la situación de un visado que le expiraba, emigró como polizón en un carguero a EE. UU. Durante su estancia forzosa en Suiza cursó un año de ingeniería mecánica (1888 – 1889) en el Politécnico de Zurich, matriculándose, según consta en su expediente académico de aquel Politécnico, justamente en la asignatura "Schiebersteuerungen" de K. Fliegner. En EE. UU. trabajó durante más de 20 años en la General Electric, donde estaba considerado un ingeniero excepcional, y donde llegó a dirigir el Departamento de Ingeniería y Consultoría. Tamizados por la visión más ponderada y serena que, en todas las personas buenas, proporciona el paso de los años, Steinmetz mantuvo hasta su muerte sus ideales por una sociedad más igualitaria y más justa, sobre todo con los más desfavorecidos.

[3] Ch. P. Steinmetz: "Complex quantities and their use in electrical engineering". International Electrical Congress. Chicago (1893), pp. 33 - 74