UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

NÚMEROS COMPLEJOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Doctor Ingeniero Industrial

OBSERVACIONES SOBRE LA NOMENCLATURA

En este texto, siguiendo la nomenclatura habitual en Electrotecnia, se ha utilizado la letra "j" para designar a la unidad imaginaria, $\sqrt{-1}$, en los números complejos. En muchos textos matemáticos el lector puede observar que se emplea la letra "i" para designar a $\sqrt{-1}$.

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

ÍNDICE

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

NÚMEROS COMPLEJOS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

NÚMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS

Es sabido que el cuadrado de cualquier número real, tanto positivo como negativo, da como resultado un número real positivo. Por consiguiente, la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución dentro del conjunto de los números reales.

Para poder obtener la raíz cuadrada de números negativos se introdujeron los *números imaginarios*.

La **unidad imaginaria j** se define así:

$$j = \sqrt{-1} \qquad (1)$$

Es preciso indicar que en la mayoría de los libros de matemáticas la unidad imaginaria se representa mediante la letra "i". Sin embargo, en Electrotecnia se representa mediante la letra "j" porque se reserva la letra "i" para la intensidad.

Un **número imaginario** es igual al producto de la unidad imaginaria j por un número real X_b, por consiguiente tiene esta forma:

$$j\,X_b \qquad (2)$$

Luego, un número imaginario es igual a la raíz cuadrada de un número real negativo:

$$\sqrt{-X_b^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{X_b^2} = j\,X_b \qquad (3)$$

Un **número complejo** tiene esta forma

$$\overline{X} = \mathbf{X} = X_a + j\,X_b \qquad (4)$$

Por lo tanto, un número complejo es igual a la suma de un número real más uno imaginario. De esto se deduce que tanto el conjunto de los números reales como el de los números imaginarios son subconjuntos del conjunto de los números complejos.

Como se aprecia en la expresión (4), un número complejo se puede designar mediante una letra con un guión encima o mediante una letra en negrita. En el texto de este documento se utiliza el primero de estos sistemas de designación, mientras que en las figuras se emplean ambos sistemas.

En la expresión (4) a X_a se lo denomina *parte real* y a X_b se lo llama *parte imaginaria* del número complejo $\overline{X}$.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS. PLANO DE GAUSS

Se puede establecer una correspondencia entre cada número complejo y un vector en el plano x-y. Este vector tiene su origen sobre el origen de coordenadas y sus componentes son la parte real (X_a) en el eje de abscisas y la parte imaginaria (X_b) en el eje de ordenadas (Fig. 1).

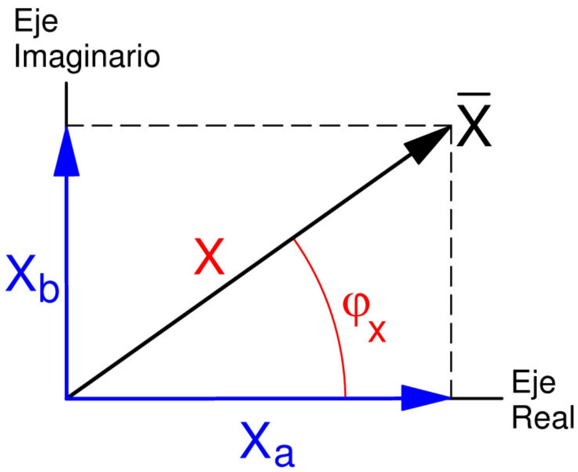

Fig. 1: Representación gráfica del número complejo $\overline{X}$

Cuando el plano cartesiano representa al conjunto de los números complejos se lo denomina *plano complejo* o *plano de Gauss* y en él los ejes de coordenadas pasan a denominarse *eje real* y *eje imaginario*, respectivamente (Fig. 1).

La expresión (4) constituye la *forma cartesiana, binómica o rectangular* del número complejo $\overline{X}$. Otra manera de representar al número complejo $\overline{X}$ es la *forma polar*:

$$\textit{Forma cartesiana:}\quad \overline{X} = X_a + j\,X_b \tag{4'}$$

$$\textit{Forma polar:}\quad \overline{X} = X\,\underline{\big|\ \varphi_x} \tag{5}$$

En la forma polar (5) aparecen el *módulo* X y el *argumento* φ_x del número complejo $\overline{X}$ (ver la Fig. 1).

De la Fig. 1 es fácil deducir las siguientes relaciones:

$$X_a = X\cos\varphi_x \tag{6a}$$

$$X_b = X\,\mathrm{sen}\,\varphi_x \tag{6b}$$

$$X^2 = X_a^2 + X_b^2 \tag{6c}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_x = \frac{X_b}{X_a} \tag{6d}$$

De las expresiones (4) y (6) se deduce esta relación:

$$\overline{X} = X\left(\cos\varphi_x + j\,\mathrm{sen}\,\varphi_x\right) \tag{7}$$

Se demuestra que se cumple la siguiente igualdad:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha \tag{8}$$

Las expresiones (7) y (8) indican que también se puede emplear la *forma exponencial* para representar al número complejo $\overline{X}$:

$$\textit{Forma exponencial:}\quad \overline{X} = X\,e^{j\varphi_x} \tag{9}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En lo que sigue se utilizarán los dos números complejos siguientes:

$$\overline{X} = X_a + j\,X_b = X\underline{\big|\ \varphi_x} \tag{10a}$$

$$\overline{Y} = Y_a + j\,Y_b = Y\underline{\big|\ \varphi_y} \tag{10b}$$

Conjugado de un número complejo:

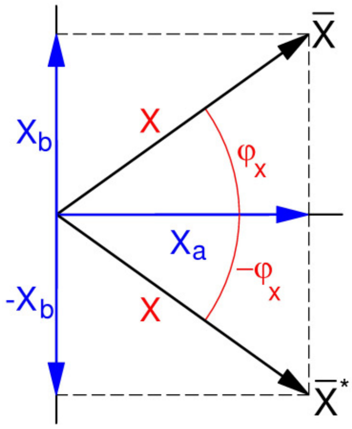

Fig. 2: $\overline{X}^*$ es el conjugado del número complejo $\overline{X}$

$$\overline{X}^* = X_a - j\,X_b = X\underline{\big|\ -\varphi_x} \tag{11}$$

Propiedades de j:

- $j = \sqrt{-1} = 1\underline{\big|\ 90^o}$ (12a)
- $j^2 = -1 = 1\underline{\big|\ 180^o}$ (12b)
- $j^3 = -j = j^* = 1\underline{\big|\ -90^o}$ (12c)
- $\dfrac{1}{j} = -j = 1\underline{\big|\ -90^o}$ (12d)

La expresión (12d) se demuestra así:

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j}\cdot\frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Suma:

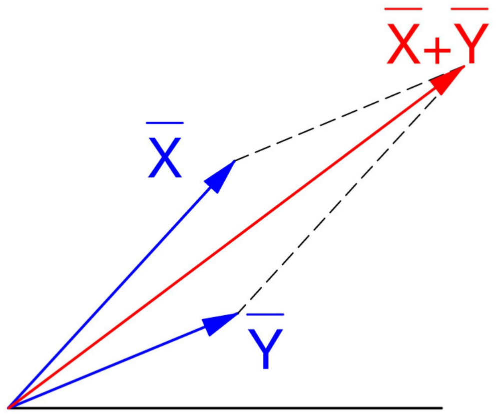

Fig. 3: Suma de los números complejos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$

$$\overline{X} + \overline{Y} = (X_a + Y_a) + j\,(X_b + Y_b) \tag{13}$$

Resta:

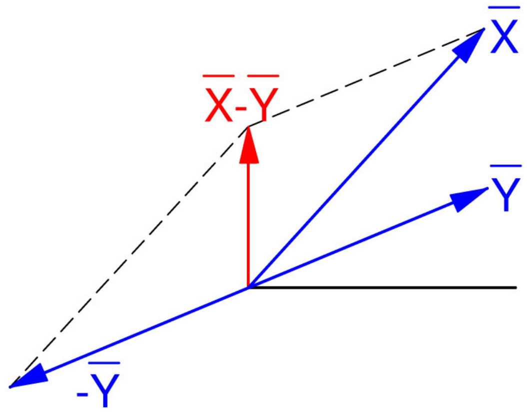

Fig. 4: Resta de los números complejos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$

$$\overline{X} - \overline{Y} = (X_a - Y_a) + j\,(X_b - Y_b) \tag{14}$$

Multiplicación:

- En forma polar:

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = (X \cdot Y)\underline{\big|\,(\varphi_x + \varphi_y)} \tag{15a}$$

- En forma cartesiana:

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = (X_aY_a - X_bY_b) + j\,(X_aY_b + X_bY_a) \tag{15b}$$

La expresión (15b) se demuestra así:

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = (X_a + j\,X_b) \cdot (Y_a + j\,Y_b) = X_aY_a + j\,X_aY_b + jX_bY_a + j^2\,X_bY_b =$$
$$= (X_aY_a - X_bY_b) + j\,(X_aY_b + X_bY_a)$$

Cuadrado:

- En forma polar:

$$\overline{X}^2 = X^2 \underline{|\, 2\,\varphi_x} \tag{16a}$$

- En forma cartesiana:

$$\overline{X}^2 = \left(X_a^2 - X_b^2\right) + j\left(2\,X_a X_b\right) \tag{16b}$$

División:

- En forma polar:

$$\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{X}{Y} \underline{|\left(\varphi_x - \varphi_y\right)} \tag{17a}$$

- En forma cartesiana:

$$\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{\left(X_a Y_a + X_b Y_b\right) + j\left(X_b Y_a - X_a Y_b\right)}{Y_a^2 + Y_b^2} \tag{17b}$$

Para obtener la expresión (17b) se multiplican tanto el numerador como el denominador del cociente por la conjugada del denominador:

$$\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{X_a + j\,X_b}{Y_a + j\,Y_b} = \frac{X_a + j\,X_b}{Y_a + j\,Y_b} \cdot \frac{Y_a - j\,Y_b}{Y_a - j\,Y_b} = \frac{X_a Y_a - j\,X_a Y_b + j\,X_b Y_a - j^2 X_b Y_b}{Y_a^2 - \left(j\,Y_b\right)^2} =$$
$$= \frac{\left(X_a Y_a + X_b Y_b\right) + j\left(X_b Y_a - X_a Y_b\right)}{Y_a^2 + Y_b^2}$$

Inverso:

- En forma polar:

$$\frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{X} \underline{|\, -\varphi_x} \tag{18a}$$

- En forma cartesiana:

$$\frac{1}{\overline{X}} = \frac{X_a - j\,X_b}{X_a^2 + X_b^2} \tag{18b}$$

Observando las expresiones (12) y (15a) se deduce que:

- Multiplicar $\overline{X}$ por j equivale a girarlo 90º.
- Multiplicar $\overline{X}$ por j^2 equivale a girarlo 180º.
- Multiplicar $\overline{X}$ por -j o por $\frac{1}{j}$ equivale a girarlo -90º.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Los sistemas de ecuaciones lineales con números complejos se resuelven de manera similar a los sistemas de ecuaciones con números reales. Por lo tanto, se utilizarán los conocidos métodos de sustitución, de igualación y de reducción o, también, la Regla de Cramer. La única diferencia es que las operaciones algebraicas son con números complejos y se efectúan como se ha indicado en el apartado anterior.

En la Web también está disponible mi libro de cálculo CALCOMP que resuelve sistemas de hasta nueve ecuaciones lineales con números complejos. Se puede descargar gratuitamente de esta página Web: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/mi_software.htm.

Un ejemplo permitirá comprender mejor como se resuelven estos sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 1:

Calcule las corrientes de rama del siguiente circuito mediante el método general; es decir, mediante la aplicación directa de los Lemas de Kirchhoff.

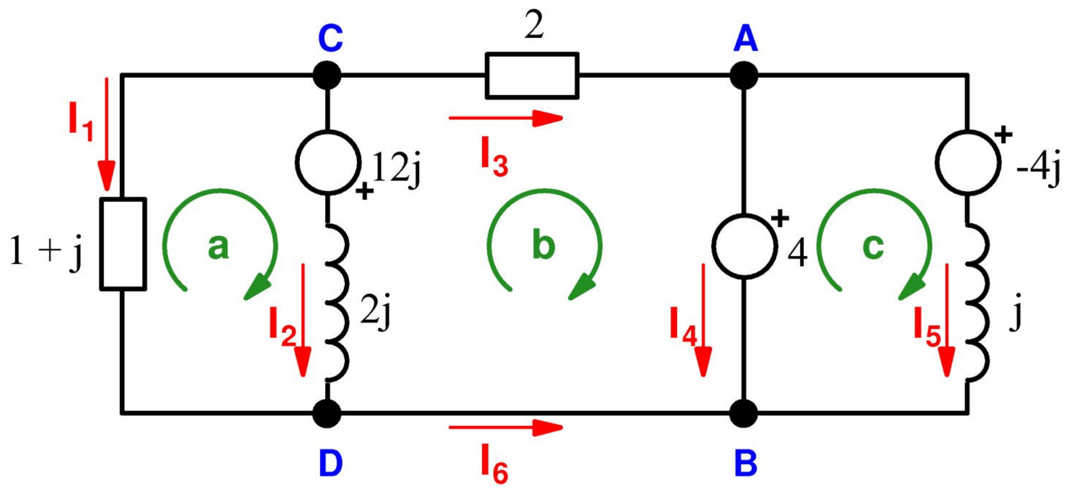

Fig. 5: Circuito a resolver

Resolución:

La aplicación de los dos lemas de Kirchhoff da lugar al siguiente sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, que son las corrientes de rama ($\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, …, $\bar{I}_6$):

$$\text{Nudo A:} \quad \bar{I}_3 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5 \qquad (19a)$$

$$\text{Nudo B:} \quad \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \bar{I}_6 = 0 \qquad (19b)$$

$$\text{Nudo C:} \quad 0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \qquad (19c)$$

$$\text{Malla a:} \quad 12j = -\bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (2j) \qquad (19d)$$

$$\text{Malla b:} \quad -12j - 4 = -\bar{I}_2 (2j) + \bar{I}_3 \, 2 \qquad (19e)$$

$$\text{Malla c:} \quad 4 - (-4j) = \bar{I}_5 \, j \qquad (19f)$$

Se empieza ordenando cada una de las ecuaciones de forma que las incógnitas pasen al lado derecho del signo igual:

$$0 = -\bar{I}_3 + \bar{I}_4 + \bar{I}_5 \tag{20a}$$

$$0 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \bar{I}_6 \tag{20b}$$

$$0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \tag{20c}$$

$$12j = \bar{I}_1 (-1 - j) + \bar{I}_2 (2j) \tag{20d}$$

$$-4 - 12j = \bar{I}_2 (-2j) + \bar{I}_3\, 2 \tag{20e}$$

$$4 + 4j = \bar{I}_5\, j \tag{20f}$$

De la última de las ecuaciones y considerando la propiedad (12d) se puede despejar $\bar{I}_5$:

$$\bar{I}_5 = \frac{4 + 4j}{j} = \frac{4}{j} + \frac{4j}{j} = 4\left(\frac{1}{j}\right) + 4 = 4 - 4j \tag{21}$$

Es fácil percatarse de que las tres ecuaciones (20c), (20d) y (20e) sólo incluyen tres incógnitas: $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ e $\bar{I}_3$. Luego es posible obtener estas incógnitas manipulando estas tres ecuaciones. Despejando $\bar{I}_3$ de (20c) se llega a:

$$\bar{I}_3 = -\left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2\right) \tag{22}$$

Sustituyendo (22) en (20e) se deduce que:

$$-4 - 12j = \bar{I}_2 (-2j) - \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2\right) 2$$

$$-4 - 12j = \bar{I}_1 (-2) + \bar{I}_2 (-2 - 2j) \tag{23}$$

Simplificamos la ecuación (23) dividiendo por -2 a ambos lados del signo = . Se obtiene este resultado:

$$2 + 6j = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 (1 + j) \tag{24}$$

Ahora tenemos las dos ecuaciones (24) y (20d) que sólo incluyen las incógnitas $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ y que van a permitir calcularlas. Multiplicando ambos lados de la ecuación (24) por $(1 + j)$ y teniendo presente, además, la propiedad (12b) se llega a:

$$(2 + 6j) \cdot (1 + j) = \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (1 + j)^2$$

$$2 + 2j + 6j + 6j^2 = \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 \left(1^2 + j^2 + (2 \cdot 1 \cdot j)\right) = \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (1 - 1 + 2j)$$

$$-4 + 8j = \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (2j) \tag{25}$$

Seguidamente obtendremos $\bar{I}_2$ sumando la ecuación (20d) a la (25):

$$-4 + 20j = \bar{I}_2 (4j)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{-4 + 20j}{4j} = \left(\frac{-4 + 20j}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{j}\right) = (-1 + 5j) \cdot (-j) = j - 5j^2$$

$$\bar{I}_2 = 5 + j \qquad (26)$$

Despejamos $\bar{I}_1$ de (24) y utilizamos el valor de $\bar{I}_2$ obtenido en (26):

$$\bar{I}_1 = (2 + 6j) - \bar{I}_2 (1 + j) = (2 + 6j) - [(5 + j) \cdot (1 + j)]$$

$$\bar{I}_1 = (2 + 6j) - (5 + 5j + j + j^2) = (2 + 6j) - (4 + 6j) = -2$$

$$\bar{I}_1 = -2 \qquad (27)$$

$\bar{I}_3$ se puede calcular sustituyendo en la expresión (22) los valores de $\bar{I}_1$ y de $\bar{I}_2$ que acabamos de obtener en (26) y en (27), respectivamente:

$$\bar{I}_3 = -(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = -[-2 + (5 + j)] = -[3 + j]$$

$$\bar{I}_3 = -3 - j \qquad (28)$$

$\bar{I}_4$ se puede obtener despejándola de la ecuación (20a) y utilizando los valores de $\bar{I}_3$ y de $\bar{I}_5$ calculados en (28) y en (21), respectivamente:

$$\bar{I}_4 = \bar{I}_3 - \bar{I}_5 = (-3 - j) - (4 - 4j) = -7 + 3j \qquad (29)$$

Finalmente, $\bar{I}_6$ se determina despejándola de la ecuación (20b) y utilizando los valores de $\bar{I}_4$ y de $\bar{I}_5$ que se han calculado en (29) y en (21), respectivamente:

$$\bar{I}_6 = -(\bar{I}_4 + \bar{I}_5) = -[(-7 + 3j) + (4 - 4j)] = -[-3 - j]$$

$$\bar{I}_6 = 3 + j \qquad (30)$$

Por lo tanto, <u>las corrientes de rama de este circuito tienen estos valores</u>:

$$\bar{I}_1 = -2 + 0j\ \text{A}\ ; \qquad \bar{I}_2 = 5 + j\ \text{A}\ ; \qquad \bar{I}_3 = -3 - j\ \text{A}$$

$$\bar{I}_4 = -7 + 3j\ \text{A}\ ; \qquad \bar{I}_5 = 4 - 4j\ \text{A}\ ; \qquad \bar{I}_6 = 3 + j\ \text{A}$$