



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA  
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA  
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA*



# DIAGRAMA DEL CÍRCULO

## PARA

# MÁQUINAS ASÍNCRONAS

**Miguel Angel Rodríguez Pozueta**

**Doctor Ingeniero Industrial**

© 2015, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

*This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.*



*Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.*

*Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:*  
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

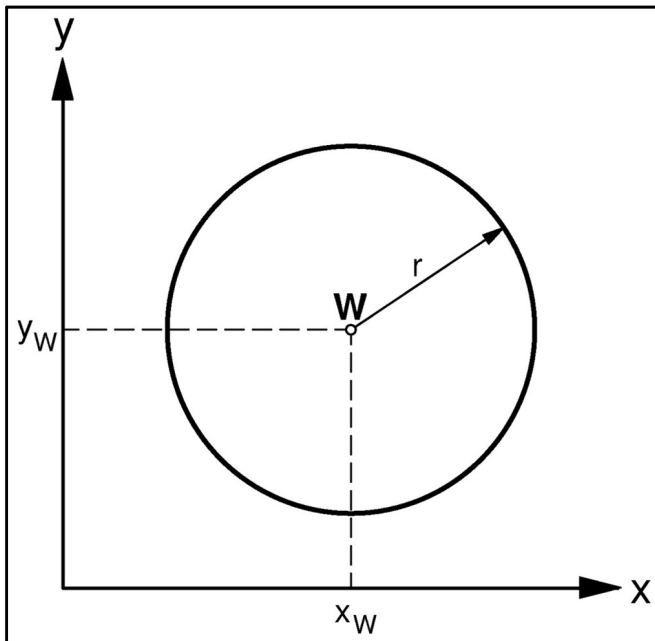
# DIAGRAMA DEL CÍRCULO PARA MÁQUINAS ASÍNCRONAS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

## DIAGRAMA DEL CÍRCULO. PRESENTACIÓN

- El **diagrama del círculo** o **diagrama circular** es una construcción geométrica que permite el análisis del comportamiento de una máquina asíncrona, así como, el calcular gráficamente sus magnitudes y su características.
- El diagrama del círculo se basa en el circuito equivalente aproximado de la máquina de inducción cuando tanto el valor eficaz  $V_1$  como la frecuencia  $f_1$  de las tensiones del estator permanecen constantes.

## CUESTIONES PREVIAS (1)



**Ecuación de una  
circunferencia de radio  $r$   
y cuyo centro está en el  
punto  $(x_w, y_w)$**

$$(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 = r^2$$

$$(x^2 + x_w^2 - 2 x_w x) + (y^2 + y_w^2 - 2 y_w y) = r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = (r^2 - x_w^2 - y_w^2) + (2 x_w) x + (2 y_w) y} \quad (1)$$

## CUESTIONES PREVIAS (2)

**Impedancia:**  $\bar{Z} = R + j X \quad (\Omega)$

**Admitancia:**  $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + j B \quad (\Omega^{-1}, \text{ mho o Siemens})$

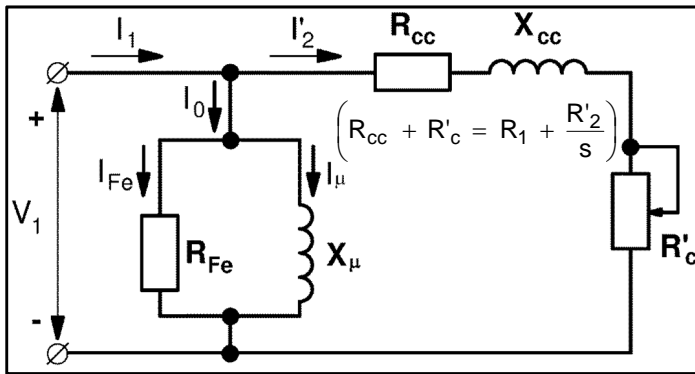
**Conductancia:**  $G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (\Omega^{-1}, \text{ mho o Siemens})$

**Susceptancia:**  $B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (\Omega^{-1}, \text{ mho o Siemens})$

**Ley de Ohm  
en c.a.:**

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} \quad \boxed{\bar{I} = \bar{V} \cdot \bar{Y}}$$

# CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO. ECUACIONES



$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2$$

$$\bar{I}_0 = \bar{V}_1 \cdot \bar{Y}_0 \quad \bar{I}'_2 = \bar{V}_1 \cdot \bar{Y}_s$$

$$\boxed{\bar{I}_1 = \bar{V}_1 \cdot (\bar{Y}_0 + \bar{Y}_s)}$$

Si  $\bar{V}_1$  es constante,  $\bar{I}_0$  es constante e  $\bar{I}'_2$  es función del deslizamiento  $s$

$$\bar{Y}_0 = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_\mu} = \frac{1}{R_{Fe}} - j \frac{1}{X_\mu}$$

$$\bar{Z}_s = R_s + jX_s = (R_{cc} + R'_c) + jX_{cc}$$

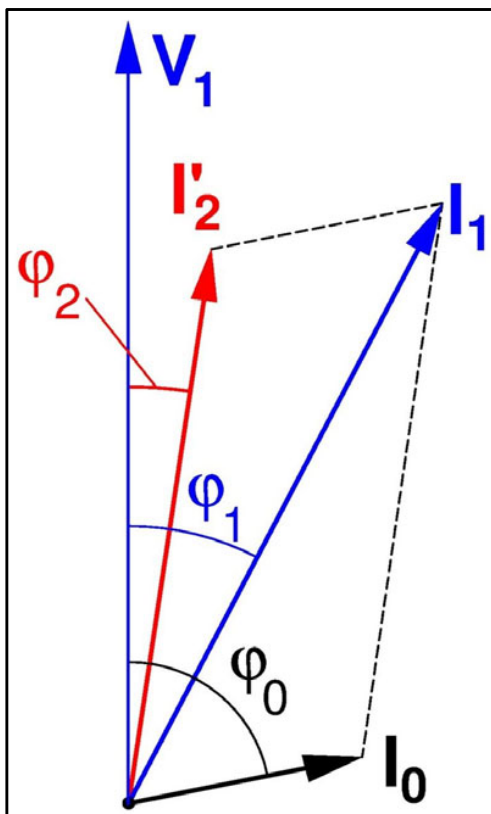
$$\bar{Y}_s = \frac{1}{\bar{Z}_s} = G_s + jB_s$$

$$R_s = R_1 + \frac{R'_2}{s} \quad X_s = X_{cc}$$

$$G_s = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$B_s = \frac{-X_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

## DIAGRAMA FASORIAL



Elijo tomar al fasor  $\bar{V}_1$  como referencia en dirección vertical:

$$\bar{V}_1 = j V_1$$

$$\bar{I}'_2 = \bar{V}_1 \cdot \bar{Y}_s = (j V_1) \cdot \bar{Y}_s$$

$$\bar{I}'_2 = V_1 \cdot (j \bar{Y}_s)$$

$$j \bar{Y}_s = -B_s + j G_s \quad \left\{ \begin{array}{l} -B_s = \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2} \\ G_s = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} \end{array} \right.$$

Luego, a medida que varía el deslizamiento  $s$  el lugar geométrico del fasor  $\bar{I}'_2$  es igual al lugar geométrico del fasor  $j \bar{Y}_s$  a escala  $V_1$ .

# LUGAR GEOMÉTRICO DE LA ADMITANCIA DEL ROTOR

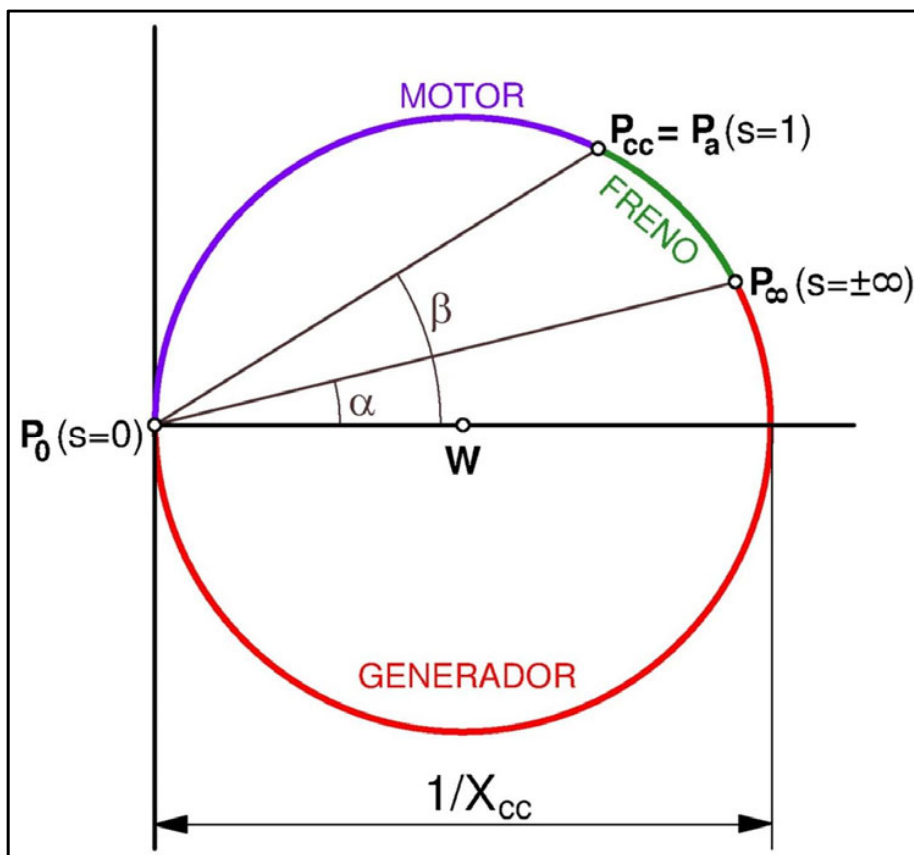
El lugar geométrico de  $j\bar{Y}_s$  es igual al de  $\bar{Y}_s$  si en el eje de abscisas se representa la parte imaginaria de  $\bar{Y}_s$  cambiada de signo y en el eje de ordenadas se representa la parte real de  $\bar{Y}_s$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= -B_s = \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2} \\ y &= G_s = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} \end{aligned} \right\} \frac{1}{R_s^2 + X_s^2} = \frac{x}{X_s} = \frac{x}{X_{cc}} \quad (X_s = X_{cc})$$

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{1}{R_s^2 + X_s^2} \right)^2 (X_s^2 + R_s^2) = \frac{1}{R_s^2 + X_s^2} \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \left( \frac{1}{X_{cc}} \right) x}$$

Comparando con la ecuación de una circunferencia (1) se aprecia que esta es la ecuación de una circunferencia de radio  $r = \frac{1}{2 X_{cc}}$  y cuyo centro (el punto **W**) tiene estas coordenadas:  $\left( x_W = \frac{1}{2 X_{cc}}, y_W = 0 \right)$

# LUGAR GEOMÉTRICO DE LA ADMITANCIA DEL ROTOR



**MOTOR:**

$$0 \leq n \leq n_1$$

$$1 \geq s \geq 0$$

**GENERADOR:**

$$n_1 < n < \infty$$

$$0 > s > -\infty$$

**FRENO A CONTRACORRIENTE:**

$$-\infty < n < 0$$

$$\infty > s > 1$$

## LUGAR GEOMÉTRICO DE LA ADMITANCIA DEL ROTOR

$$x = -B_s = \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2} = \frac{X_{cc}}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{s^2 \cdot X_{cc}}{(s \cdot R_1 + R'_2)^2 + (s \cdot X_{cc})^2}$$

$$y = G_s = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} = \frac{R_1 + \frac{R'_2}{s}}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{s^2 \cdot R_1 + s \cdot R'_2}{(s \cdot R_1 + R'_2)^2 + (s \cdot X_{cc})^2}$$

**VACÍO IDEAL (Punto  $P_0$ ):**  $n = n_1$ ;  $s = 0$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$

**ARRANQUE (Punto  $P_{cc}$  (=  $P_a$ )):**  $n = 0$ ;  $s = 1$ ;  $x = X_{cc}/Z_{cc}^2$ ;  $y = R_{cc}/Z_{cc}^2$

$$\boxed{\operatorname{tg} \beta = R_{cc}/X_{cc}} \quad (Z_{cc}^2 = (R_1 + R'_2)^2 + X_{cc}^2)$$

**Punto  $P_\infty$ :**  $n = \pm\infty$ ;  $s = \pm\infty$ ;  $R'_2/s = 0$ ;  $x = X_{cc}/(R_1^2 + X_{cc}^2)$ ;  $y = R_1/(R_1^2 + X_{cc}^2)$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = R_1/X_{cc}}$$

## LUGAR GEOMÉTRICO DE LA ADMITANCIA DEL ROTOR

**Recta  $P_0$ - $P_{cc}$ :**

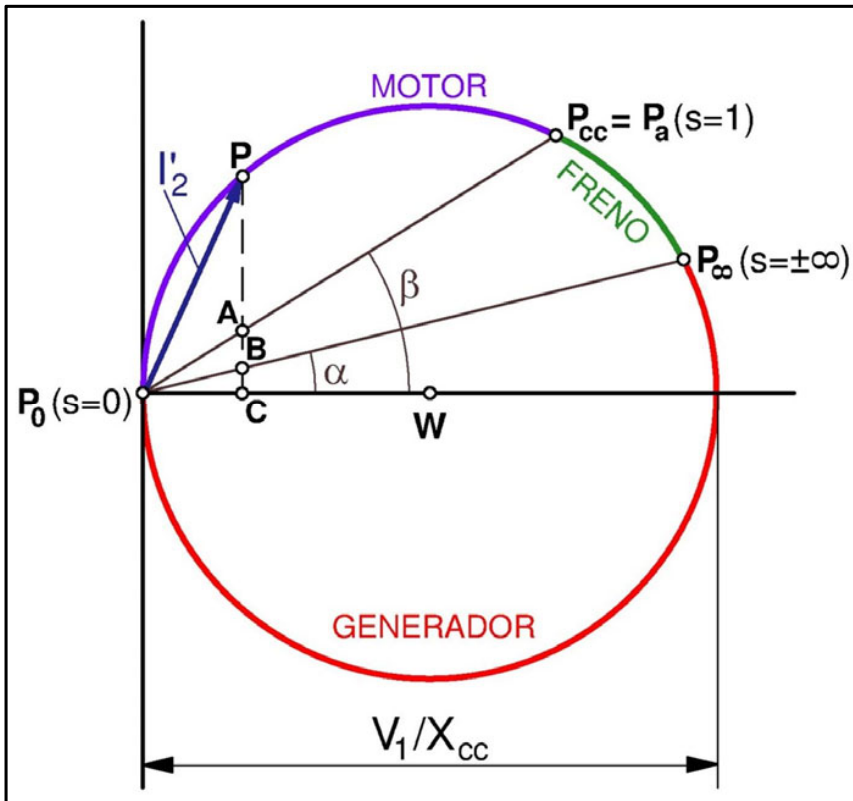
$$y = x \cdot \operatorname{tg} \beta = \left(\frac{X_{cc}}{R_s^2 + X_s^2}\right) \cdot \left(\frac{R_{cc}}{X_{cc}}\right) = \frac{R_{cc}}{Z_s^2} \quad (2)$$

$$(X_s = X_{cc}) \quad (Z_s^2 = R_s^2 + X_s^2)$$

**Recta  $P_0$ - $P_\infty$ :**

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{X_{cc}}{R_s^2 + X_s^2}\right) \cdot \left(\frac{R_1}{X_{cc}}\right) = \frac{R_1}{Z_s^2} \quad (3)$$

# LUGAR GEOMÉTRICO DE LA CORRIENTE DEL ROTOR



- Este lugar geométrico es igual al de admitancias del rotor si se modifican las escalas de ejes de coordenadas multiplicándolas por el valor eficaz  $V_1$  de la tensión del estator.
- Cada punto  $P$  de la circunferencia representa un estado de funcionamiento de la máquina. El vector que une el punto  $P$  con el punto  $P_0$  es el fasor  $\bar{I}'_2$  correspondiente a dicho estado de funcionamiento.

## LUGAR GEOMÉTRICO DE LA CORRIENTE DEL ROTOR. POTENCIAS

Siendo  $m_1$  el número de fases del estator, si se multiplica por  $m_1 V_1$  al lugar geométrico de corriente del rotor (o, lo que es equivalente, se multiplica por  $m_1 (V_1)^2$  al lugar geométrico de admitancia del rotor), las ordenadas de las rectas  $P_0-P_{cc}$  y  $P_0-P_{\infty}$  pasan a ser:

### Recta $P_0-P_{cc}$ :

Partiendo de la ecuación (2) del lugar geométrico de la admitancia del rotor:

$$y = \frac{m_1 V_1^2 R_{cc}}{Z_s^2} = m_1 (V_1 Y_s)^2 R_{cc} = m_1 I_2'^2 (R_1 + R_2') = P_{Cu}$$

Luego, si el motor está funcionando en el punto  $P$  del lugar geométrico de la corriente del rotor y se usa la escala de potencias (multiplicando por  $m_1 V_1$  a las corrientes o por  $m_1 (V_1)^2$  a las admitancias), la distancia  $A-C$  es igual a las pérdidas en el cobre totales (estator + rotor)  $P_{Cu}$  de la máquina.



# LUGAR GEOMÉTRICO DE LA CORRIENTE DEL ROTOR. POTENCIAS

## Recta $P_0$ - $P_\infty$ :

Partiendo de la ecuación (3) del lugar geométrico de la admitancia del rotor:

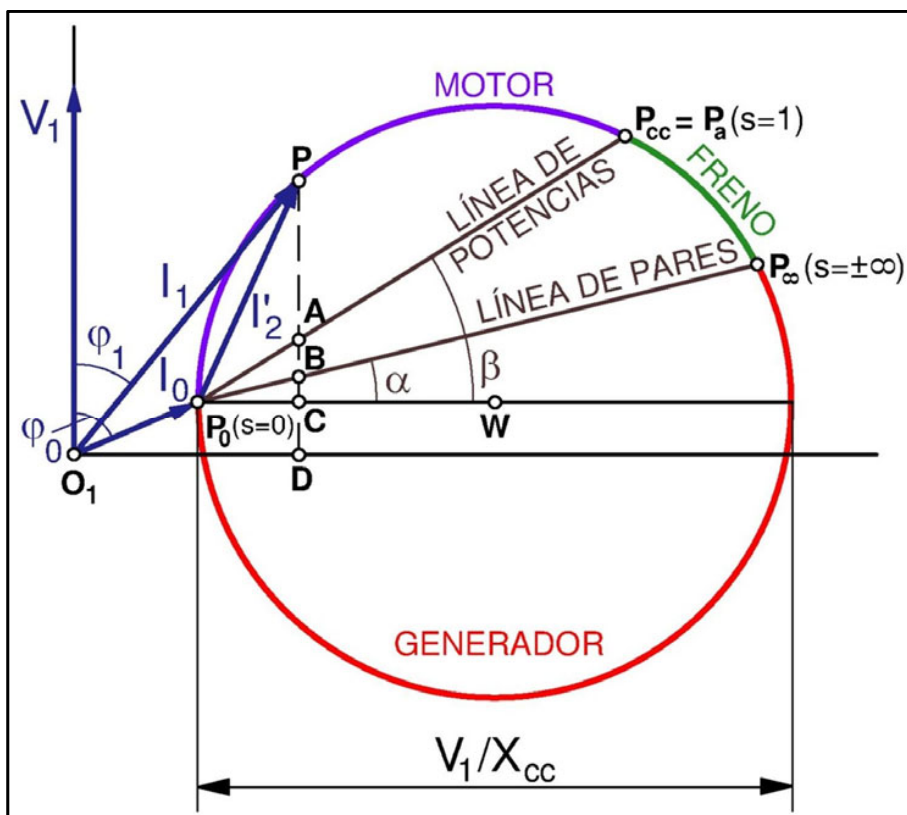
$$y = \frac{m_1 V_1^2 R_1}{Z_s^2} = m_1 (V_1 Y_s)^2 R_1 = m_1 I_2^2 R_1 = P_{Cu1}$$

Luego, si el motor está funcionando en el punto **P** del lugar geométrico de la corriente del rotor y se usa la escala de potencias (multiplicando por  $m_1 V_1$  a las corrientes o por  $m_1 (V_1)^2$  a las admitancias), la distancia **B-C** es igual a las pérdidas en el cobre  $P_{Cu1}$  del estator.

$$P_{Cu} = P_{Cu1} + P_{Cu2} \Rightarrow P_{Cu2} = m_1 I_2^2 R'_2 = P_{Cu} - P_{Cu1}$$

Por lo tanto, la distancia **A-B** representa a las pérdidas en el cobre  $P_{Cu2}$  del rotor.

## DIAGRAMA DEL CÍRCULO



- Este es el lugar geométrico del fasor de corriente del estator  $\bar{I}_1$ ; el cual forma el ángulo  $\phi_1$  con el eje vertical (cuya dirección es la del fasor  $\bar{V}_1$  de tensión del estator).
- Se obtiene sumando vectorialmente el fasor (constante) de corriente de vacío  $\bar{I}_0$  al lugar geométrico del fasor  $\bar{I}'_2$  de corriente del rotor.

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. POTENCIAS

## Potencia absorbida por el estator $P_1$

Es evidente que multiplicando por  $m_1 V_1$  la escala de corrientes del diagrama del círculo, las proyecciones vertical y horizontal del punto **P** (que corresponde a un estado de funcionamiento de la máquina) se obtienen, respectivamente, las potencias activa  $P_1$  y reactiva  $Q_1$ , absorbidas por el estator de la máquina en dicho estado:

$$\begin{array}{l} \text{Distancia } \mathbf{P-D}: P_1 = m_1 V_1 I_1 \cos \varphi_1 \\ \text{Distancia } \mathbf{O_1-D}: Q_1 = m_1 V_1 I_1 \sin \varphi_1 \end{array}$$

## Pérdidas en el hierro $P_{Fe}$ :

Se aprecia que utilizando la escala de potencias sucede que:

$$\text{Distancia } \mathbf{C-D}: P_{Fe} = m_1 V_1 I_0 \cos \varphi_0 = m_1 V_1 I_{Fe} = \text{Constante}$$

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. POTENCIAS

## Pérdidas en el cobre $P_{Cu1}$ y $P_{Cu2}$

Ya se ha visto anteriormente que usando la escala de potencias:

$$\begin{array}{l} \text{Distancia } \mathbf{B-C}: P_{Cu1} = m_1 R_1 I_2^2 \\ \text{Distancia } \mathbf{A-B}: P_{Cu2} = m_1 R'_2 I_2^2 \end{array}$$

## Potencia mecánica interna $P_{mi}$ :

$$P_{mi} = P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe} - P_{Cu2}$$

$$\text{Distancia } \mathbf{P-A}: P_{mi} \approx P_u$$

Usando la escala de potencias sucede que la distancia vertical desde un punto de funcionamiento **P** de la máquina a la recta  $\mathbf{P_0-P_{cc}}$  es igual a la potencia interna  $P_{mi}$  para este funcionamiento. Por esta razón, a la recta  $\mathbf{P_0-P_{cc}}$  se le denomina la **recta de potencias**.

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. PAR

## Potencia en el entrehierro $P_a$ y par $M$

$$P_a = P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe} = P_{mi} + P_{Cu2}$$

$$\boxed{\text{Distancia P-B: } P_a}$$

Sabemos que si la frecuencia  $f_1$  es constante también lo es la velocidad de sincronismo,  $\Omega_1$  (rad/s) o  $n_1$  (r.p.m.) ( $n_1 = 60 f_1 / p$ ), por lo que el par  $M$  y la potencia en el entrehierro  $P_a$  son proporcionales:

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1}$$

Luego, si se usa una nueva escala, la escala de pares, consistente en dividir la escala de potencias por la velocidad de sincronismo  $\Omega_1$ , la distancia vertical desde un punto de funcionamiento  $P$  de la máquina a la recta  $P_0$ - $P_\infty$  es igual al par  $M$  de la máquina en este funcionamiento. Por este motivo, a la recta  $P_0$ - $P_\infty$  se le denomina la **recta de pares**.

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. DESLIZAMIENTO Y RENDIMIENTO

## Deslizamiento $s$

$$P_{Cu2} = s \cdot P_a \Rightarrow s = \frac{P_{Cu2}}{P_a}$$

$$\boxed{s = \frac{\text{Distancia A-B}}{\text{Distancia P-B}}}$$

## Rendimiento $\eta$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas  $P_m$  el rendimiento  $\eta$  se puede obtener así:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{\text{Distancia P-A}}{\text{Distancia P-D}}}$$

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. ESCALAS GRÁFICAS

## Escala de intensidades

Es la escala de partida:  $1 \text{ A} = l_A \text{ mm} \Rightarrow 1 \text{ mm} = \frac{1}{l_A} \text{ A}$

## Escala de admitancias

Se divide la escala de intensidades por  $V_1$ :  $1 \text{ mm} = \frac{1}{V_1 \cdot l_A} \Omega^{-1}$

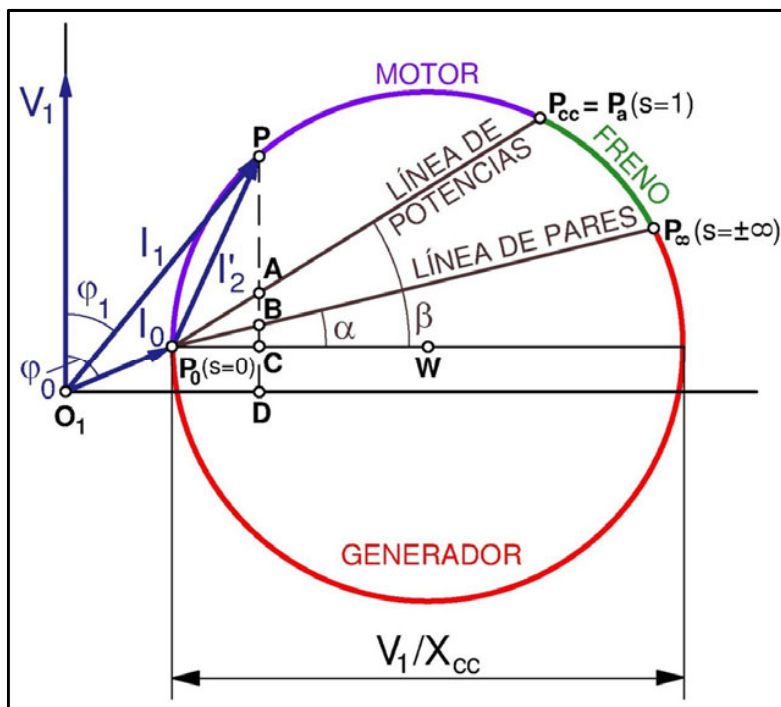
## Escala de potencias

Se multiplica la escala de intensidades por  $m_1 V_1$ :  $1 \text{ mm} = \frac{m_1 V_1}{l_A} \text{ W}$

## Escala de pares

Se divide la escala de potencias por  $\Omega_1$ :  $1 \text{ mm} = \frac{m_1 V_1}{\Omega_1 \cdot l_A} = \frac{m_1 V_1}{\left(\frac{2\pi}{60} n_1\right) \cdot l_A} \text{ Nm}$

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. RESUMEN



## Escala de potencias:

$$P_1 = \overline{PD}$$

$$P_{mi} \approx P_u = \overline{PA}$$

$$P_{Cu2} = \overline{AB}$$

$$P_{Cu1} = \overline{BC}$$

$$P_{Fe} = \overline{CD}$$

$$P_a = \overline{PB}$$

## Escala de pares:

$$M = \overline{PB}$$

## Escala de intensidades:

$$I_1 = \overline{PO_1}$$

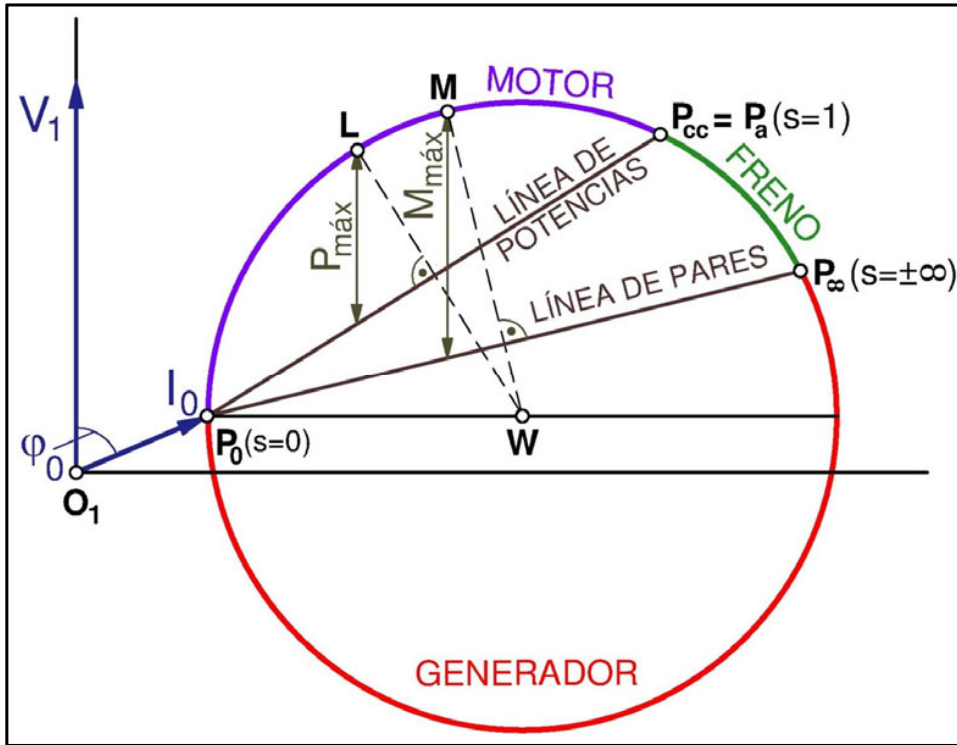
$$I_2 = \overline{PP_0}$$

$$I_0 = \overline{P_0O_1}$$

## Magnitudes dimensionales:

$$s = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \quad \eta = \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}$$

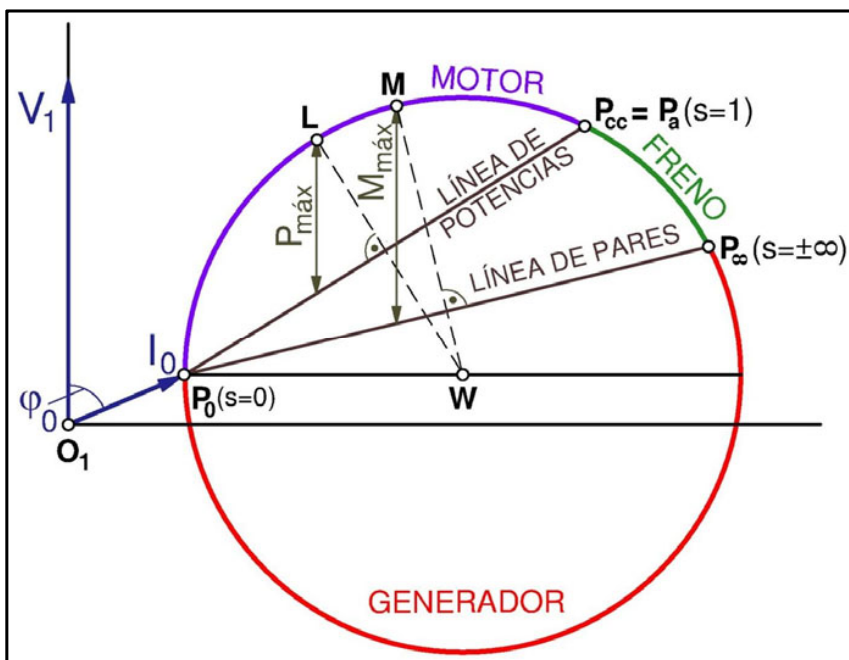
# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. POTENCIA Y PAR MÁXIMOS



Mediante la construcción geométrica de la figura se determinan los valores del **par máximo  $M_{m\acute{a}x}$**  y de **potencia útil máxima  $P_{m\acute{a}x}$**  (que, si se deprecian las pérdidas mecánicas  $P_m$  es igual a la potencia interna máxima).

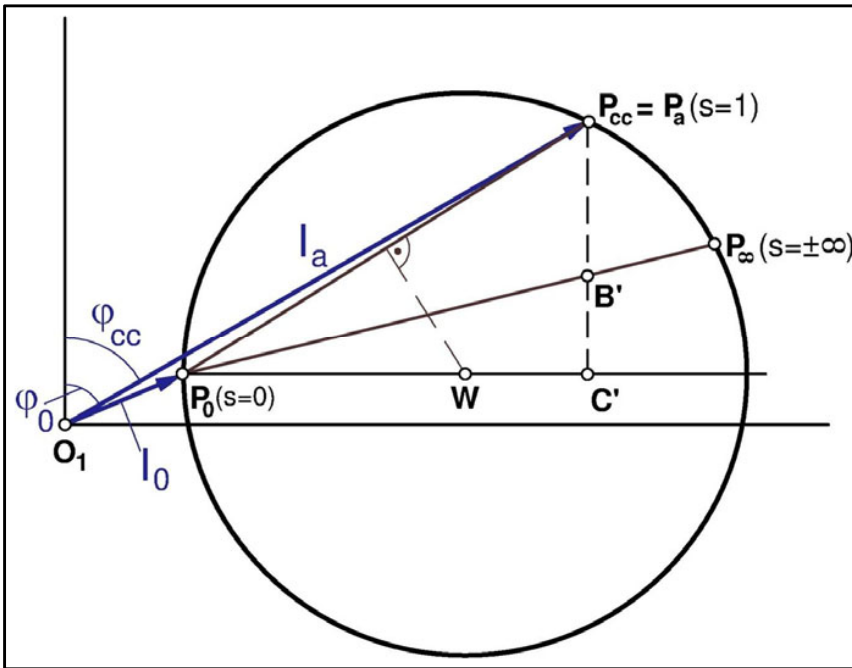
**M:** Punto de par máximo; **L:** Punto de potencia máxima

# DIAGRAMA DEL CÍRCULO. POTENCIA Y PAR MÁXIMOS



- El punto **M** de **par máximo** es el punto de corte con la circunferencia de la recta perpendicular a la línea de pares  $P-P_{\infty}$  trazada desde el centro **W** de la circunferencia.
- El punto **L** de **potencia máxima** es el punto de corte con la circunferencia de la recta perpendicular a la línea de potencias  $P-P_{cc}$  trazada desde el centro **W** de la circunferencia

# OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DEL CÍRCULO A PARTIR DE LOS ENSAYOS



1. De los ensayos de vacío y de cortocircuito se obtienen  $I_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $I_a$  y  $\varphi_{cc}$ . Esto permite ubicar los puntos  $P_0$  y  $P_{cc}$  ( $= P_a$ ) usando la escala de intensidades.
2. Se dibujan la horizontal que pasa por  $P_0$  y la recta  $P_0-P_{cc}$ . La mediatriz de  $P_0-P_{cc}$  corta a la horizontal en el centro  $W$  de la circunferencia.
3. Se dibuja la circunferencia de centro en  $W$  y que pase por los puntos  $P_0$  y  $P_{cc}$ .
4. El punto  $P_\infty$  se obtiene teniendo en cuenta que:

$$\frac{\text{Distancia } P_{cc}-B'}{\text{Distancia } B'-C'} = \frac{R'_2}{R_1}$$

# OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DEL CÍRCULO A PARTIR DE LOS ENSAYOS

- Los valores de  $I_0$  y de  $\varphi_0$  se obtienen del **ensayo de vacío** como se explicó al tratar de este ensayo.
- En el **ensayo de cortocircuito** se trabaja con una tensión del estator reducida  $V_{1cc}$  que da lugar a que circule la corriente asignada  $I_{1N}$  cuando el rotor está parado.

El ángulo  $\varphi_{cc}$  se obtiene como se explicó al tratar de este ensayo.

La corriente de arranque  $I_a$  que se necesita para obtener el punto  $P_{cc}$  ( $= P_a$ ) del diagrama de círculo con la tensión  $V_1$  del estator se obtiene mediante la siguiente relación:

$$I_a = \frac{V_1}{V_{1cc}} I_{1N}$$