



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA



MATERIALES Y **CIRCUITOS MAGNÉTICOS**

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta
Doctor Ingeniero Industrial

MATERIALES Y CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

MATERIALES MAGNÉTICOS

Un **campo magnético** es una zona del espacio que tiene la propiedad de que si se coloca una carga eléctrica en movimiento en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza. Este campo vectorial se caracteriza por la magnitud **inducción magnética** \vec{B} que en el Sistema Internacional se mide en Teslas (T).

Un campo magnético puede ser originado por la presencia de otras cargas eléctricas en movimiento y también por la existencia de campos eléctricos variables en el tiempo. Al analizar las máquinas eléctricas nos referiremos exclusivamente a campos magnéticos creados sólo por cargas en movimiento, que normalmente van consistir en corrientes eléctricas circulando por conductores.

Las **líneas de inducción magnética** son líneas cerradas que son tangentes en cada uno de sus puntos al vector inducción magnética \vec{B} . La concentración de líneas de inducción en una zona del espacio es proporcional al valor de la inducción magnética en dicha zona.

Supongamos una zona del espacio donde no hay ningún medio material; es decir, estamos en el vacío. En esta zona existen cargas en movimiento y/o campos eléctricos variables que crean un campo magnético cuya inducción \vec{B} se puede calcular así:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (0)$$

En esta expresión la **excitación magnética o intensidad magnetizante** \vec{H} es una magnitud que depende del valor de las causas que crean el campo magnético (corrientes y variaciones del campo eléctrico) y de su geometría, es independiente de las características del medio y en el Sistema Internacional se mide en Amperios/metro (A/m). Por otra parte, μ_0 es la **permeabilidad magnética del vacío**, que en el Sistema Internacional vale $4\pi \cdot 10^{-7}$ Henrios/metro (H/m).

Supongamos que ahora esta zona del espacio se rellena con un medio material manteniendo inalterables las causas del campo magnético y, por consiguiente, se conserva el valor de la intensidad magnetizante \vec{H} . Cada átomo de este medio material tiene electrones que giran sobre sí mismos y que recorren orbitas cerradas alrededor del núcleo. Estos movimientos de estas partículas cargadas originan efectos magnéticos que inicialmente están distribuidos al azar y se cancelan entre sí. Sin embargo, bajo la acción de un campo magnético externo los movimientos de los electrones se modifican y dan lugar a un efecto magnético resultante no nulo que modifica la inducción magnética \vec{B} con respecto a la que se obtendría en vacío. Este efecto magnético del medio material se cuantifica mediante la magnitud **magnetización o imanación** \vec{M} , de tal manera que ahora se cumple que

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1)$$

En un medio homogéneo e isótropo se verifica lo siguiente:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = [\mu_0 (1 + \chi_m)] \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2)$$

En la expresión anterior la **permeabilidad magnética absoluta** μ es un parámetro que representa la influencia de las propiedades magnéticas del medio sobre la inducción \vec{B} y que se puede expresar así:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m)$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (3)$$

En estas relaciones μ_r es un parámetro adimensional denominado **permeabilidad relativa** y χ_m es otro parámetro adimensional denominado **susceptibilidad magnética** que representa el efecto adicional de los electrones del medio material sobre la inducción magnética \vec{B} .

En los medios lineales los parámetros μ , μ_r y χ_m son constantes, mientras que en los medios no lineales estos parámetros son funciones de \vec{H} (y, por consiguiente, de \vec{B}).

Los materiales se pueden comportar de diferente manera frente a la acción de un campo magnético externo dando lugar a diferentes valores de μ , μ_r y de χ_m . Esto permite clasificar el comportamiento magnético de los materiales según el valor de estos parámetros. Así, tendremos materiales *diamagnéticos*, *paramagnéticos* y *ferromagnéticos* (Tabla I). Los materiales diamagnéticos y paramagnéticos se engloban en la denominación de materiales *amagnéticos*.

Tabla I: Clasificación de los materiales magnéticos

Tipos de material		μ	μ_r	χ_m
<i>Amagnéticos</i>	<i>Diamagnéticos</i>	$\mu \approx \mu_0$	$\mu_r \approx 1$	del orden de -10^{-5}
	<i>Paramagnéticos</i>			del orden de $+10^{-3}$
<i>Ferromagnéticos</i>		$\mu \gg \mu_0$	$\mu_r \gg \gg 1$	de valor muy alto (entre 10^3 y 10^5)

Materiales diamagnéticos

En estos materiales cuando no hay campo magnético externo los efectos magnéticos de los electrones de cada átomo se anulan entre sí dando, pues, una resultante nula. Por lo tanto, inicialmente cada átomo es magnéticamente neutro. Al aplicar un campo magnético externo aparecen fuerzas sobre los electrones que modifican sus órbitas de forma que ahora dan un efecto resultante no nulo y de sentido opuesto al del campo magnético externo (luego, su susceptibilidad magnética χ_m es negativa). Ejemplos de estos materiales son: el bismuto, el oro, la plata y el cobre.

La permeabilidad magnética μ de uno de estos materiales es inferior a la del vacío μ_0 , pero la diferencia con respecto a esta es tan pequeña (χ_m es del orden de -10^{-5}) que se puede tomar de valor prácticamente igual a la del vacío. En consecuencia, la permeabilidad relativa μ_r de estos materiales es prácticamente igual a 1.

Materiales paramagnéticos

En estos materiales los efectos magnéticos de los electrones de cada átomo no se anulan entre sí y, en consecuencia, tanto los átomos como las moléculas tienen un efecto magnético neto. Sin embargo, si no hay campo magnético externo las moléculas se distribuyen al azar y sus efectos magnéticos se anulan entre sí, por lo que el material se muestra magnéticamente neutro.

Al aplicar un campo magnético externo aparecen fuerzas sobre las moléculas que tiende a orientarlas a favor del campo externo, de forma que ahora dan un efecto resultante no nulo y del mismo sentido que el del campo magnético externo (luego, su susceptibilidad magnética χ_m es positiva). Ejemplos de estos materiales son: el aluminio, el titanio y el magnesio.

A diferencia del diamagnetismo, que no depende de la temperatura, el paramagnetismo es inversamente proporcional a la temperatura. En efecto, las fuerzas magnéticas sobre las moléculas se ven reducidas cuando crece la agitación de las mismas al aumentar la temperatura.

La permeabilidad magnética μ de uno de estos materiales es superior a la del vacío μ_0 , pero la diferencia con respecto a esta es tan pequeña (χ_m es del orden de $+10^{-3}$) que se puede tomar de valor prácticamente igual a la del vacío.

Los materiales diamagnéticos y los materiales paramagnéticos se engloban bajo la denominación de *materiales amagnéticos*, en los que la permeabilidad magnética μ prácticamente es igual a la del vacío μ_0 . Por lo tanto, la permeabilidad relativa μ_r de estos materiales es prácticamente igual a 1.

Materiales ferromagnéticos

En estos materiales, debido a una serie de fenómenos cuánticos, los átomos próximos entre sí tienen sus efectos magnéticos alineados y constituyen un pequeño imán, denominado *dominio magnético*, en el que los efectos magnéticos de todos sus átomos se suman. Un dominio contiene entre 10^9 y 10^{15} átomos. Si no hay campo magnético externo, los dominios magnéticos del material se distribuyen al azar y éste se muestra magnéticamente neutro.

Al aplicar un campo magnético externo, los dominios del material ferromagnético se orientan de forma que suman sus efectos a los del campo exterior; en consecuencia, dan un efecto resultante no nulo y del mismo sentido que el del campo magnético externo. Este efecto es muy notable y aumenta en varios órdenes de magnitud la inducción magnética \vec{B} con respecto a la que se obtendría en vacío. Cuando desaparece el campo externo, algunos dominios siguen con la orientación que les impuso dicho campo externo y no vuelven a su

posición de partida. Entonces, el material genera un campo magnético neto por sí mismo (en ausencia de campo exterior) y tenemos, pues, un imán permanente.

Los materiales ferromagnéticos más habituales son: el hierro, el cobalto y el níquel.

El ferromagnetismo depende de la temperatura. Hay una temperatura, la **temperatura de Curie**, por encima de la cual el material deja de ser ferromagnético y se convierte en paramagnético. La temperatura de Curie para el hierro es de 770°C.

La permeabilidad magnética μ de estos materiales es muy superior a la del vacío μ_0 , tomando su permeabilidad relativa μ_r normalmente valores entre 2000 y 10000, aunque en algunas aleaciones puede alcanzar valores de 100000. Como se estudiará en los siguientes apartados, el comportamiento magnético de estos materiales no es lineal, por lo que su permeabilidad magnética μ no es constante y depende del valor de la intensidad magnetizante \vec{H} y de la historia previa del material.

La elevada permeabilidad magnética de estos materiales hace que se utilicen profusamente en los dispositivos -como las máquinas eléctricas- donde se requiera de un campo magnético intenso. Los materiales ferromagnéticos más empleados son el hierro y sus aleaciones.

CURVA DE IMANACIÓN

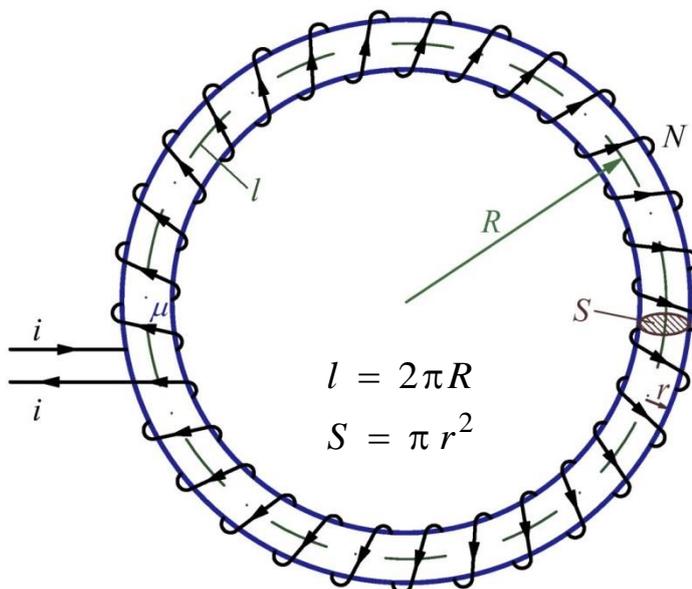


Fig. 1: Circuito magnético elemental

Supongamos una pieza -como la representada en la Fig. 1- en forma de toro y recubierta uniformemente por una bobina de N espiras en serie recorridas por la corriente i . Dada la simetría circular de la pieza, cualquier sección S del toro tiene el mismo campo magnético. Como, además, suponemos que el radio R de la circunferencia media del toro -cuya longitud es l - es mucho más grande que el radio r de la sección S del toro se puede aceptar que en la sección S la inducción magnética B es prácticamente uniforme. En efecto, por simetría, el campo sólo variará según la dirección radial, pero apenas hay variación de la distancia según dicha dirección, pues

$$R \gg r \rightarrow R + r \approx R - r \approx R$$

En resumen, en el interior de este toro tanto la inducción magnética \vec{B} como la intensidad magnetizante \vec{H} tienen el mismo valor en todos sus puntos y ambas tienen dirección tangencial. Aplicando el Teorema de Ampère a lo largo de la línea media l del toro se deduce que

$$\mathcal{F} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_l H \cdot dl = H \cdot l = N \cdot i \rightarrow H = \frac{N}{l} i \quad (4)$$

(\bullet = Producto escalar de vectores)

Es decir, que el valor H de la intensidad magnetizante depende linealmente de la corriente i de la bobina y se puede controlar H mediante i .

Supongamos también que el toro nunca había sido magnetizado anteriormente y que se va aumentando la corriente i progresivamente a partir de cero; lo que, según la relación (4), da lugar a que el valor H de la excitación también vaya aumentando desde cero. La **curva de imanación, de magnetización o de saturación** (Fig. 2) del material con que está construido el toro es una curva que representa la variación del valor B de la inducción magnética en función del valor H de la excitación o intensidad magnetizante.

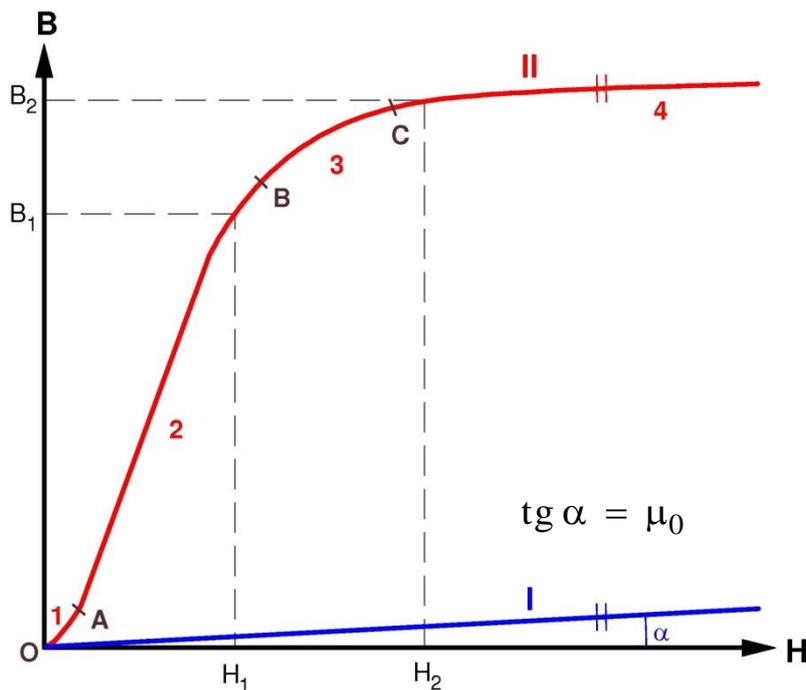


Fig. 2: Curvas de magnetización de un material amagnético I y de un material ferromagnético II.

Si el material con que está construido el toro es amagnético su permeabilidad magnética μ es constante y es prácticamente igual a la de vacío μ_0 . Por consiguiente, de acuerdo con la expresión (2), la relación entre B y H es lineal y la curva de magnetización es una recta cuya pendiente es μ_0 . Esta recta es la curva I de la Fig. 2, en la que se verifica que $\text{tg } \alpha = \mu_0$.

Si el material con que está construido el toro es ferromagnético la curva de magnetización no es recta y tiene la forma de la curva II de la Fig. 2. En esta curva se pueden distinguir varias zonas:

- **Zona parabólica:** Esta zona es muy pequeña, tiene forma parabólica y es la señalada como 1 (comprendida entre los puntos O y A) en la Fig. 2. Al empezar a magnetizar el material ferromagnético, aquellos dominios que inicialmente ya estaban orientados a favor del campo magnético externo empiezan a crecer a costa de los dominios próximos que no estaban orientados favorablemente. Esto refuerza el campo magnético de forma que la inducción B toma valores superiores a los que tendría en el vacío. Este fenómeno es reversible y si, antes de superar el punto A, desaparece la excitación H los dominios vuelven a su estado inicial.
- **Zona lineal:** Esta zona es recta y está señalada como 2 (comprendida entre los puntos A y B) en la Fig. 2. Si a partir del punto A se sigue aumentando la excitación H los dominios orientados a favor del campo exterior continúan aumentando su tamaño, pero su crecimiento no es totalmente reversible. Muchas veces se desprecia la zona parabólica y se acepta que entre los puntos O y B la inducción aumenta linealmente con la excitación H y la permeabilidad magnética μ es constante con un valor muy superior a la de vacío μ_0 .
- **Codo:** Esta zona es curva y está señalada como 3 (comprendida entre los puntos B y C) en la Fig. 2. Si a partir del punto B se sigue aumentando la excitación H, además de que los dominios orientados a favor del campo exterior continúan aumentando su tamaño, se producen rotaciones bruscas de los demás dominios para orientarse a favor del campo magnético externo. Las rotaciones de los dominios son irreversibles y permanecen aunque se anule el valor de la intensidad magnetizante H.
- **Zona saturada:** Esta zona es lineal y está señalada como 4 (a partir del punto C) en la Fig. 2. En esta zona el material ferromagnético se ha saturado, pues a partir del punto C todos sus dominios están orientados a favor del campo magnético exterior y el material es incapaz de añadir más magnetización adicional al campo externo. Por lo tanto, el aumento de la inducción B en esta zona es similar a la que sucede en vacío (o en un material amagnético (curva I)) y por esta razón esta zona de la curva es igual a una recta paralela a la línea I.

Dado que la curva de magnetización de un material ferromagnético no es lineal, sucede que la permeabilidad magnética μ -igual al cociente entre B y H- no es constante y varía en función de H. Sólo para valores pequeños de la excitación H, cuando aún no se ha superado el punto B y el material todavía está en la zona lineal, la permeabilidad magnética permanece constante. Pero, a partir de dicho punto B la inducción magnética aumenta cada vez más lentamente con H y la permeabilidad magnética μ va disminuyendo a medida que aumenta la intensidad magnetizante H. En la Fig. 2 se puede apreciar esta no linealidad de la curva de magnetización observando como para una excitación H_2 , ya dentro de la zona saturada, de doble valor que H_1 se obtiene una inducción B_2 apreciablemente menor que el doble de B_1 .

HISTÉRESIS MAGNÉTICA

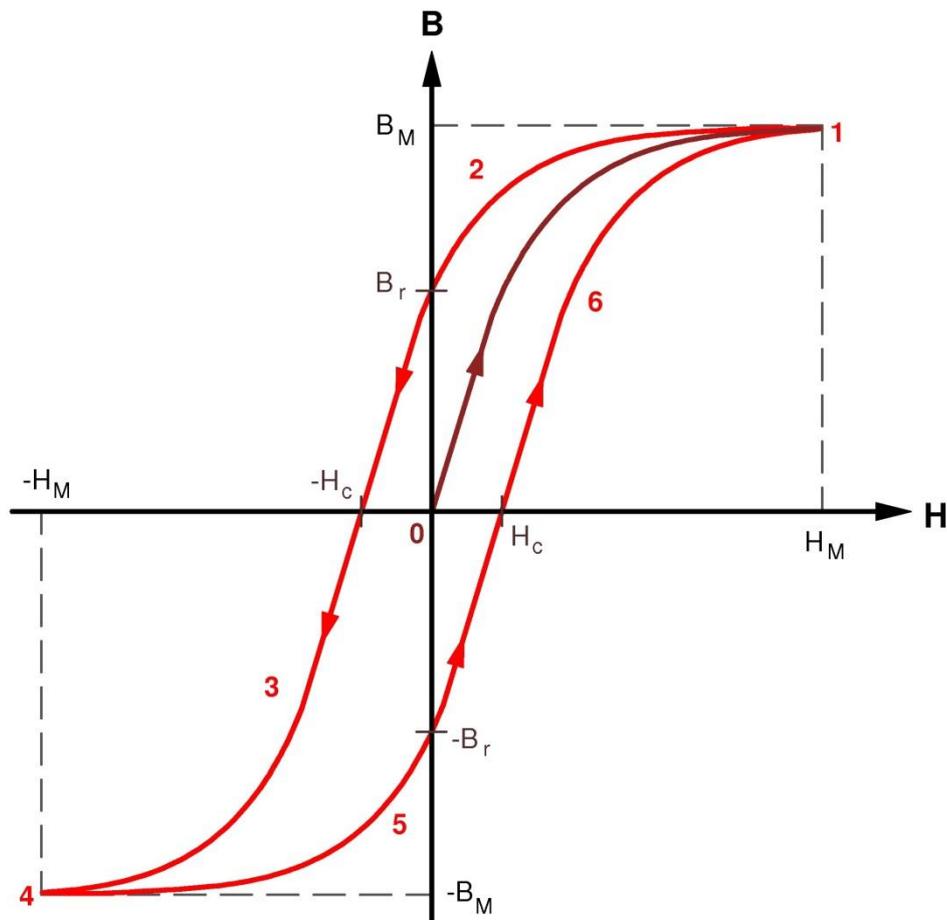


Fig. 3: Ciclo de histéresis de un material ferromagnético

Supongamos ahora que en el toro de la Fig. 1 la corriente i que circula por la bobina varía de forma cíclica entre los valores I_M y $-I_M$, lo que da lugar a que la excitación magnética varíe entre H_M y $-H_M$. Si el material nunca había estado magnetizado con anterioridad, inicialmente -mientras la excitación aumenta su valor de 0 a H_M - su comportamiento está reflejado por la curva 0-1 de la Fig. 3 que es similar a la curva de imanación II de la Fig. 2. En el punto 1 tanto la intensidad magnetizante H como la inducción magnética B alcanzan sus máximos valores, H_M y B_M , respectivamente.

Una vez que la excitación H ha alcanzado su máximo valor H_M en el punto 1 y empieza a disminuir, resulta que los dominios -que habían ido aumentando de tamaño y orientándose a favor del campo magnético exterior en el tramo 0-1- les cuesta abandonar este nuevo estado, por lo que al disminuir la excitación H el material muestra una inducción B mayor que en el tramo 0-1 y ahora sigue la curva 2 de la Fig. 3. En el momento que la intensidad magnetizante H se anula, algunos dominios todavía conservan su orientación favorable al campo que había habido anteriormente y aparece una inducción B_r denominada **magnetismo o inducción remanente**. Para anular este magnetismo remanente es preciso introducir una excitación de signo negativo, cuyo módulo H_c se llama **campo coercitivo**.

Si ahora variamos la excitación desde $-H_c$ hasta $-H_M$, es decir, aumentando el valor de H en sentido negativo, los dominios siguen manteniendo su querencia por seguir la orientación positiva que habían tenido anteriormente y les cuesta orientarse en sentido negativo. Por lo tanto, el material evoluciona siguiendo la curva 3 de la Fig. 3 hasta llegar al punto 4, simétrico del punto 1, donde la excitación vale $-H_M$ y la inducción vale $-B_M$.

Seguidamente, se disminuye el valor de la intensidad magnetizante H en sentido negativo, pero los dominios quieren conservar su orientación negativa que habían adquirido en la curva 3. Esto hace que ahora la inducción magnética B tome valores inferiores a los de la curva 3 y el material siga la curva 5. En el momento que la intensidad magnetizante se anula, algunos dominios todavía conservan su orientación negativa y aparece una inducción remanente $-B_r$, del mismo valor absoluto y signo opuesto que la correspondiente de la curva 2. Para anular esta inducción remanente negativa es preciso introducir un campo coercitivo positivo H_c , del mismo valor absoluto y signo contrario al que inicia la curva 3.

Si ahora variamos la excitación desde H_c hasta H_M , es decir, aumentando el valor de H en sentido positivo, los dominios quieren mantener la orientación negativa que habían tenido anteriormente y les cuesta orientarse en sentido positivo. Así pues, el material evoluciona siguiendo la curva 6 de la Fig. 3 y llegará otra vez al punto 1.

Una vez que la excitación H ha alcanzado su máximo valor H_M en el punto 1 y empieza a disminuir, el material vuelve a seguir la curva 2 y se repite otra vez todo el proceso descrito anteriormente.

En resumen, durante la primera magnetización el material sigue la curva 0-1, pero después, a medida que la intensidad magnetizante varía periódicamente entre H_M y $-H_M$, el material describe una y otra vez el ciclo 1-2-3-4-5-6-1 de la Fig. 3. Este fenómeno se denomina **histéresis magnética** y el ciclo de la Fig. 3 es el **ciclo de histéresis** de un material ferromagnético.

La histéresis hace que el valor de la inducción B correspondiente a una excitación H no sea único, sino que dependa de los estados magnéticos que ha tenido anteriormente.

Los materiales ferromagnéticos con mucha histéresis se denominan **duros** y los que tienen poca histéresis se denominan **blandos** o **dulces**. Los materiales ferromagnéticos duros, con un magnetismo remanente B_r elevado y que son capaces de mantenerlo porque su campo coercitivo H_c es alto, permiten la fabricación de imanes permanentes. Los materiales ferromagnéticos blandos tienen mayor permeabilidad y se usan para canalizar el flujo en los circuitos magnéticos que se describirán en el siguiente apartado de este texto.

El fenómeno de histéresis se produce siempre que haya variaciones de la excitación magnética H , aunque no sea entre dos valores simétricos $+H_M$ y $-H_M$ suficientemente altos como para llevar el material a la saturación, que es el caso estudiado hasta ahora y al que se refiere la Fig. 3. La variación de la excitación magnética entre dos valores H_1 y H_2 -de menor valor absoluto que H_M - provoca la aparición de un ciclo de histéresis local interno al ciclo principal de la Fig. 3.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Un conjunto de líneas de campo magnético que delimitan una superficie cerrada por cuyas paredes laterales no pasa ningún flujo y que por su interior conduce un flujo Φ constituyen un *circuito magnético*. Físicamente un circuito magnético se materializa en una canalización para las líneas de campo realizada íntegramente o en gran medida con material ferromagnético.

En efecto, la alta permeabilidad μ de los materiales ferromagnéticos hace que las líneas de campo circulen preferentemente por dichos materiales y esto permite canalizar el flujo magnético a través de ellos.

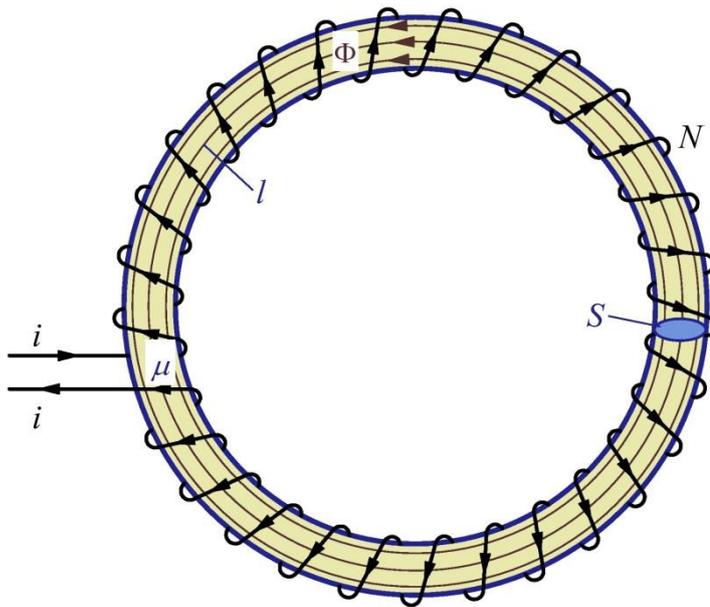


Fig. 4: Circuito magnético en forma de toro

Consideremos el circuito magnético en forma de toro, que ya se representó en la Fig. 1, cuyas líneas de campo en su interior son circunferencias concéntricas, como se aprecia en la Fig. 4. Como ya se indicó en el apartado dedicado a la curva de imanación, la inducción B es prácticamente constante en todos los puntos del toro y está relacionada con la excitación H por medio de la permeabilidad μ (ecuación (2)). Además, al aplicar el Teorema de Ampère sobre la circunferencia media, cuya longitud es l , se obtiene la relación (4). A partir de todo esto se deduce que:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B \cdot dS = B \cdot S \rightarrow B = \frac{\Phi}{S}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \rightarrow B = \mu H \rightarrow H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S}$$

$$\mathcal{F} = N \cdot i = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_l H \cdot dl = H \cdot l = \frac{l}{\mu S} \Phi \rightarrow \mathcal{F} = H \cdot l = \mathcal{R} \cdot \Phi \quad (5a)$$

Por lo tanto, se deduce que en los circuitos magnéticos se cumple la **Ley de Hopkinson**

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \Phi \quad (5b)$$

Donde \mathcal{F} es la *fuerza magnetomotriz* (f.m.m.) y \mathcal{R} es la *reluctancia* del circuito magnético.

Si, como sucede en el toro de las Figs. 1 y 4, el circuito magnético presenta una sección uniforme S , tiene una longitud media l y está construido por un material homogéneo de permeabilidad magnética absoluta μ , su reluctancia \mathcal{R} se calcula así:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \quad (6)$$

La fuerza magnetomotriz \mathcal{F} del circuito magnético de la Fig. 4 vale

$$\mathcal{F} = N \cdot i \quad (7)$$

Donde N es el número de espiras de la bobina e i es la corriente que circula por ella (Figs. 1 y 4).

Se denomina *permeancia* Λ a la inversa de la reluctancia. Luego, de las expresiones anteriores se deduce que

$$\Lambda = \frac{1}{\mathcal{R}} = \mu \frac{S}{l} \quad (8)$$

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi}{\Lambda} \rightarrow \Phi = \mathcal{F} \cdot \Lambda$$

En el Sistema Internacional \mathcal{F} se mide en Amperios (A) o Amperios-vuelta (Av), Φ en Webers (Wb), Λ en Henrios (H) y \mathcal{R} en Henrios⁻¹ (H⁻¹).

El hecho de que la permeabilidad μ de los materiales ferromagnéticos no sea constante hace que la reluctancia \mathcal{R} de las piezas fabricadas con estos materiales tampoco lo sea, sino que dependa del flujo magnético que la atraviesa (y de su historia previa, a no ser que se desprecie el fenómeno de la histéresis magnética). Por lo tanto, la aplicación de la Ley de Hopkinson (5b) requiere de un proceso iterativo en el que se parte de un valor supuesto para μ , se calcula mediante (6) la reluctancia \mathcal{R} correspondiente y se determinan el flujo Φ mediante (5b) y la inducción B por cociente del flujo Φ entre la sección S . Seguidamente se obtiene el valor de la permeabilidad μ que corresponde a dicha inducción y se vuelve a iniciar el cálculo con este nuevo valor de μ . Y así sucesivamente hasta que en un paso de la iteración el valor final y el supuesto inicialmente para μ difieran en menos de un error preestablecido.

Si en su recorrido las líneas de campo de un circuito magnético se encuentran con zonas de diferentes propiedades magnéticas y/o geometría (circuito magnético *serie*), la reluctancia total del circuito magnético se puede descomponer en las reluctancias parciales de estas zonas, de forma que la reluctancia total es igual a la suma de las reluctancias parciales (Fig. 5).

Muchas veces las líneas de inducción cerradas que definen un circuito magnético, el cual encierra un flujo total, se pueden agrupar formando circuitos magnéticos parciales. Cada uno de estos circuitos parciales tiene un recorrido cerrado, utiliza una parte de las líneas de campo totales y conduce sólo una parte del flujo total, de forma que la suma de los flujos de todos los circuitos magnéticos parciales es igual al flujo total. En este caso los circuitos parciales están en paralelo y la permeancia total es igual a la suma de las permeancias de los circuitos magnéticos parciales (Fig. 6).

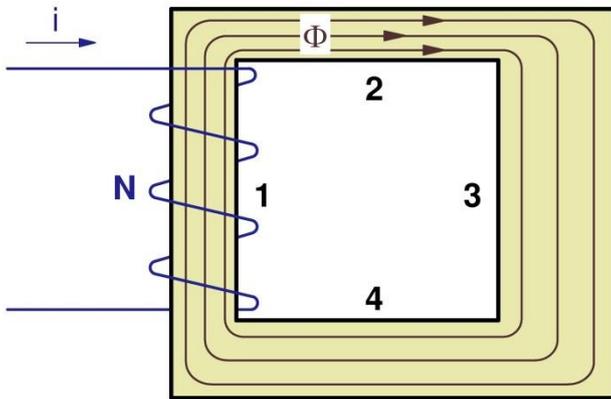


Fig. 5: Circuito magnético con una ventana compuesta de cuatro ramas en serie (1, 2, 3 y 4).

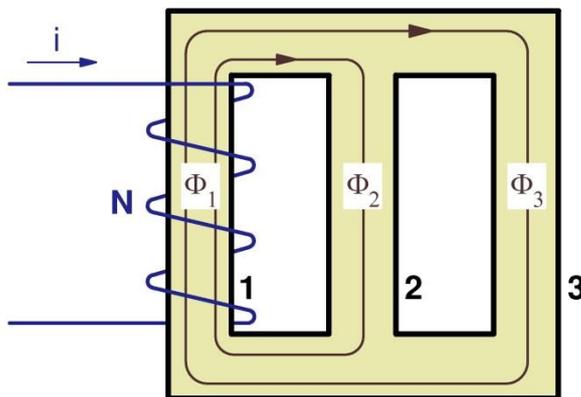


Fig. 6: Circuito magnético con dos ventanas. Las ramas 2 y 3 están en paralelo de forma que el flujo de la rama 1 (el flujo total) se descompone en los de las ramas 2 y 3.

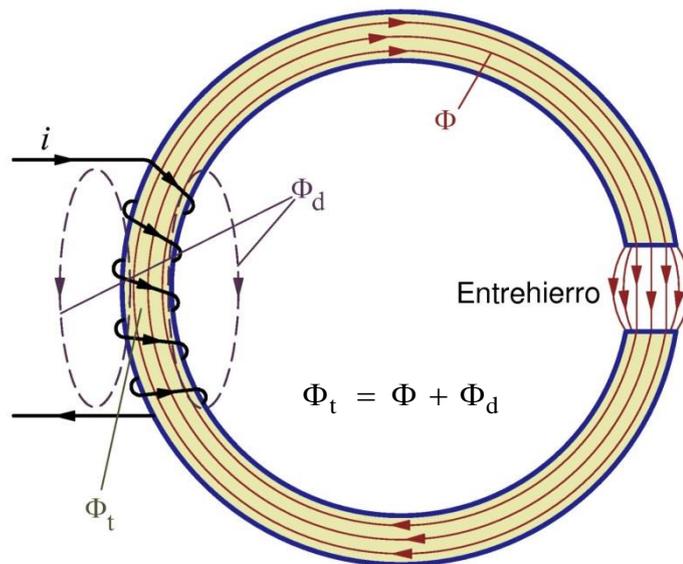


Fig. 7: Circuito magnético con un entrehierro en el que se muestran el flujo total Φ_t , el flujo útil Φ y el flujo de dispersión Φ_d .

Aunque la elevada permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos hace que la mayor parte de las líneas de campo queden conducidas por los circuitos magnéticos realizados con dichos materiales, el aire y, en general, los materiales amagnéticos no actúan de “aislantes magnéticos” y una pequeña parte de las líneas de inducción se “escapan” del circuito magnético y circulan por fuera de él. Por lo tanto, además del *flujo útil*, que es el que se ha representado en la Fig. 4 y que denominaremos Φ (en algunos textos este flujo se representa también por Φ_u), existe un flujo asociado a las líneas de campo que se escapan del circuito magnético, el cual se denomina *flujo de dispersión o de fugas* Φ_d (en muchos textos este flujo se representa también por Φ_σ o por Φ_l). Estos dos flujos se han representado en la Fig. 7 y, evidentemente, el *flujo total* Φ_t originado por las bobinas del circuito magnético es la suma de ambos:

$$\Phi_t = \Phi + \Phi_d \quad (9)$$

El *coeficiente de dispersión o de Hopkinson* ν es un parámetro que toma valores comprendidos entre 1,1 y 1,3 y que se define mediante esta relación:

$$\nu = \frac{\Phi_t}{\Phi} = \frac{\Phi + \Phi_d}{\Phi} = 1 + \frac{\Phi_d}{\Phi}$$

$$\Phi_t = \nu \Phi \quad (10)$$

Como se muestra en la Fig. 7 hay veces que es preciso incluir una pequeña parte de material amagnético dentro de un circuito magnético, la cual se denomina *entrehierro*. Normalmente los entrehierros están formados por aire. Las líneas de campo en su paso por un entrehierro sufren una expansión (Fig. 7) que aumenta la sección a través de la cual circula el flujo magnético. En este texto, salvo que se indique lo contrario, se despreciará esta expansión y se supondrá que la sección por la que pasa el flujo en el entrehierro es la misma que en el material ferromagnético.

El circuito magnético de la Fig. 7 es un circuito magnético serie, pues en él están en serie el entrehierro y el resto del circuito que está fabricado con material ferromagnético. Por lo tanto, la reluctancia total del circuito magnético es la suma de las reluctancias del entrehierro y de la parte de material ferromagnético. Dado que la permeabilidad de los materiales ferromagnéticos es mucho mayor que la de los materiales amagnéticos, a poca longitud que tenga el entrehierro (ver la relación (6)) su reluctancia es mucho mayor que la del material ferromagnético y es preponderante. Por este motivo, en una primera aproximación se suele despreciar la reluctancia de las piezas de material ferromagnético y analizar estos circuitos magnéticos empleando solamente la reluctancia de los entrehierros.

PÉRDIDAS MAGNÉTICAS

Introducción

Cuando un material ferromagnético se ve sometido a la acción de un campo variable en el tiempo, en su interior se producen unos fenómenos físicos que conllevan un gasto de energía que finalmente se acaba convirtiendo en calor. La potencia correspondiente a dicha energía es lo que se denomina *pérdidas magnéticas*.

En un circuito magnético, como el representado en la Fig. 4, la potencia que se disipa en el material ferromagnético no puede salir de la nada, debe tener un origen. En este caso, esta energía debe ser suministrada por la red eléctrica que alimenta a la/s bobina/s del circuito magnético y que originan un campo variable en el tiempo.

En las máquinas eléctricas es muy frecuente que la variación temporal de la excitación magnética no se deba a que el campo magnético que tiene la máquina sea variable, sino a que la pieza de material ferromagnético está girando y en su movimiento pasa sucesivamente frente polos magnéticos de signo contrario. Esto hace que la pieza ferromagnética en su movimiento se vea sometida a una excitación variable. En este caso la potencia que se va a disipar en forma de pérdidas magnéticas procede de la potencia mecánica introducida por el eje de la máquina, la cual hace girar a la pieza ferromagnética.

Es preciso insistir que las pérdidas magnéticas sólo existen cuando el material ferromagnético “ve” variar en el tiempo al campo que la afecta. Cuando la pieza está sometida a la acción de un campo magnético constante, dichas pérdidas no se producen.

Las pérdidas magnéticas son debidas al fenómeno de la histéresis y a las corrientes parásitas o corrientes de Foucault.

Pérdidas por histéresis

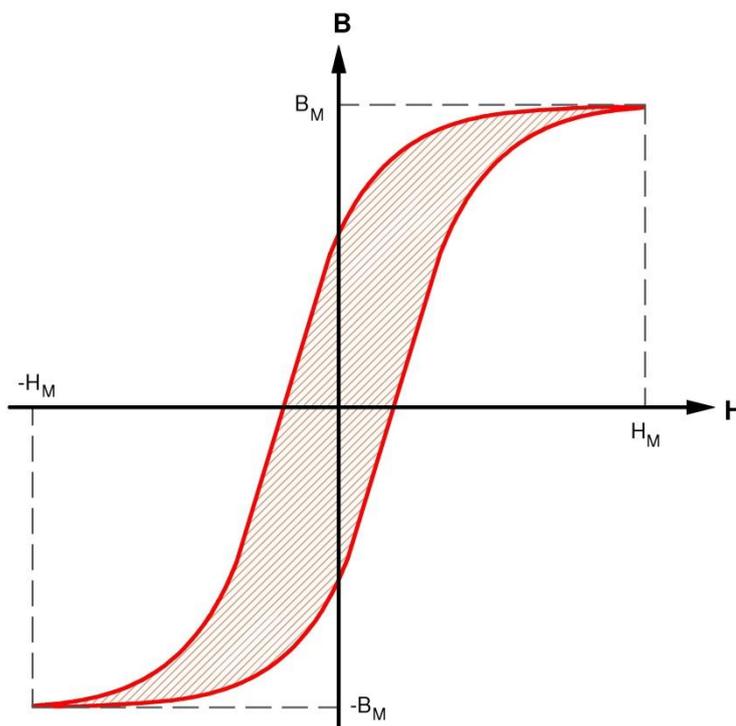


Fig. 8: Las pérdidas por histéresis son proporcionales al área encerrada dentro del ciclo de histéresis

Los cambios de tamaño y las rotaciones de los dominios magnéticos que se producen continuamente en el interior de un material ferromagnético sometido a una excitación magnética variable conllevan el gasto de una energía debido al fenómeno de la histéresis magnética. Esta energía finalmente se acaba transformando en calor y se puede demostrar que su valor durante un ciclo y por unidad de volumen de material ferromagnético es igual al área encerrada dentro del ciclo de histéresis (Fig. 8).

Por consiguiente, si la excitación magnética está variando de forma periódica con un periodo de T segundos (s), lo que equivale a una frecuencia f de 1/T Hercios (Hz), la potencia perdida por histéresis en una pieza de material ferromagnético de volumen V_{Fe} vale

$$P_H = \frac{V_{Fe} \cdot \text{Área del ciclo}}{T} = V_{Fe} \cdot \text{Área del ciclo} \cdot f \quad (11)$$

Esta expresión no depende de la forma en como varía la excitación en el tiempo, sino sólo de su frecuencia, del volumen del material ferromagnético y de sus propiedades magnéticas (de las que depende el área de su ciclo de histéresis).

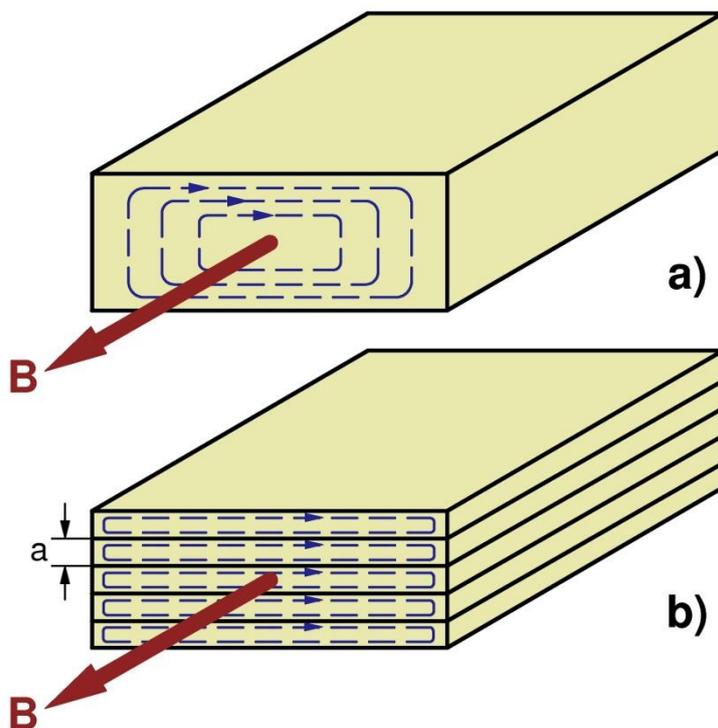
La **fórmula de Steinmetz** es una relación empírica que permite obtener las pérdidas por histéresis de una pieza de material ferromagnético:

$$P_H = V_{Fe} \cdot k_H \cdot B_M^\alpha \cdot f \quad (12)$$

El coeficiente de Steinmetz k_H y el exponente de Steinmetz α dependen del material ferromagnético y se obtienen experimentalmente. α toma valores entre 1,5 y 2,5, siendo 1,6 su valor más habitual. En el acero al silicio k_H toma valores entre 100 y 200.

Pérdidas por corrientes de Foucault

Los materiales ferromagnéticos son metales y, por consiguiente, son conductores eléctricos. Por lo tanto, cuando se ven sometidos a un flujo variable en el tiempo se inducen fuerzas electromotrices (f.e.m.s) en ellos que dan lugar a la circulación de corrientes por su interior (Fig. 9a). Estas corrientes inducidas en la masa del material ferromagnético se denominan **corrientes parásitas** o **corrientes de Foucault** (*eddy currents* en inglés).



*Fig. 9: Corrientes de Foucault inducidas en una pieza de material ferromagnético:
a) maciza
b) fabricada mediante chapas delgadas de espesor "a" y aisladas entre sí.*

El material ferromagnético presenta una resistencia eléctrica, por lo que la circulación de las corrientes de Foucault da lugar a unas pérdidas por efecto Joule (del tipo RI^2). Para reducir estas pérdidas se aumenta la resistencia que presentan las piezas de material ferromagnéticos construyéndolas no macizas, sino mediante el apilamiento de chapas delgadas, aisladas entre sí y colocadas de tal manera que su plano sea paralelo al campo magnético (Fig. 9b). Esto obliga a que las corrientes de Foucault deban hacer su recorrido a través de una sección muy estrecha de material y, por lo tanto, se encuentren con una resistencia alta que reduce el valor de dichas corrientes (nótese que, dado que estas pérdidas son del tipo RI^2 , el aumento de resistencia es menor que la disminución del cuadrado de la corriente y se consigue reducir las pérdidas).

Supongamos la situación representada en la Fig. 9b de un campo magnético variable atravesando un paquete de chapas de material ferromagnético y que la inducción magnética B varía de forma sinusoidal:

$$B = B_M \cos(\omega t) = B_M \cos(2\pi f t) \quad (13)$$

Se puede demostrar que las pérdidas por corrientes de Foucault se pueden calcular así:

$$P_F = V_{Fe} \cdot k_F \cdot a^2 \cdot \sigma \cdot B_M^2 \cdot f^2 \quad (14)$$

Las magnitudes que aparecen en la expresión anterior son:

- V_{Fe} Volumen del material ferromagnético
- k_F Coeficiente que para bajas frecuencias vale $\pi^2/6$
- a Espesor de las chapas de material ferromagnético
- σ Conductividad eléctrica (inversa de la resistividad) del material ferromagnético
- B_M Valor máximo de la inducción magnética (ver la relación (13))
- f Frecuencia de la variación de B (ver la relación (13))

Pérdidas magnéticas totales

Las *pérdidas magnéticas totales* o *pérdidas en el hierro* de una pieza de material ferromagnético es igual a la suma de las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault:

$$P_{Fe} = P_H + P_F = V_{Fe} \cdot (k_H B_M^\alpha f + k_F a^2 \sigma B_M^2 f^2) \quad (15)$$

Nótese que para una pieza ya construida -en la que, por lo tanto, están fijados los valores de V_{Fe} , k_H , α , k_F , a y σ - sucede que las pérdidas en el hierro P_{Fe} dependen sólo de la frecuencia f y del valor máximo B_M de la inducción magnética.

A efectos prácticos los fabricantes de chapas magnéticas dan una serie de gráficas donde se muestran las pérdidas magnéticas totales (sin separar las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault) por unidad de masa en función de B_M . Cada gráfica corresponde a un valor de frecuencia dado. En la Fig. 10 se muestran superpuestas las gráficas de chapas magnéticas laminadas en frío y en caliente para una frecuencia de 50 Hz (véase el siguiente apartado).

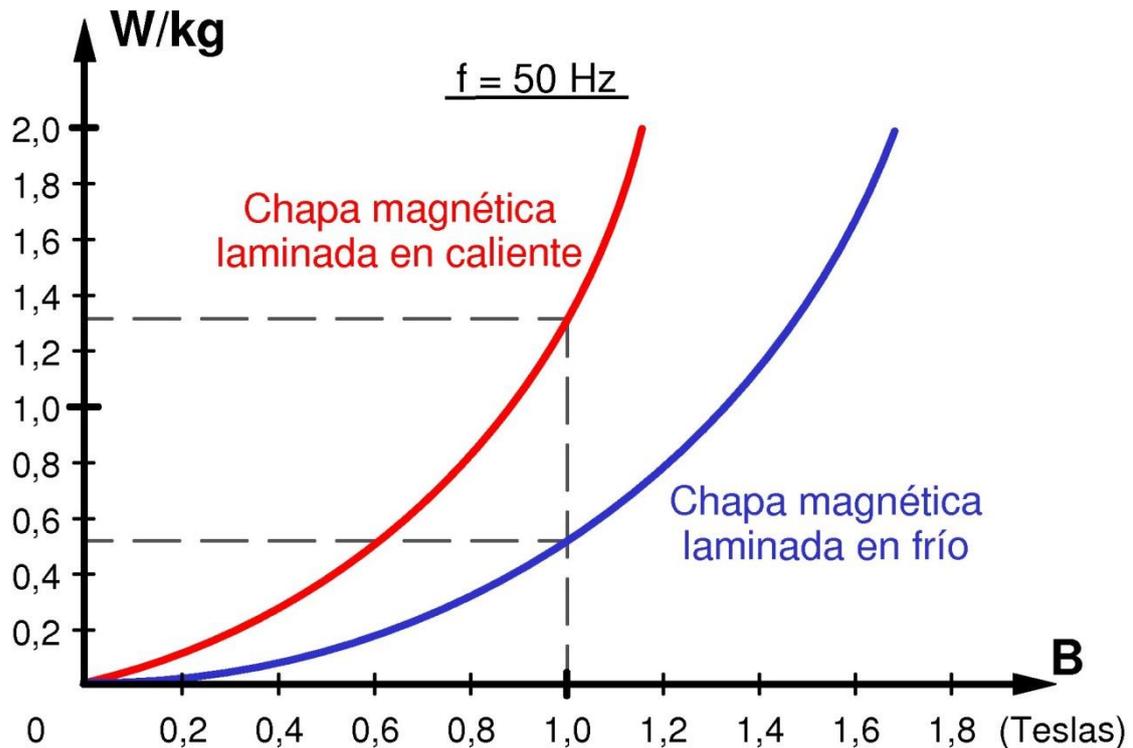


Fig. 10: Curvas de pérdidas en el hierro por unidad de masa a 50 Hz (la curva de chapa laminada en frío se refiere a las pérdidas magnéticas en la dirección del laminado)

Consecuencias prácticas

De todo lo que se ha ido estudiando en los párrafos anteriores se deduce que un circuito magnético donde haya variaciones en el campo magnético y, consecuentemente, aparezcan pérdidas en el hierro, se debe construir de esta manera:

- Se debe utilizar un material ferromagnético de la mayor permeabilidad μ posible y donde la saturación se produzca para el mayor valor posible de la inducción B. Así el flujo magnético circulará más fácilmente por él y, además, se necesitará un volumen menor de material V_{Fe} con la consiguiente reducción de las pérdidas magnéticas (ecuación (15)).
- El material usado debe tener un ciclo de histéresis lo más pequeño posible, luego debe ser un material magnéticamente blando. Así sucederá que el área encerrada dentro del ciclo será pequeña y se reducirán las pérdidas por histéresis P_H (ecuación (11)).
- El material empleado para construir el circuito magnético debe tener una baja conductividad eléctrica σ o, lo que es equivalente, una alta resistividad eléctrica. De esta manera se consigue reducir el valor de las pérdidas por corrientes de Foucault P_F (ecuación (14)).
- El circuito magnético no será macizo sino que se construirá apilando chapas de pequeños espesor, aisladas entre sí y colocadas de tal manera que su plano sea paralelo al campo magnético (Fig. 9b y ecuación (14)).

En la actualidad los circuitos magnéticos se construyen con chapas de acero al silicio (con un 3 a un 5% de silicio) de 0,3 a 0,5 mm de espesor. La adición de silicio al acero aumenta la resistividad eléctrica, lo que contribuye a reducir las pérdidas por corrientes de Foucault, y también mejora la permeabilidad magnética y reduce las pérdidas por histéresis. Sin embargo, el añadir silicio también tiene efectos negativos: reduce la inducción de saturación e introduce fragilidad al acero. Por esta última razón, nunca se supera un contenido de silicio del 5%; contenido que se reduce aún más cuanto más solicitada mecánicamente va a estar la chapa (máquinas rotativas).

Las cualidades magnéticas de las chapas de acero al silicio están influenciadas por el laminado y los tratamientos térmicos a que se ven sometidas durante su fabricación. En las *chapas laminadas en caliente* hay unas pérdidas a 50Hz y para 1 Tesla comprendidas entre 1,1 y 1,5 W/kg (Fig. 10). Modernamente se utilizan *chapas laminadas en frío* que presentan mayor permeabilidad y menores pérdidas magnéticas en la dirección de laminación, pues su valor suele estar comprendido entre 0,3 a 0,6 W/kg para 1 Tesla y 50 Hz (Fig. 10). La laminación en frío produce unas tensiones internas que se eliminan mediante un tratamiento posterior de recocido en atmósfera no oxidante.

La chapa obtenida por laminación en frío se le llama también de *grano orientado* y es *anisótropa*. Esto significa que sus propiedades no son iguales en todas las direcciones del espacio, pues en este tipo de chapa, si bien las propiedades magnéticas son muy buenas en la dirección del laminado, las propiedades en la dirección perpendicular al laminado son notablemente inferiores (las pérdidas en esta dirección son el triple de las correspondientes a la dirección del laminado). Por el contrario, las chapas laminadas en caliente son *isótropas* -lo que significa que tienen las mismas propiedades en todas las direcciones- y se les denomina también de *grano no orientado*.

Las chapas de grano orientado se usan fundamentalmente en transformadores y electroimanes, pues en ellos el circuito magnético se puede construir dividiéndolo en varias ramas donde prácticamente todo el flujo magnético sigue una sola dirección, la cual se hace coincidir con la del laminado de la chapa. En las máquinas rotativas las chapas se cortan en forma de corona circular y en ellas el campo magnético circula en diferentes direcciones, lo que hace desaconsejable el uso de chapas de grano orientado. En este caso se usan chapas de grano no orientado, ya que son isótropas.

El aislante que se coloca entre las chapas sirve para reducir las pérdidas por corrientes parásitas. Inicialmente este aislamiento se conseguía mediante de un papel fino y luego se utilizó un barniz. Hoy en día las chapas magnéticas se someten a un tratamiento químico especial, cuyo nombre comercial es "*Carlite*" y consiste en una fosfatación superficial, que produce un aislamiento de un espesor mucho más reducido que los métodos anteriores.

Un circuito magnético con pérdidas magnéticas se fabrica apilando chapas. Este apilamiento de chapas se sujeta mediante tornillos o remaches y hay que evitar que dichos elementos puenteen eléctricamente las chapas y circulen corrientes de Foucault por ellos. Por dicho motivo, estos elementos de unión deben estar rodeados de un material aislante para que no entren en contacto directo con las chapas magnéticas. Además, hay que evitar todo proceso de limado y desbaste de las chapas magnéticas una vez que se han apilado para formar un circuito magnético. En efecto, en las zonas limadas se establecen puntos de contacto entre chapas contiguas, lo que anula el aislamiento entre ellas y se produce un aumento local de las pérdidas por corrientes de Foucault.

HISTÉRESIS ROTATIVA

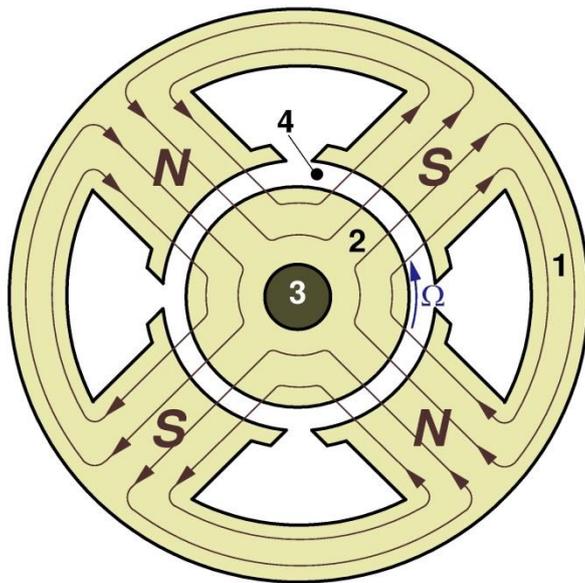


Fig. 11: Máquina de 4 polos donde el rotor gira en sentido antihorario a velocidad Ω dentro de un campo magnético que no varía en el tiempo.
 1: Estator
 2: Rotor
 3: Eje
 4: Entrehierro

En la Fig. 11 se muestra de forma esquemática una sección de una máquina rotativa de cuatro polos; es decir, de dos pares de polos Norte-Sur. En esta figura el *estator*, que permanece inmóvil, está señalado con un “1” y el *rotor* con un “2”. El rotor gira en sentido antihorario con una velocidad de Ω radianes/segundo alrededor del *eje* de la máquina “3”. El *entrehierro* de la máquina, marcado con un “4”, es el espacio de aire que separa el estator y el rotor y que evita que rocen entre sí.

Supongamos que por las bobinas del rotor no circula ninguna corriente y que por las bobinas del estator circula una corriente continua (en la Fig. 11 no se han dibujado las bobinas de la máquina). Entonces el campo magnético de la máquina, cuyas líneas de inducción se muestran en la Fig. 11, lo genera únicamente el estator donde hay cuatro polos que son alternativamente norte y sur. Asignemos de forma arbitraria signo positivo al campo magnético en el entrehierro cuando tiene sentido saliente hacia el estator; es decir, cuando corresponde a un polo sur del estator. Tenemos, pues, un campo que no varía en el tiempo (es debido a una corriente continua); pero que si nos movemos siguiendo la circunferencia del entrehierro observamos que el campo magnético va tomando diferentes valores e, incluso, va cambiando de signo. Así, el campo magnético será máximo, positivo o negativo, en el centro de los polos y tendrá valor nulo justo a la mitad del espacio de separación entre dos polos consecutivos. Por lo tanto, el campo es invariable en el tiempo pero variable en el espacio.

De todo lo anterior resulta evidente que un punto del núcleo magnético del rotor al irse moviendo con velocidad Ω va siendo sometido sucesivamente a la acción de polos norte y sur; esto es, va siendo magnetizado sucesivamente en sentido positivo y en sentido negativo. Esto hace que el rotor reciba una magnetización variable en el tiempo y aparezcan unas pérdidas en el hierro en él.

La potencia que se disipa por las pérdidas magnéticas o pérdidas en el hierro proviene de la potencia mecánica que se introduce en el eje de la máquina y que la hace girar con la velocidad Ω . Esta potencia, que la máquina absorbe por el rotor para luego gastarla en las pérdidas magnéticas, provoca un efecto de frenado y, por lo tanto, existe un par de frenado asociado a las pérdidas magnéticas originadas por rotación.

Centrémonos exclusivamente en las pérdidas por histéresis (no tenemos en cuenta ahora las pérdidas por corrientes parásitas) en el núcleo magnético del rotor de la máquina de la Fig. 11, cuyo volumen es V_{Fe2} . En una vuelta completa del rotor este describe dos ciclos de histéresis. En efecto, al avanzar un punto del rotor el trayecto correspondiente a dos polos (media vuelta en esta máquina de 4 polos) se ve sometido a un ciclo completo de magnetización positiva y negativa y, en consecuencia, describe un ciclo de histéresis por cada par de polos. En un caso general una máquina eléctrica tiene “p” pares de polos y en una vuelta completa un punto del rotor describe p veces el ciclo de histéresis. Luego, teniendo presente que la energía por unidad de volumen gastada en un ciclo de histéresis es igual al área encerrada por el ciclo (Fig. 8), la energía gastada por histéresis en el rotor durante una vuelta W_H vale:

$$W_H = V_{Fe2} \cdot p \cdot \text{Área del ciclo} \quad (16)$$

El tiempo que tarda el rotor en dar una vuelta completa es igual a $2\pi/\Omega$; luego la potencia disipada por la histéresis rotativa (pérdidas por histéresis) vale

$$P_H = \frac{W_H}{\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)} = \frac{W_H}{2\pi} \Omega \quad (17)$$

Pero, como se ha indicado anteriormente, esta potencia procede de la que la máquina absorbe por su eje, lo cual origina un par de frenado M_H . La potencia mecánica en un movimiento de rotación es igual al producto de par por la velocidad, lo que en este caso da lugar a esta relación:

$$P_H = M_H \cdot \Omega \quad (18)$$

Identificando las relaciones (17) y (18) se llega finalmente a lo siguiente

$$M_H = \frac{W_H}{2\pi} \quad (19)$$

De lo cual se deduce que el par de frenado M_H debido a la histéresis rotativa es independiente de la velocidad.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS ALIMENTADOS CON CORRIENTE ALTERNA

Circuito magnético sin pérdidas en el hierro

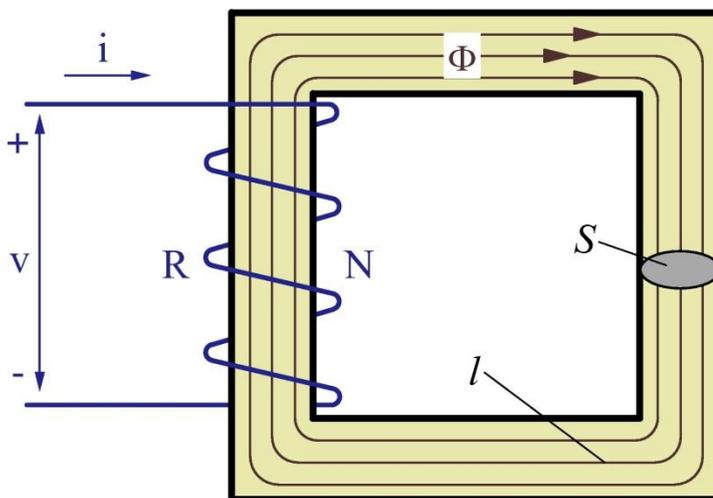


Fig. 12: Circuito magnético de sección uniforme y con una sola bobina.

En la Fig. 12 se muestra un circuito magnético homogéneo cuyo núcleo, construido con un material de permeabilidad μ , es de sección S uniforme y su longitud media es l . Este circuito magnético tiene una sola bobina de N espiras que presenta una resistencia eléctrica R . Aceptaremos que este circuito magnético tiene un flujo de dispersión despreciable y sólo tiene el flujo Φ que circula por su interior. Por lo tanto, todas las espiras de la bobina abrazan el mismo flujo Φ y, consecuentemente, el flujo total concatenado ψ de esta bobina tiene un valor igual al producto $N \cdot \Phi$. La reluctancia \mathcal{R} de este circuito magnético viene dada por la relación (6) y su fuerza magnetomotriz \mathcal{F} se obtiene mediante (7).

Si la bobina se alimenta con una tensión continua V , por ella circulará una corriente continua I , cuyo valor es independiente de la reluctancia \mathcal{R} pues viene dado por la Ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R} \quad (20)$$

El flujo entonces se obtiene de la Ley de Hopkinson (5):

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{N \cdot I}{\mathcal{R}} = \frac{N}{\mathcal{R}} \cdot \frac{V}{R} \quad (21)$$

Luego, cuando un circuito magnético se alimenta con una tensión continua el flujo que va a circular en él dependerá del valor de la resistencia de su bobina y de las propiedades magnéticas del núcleo, mientras que la corriente en la bobina es independiente de las características magnéticas del núcleo magnético.

Ahora el circuito magnético de la Fig. 12 se va a alimentar con una tensión alterna v que varía con el tiempo t según esta ley

$$v = \sqrt{2} V \cos \omega t = \sqrt{2} V \cos (2\pi f)t \quad (22)$$

Nótese que se está utilizando la nomenclatura habitual de representar con letras minúsculas (i , v) a los valores instantáneos de las tensiones y corriente alternas, mientras que con mayúsculas (I , V) se designa a sus valores eficaces. En corriente continua se utilizan letras mayúsculas ya que estas magnitudes son constantes.

La tensión alterna v (dada por la relación (22)) hace que por la bobina circule una corriente alterna i que, a su vez, origina un flujo alterno Φ el cual, al ser variable en el tiempo, induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) en la bobina que se puede calcular mediante la Ley de Faraday. Luego en la bobina los valores instantáneos de la tensión v y de la corriente i están relacionados mediante esta expresión:

$$v = R i + \frac{d \psi}{d t} = R i + N \frac{d \Phi}{d t} \quad (23)$$

En la mayor parte de los casos prácticos la caída de tensión en la resistencia R es despreciable frente a la fuerza electromotriz producida por las variaciones temporales de flujo magnético. En este caso se puede escribir que

$$v = \frac{d \psi}{d t} = N \frac{d \Phi}{d t} \rightarrow \Phi = \frac{\int v dt}{N} \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que el valor de v viene dado por la expresión (22) se llega al siguiente resultado:

$$\Phi = \frac{\sqrt{2}}{N \omega} V \text{ sen } \omega t = \Phi_M \text{ sen } \omega t \quad (25)$$

Luego:

$$\Phi_M = \frac{\sqrt{2}}{N \omega} V = \frac{\sqrt{2}}{N (2\pi f)} V = \frac{1}{4,44 N f} V \quad (26a)$$

$$V = 4,44 N f \Phi_M \quad (26b)$$

En consecuencia, cuando un circuito magnético se alimenta con corriente alterna el flujo depende de la tensión y de la frecuencia, sin que influyan las características magnéticas del núcleo (no interviene la reluctancia \mathcal{R}). Sin embargo, dado que el flujo y la corriente se relacionan mediante la ley de Hopkinson (5), para obtener el valor del flujo Φ -que, según acabamos de comprobar y como muestra la ecuación (26a), viene impuesto por la tensión y la frecuencia- deberá circular por la bobina una corriente proporcional a la reluctancia \mathcal{R} . Es decir, el valor de la corriente va a depender de las propiedades magnéticas del circuito; justo al contrario que cuando el circuito magnético está alimentado con una tensión continua.

Las relaciones (22) y (25) muestran que la tensión y el flujo están desfasados 90° . Por otra parte, si suponemos que el circuito magnético no tiene pérdidas en el hierro la corriente i que circula por la bobina se dedica únicamente a generar el flujo, luego debe estar en fase con él y, además, es proporcional a él (según la Ley de Hopkinson (5)). De esto se deduce que el diagrama fasorial que relaciona estas magnitudes es el representado en la Fig. 13a, donde se aprecia que es similar al de una bobina ideal sin resistencia. Esto indica que el comportamiento de este circuito magnético puede ser representado por el circuito equivalente de la Fig. 13b.

La reactancia X_μ de la bobina equivalente está relacionada con su inductancia L_μ así:

$$X_\mu = 2 \pi f L_\mu \quad (27)$$

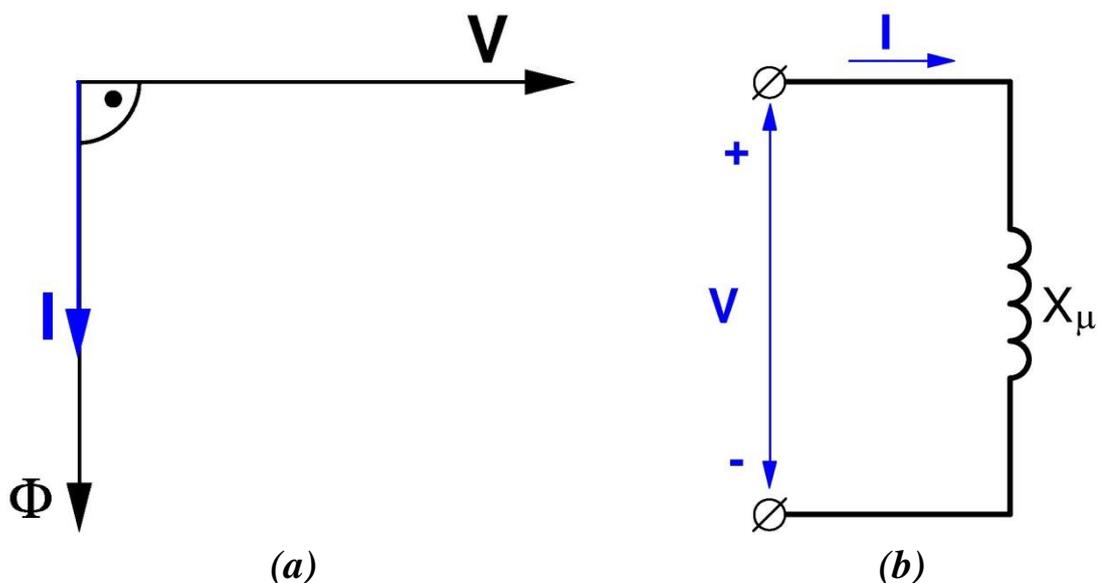


Fig. 13: Diagrama fasorial (a) y circuito equivalente (b) de un circuito magnético alimentado con c.a. y sin pérdidas en el hierro

Teniendo en cuenta la Ley de Hopkinson (5), la inductancia L_μ se obtiene de esta manera:

$$L_\mu = \frac{\Psi}{i} = \frac{N \Phi}{i} = \frac{N \mathcal{F}}{i \mathcal{R}} = \frac{N N i}{i \mathcal{R}}$$

$$\boxed{L_\mu = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{\mu N^2 S}{l}} \quad (28)$$

Nótese en las Figs. 13 que, al existir un desfase de 90° entre la tensión y la corriente, en un circuito magnético sin pérdidas en el hierro y con resistencia despreciable alimentado con corriente alterna sólo se consume potencia reactiva y, por lo tanto, no hay gasto de potencia activa. Esto es lógico pues hemos supuesto que este circuito magnético carece de las causas de consumo de potencia activa que son las pérdidas por efecto Joule en la resistencia y las pérdidas en el hierro.

Circuito magnético con pérdidas en el hierro

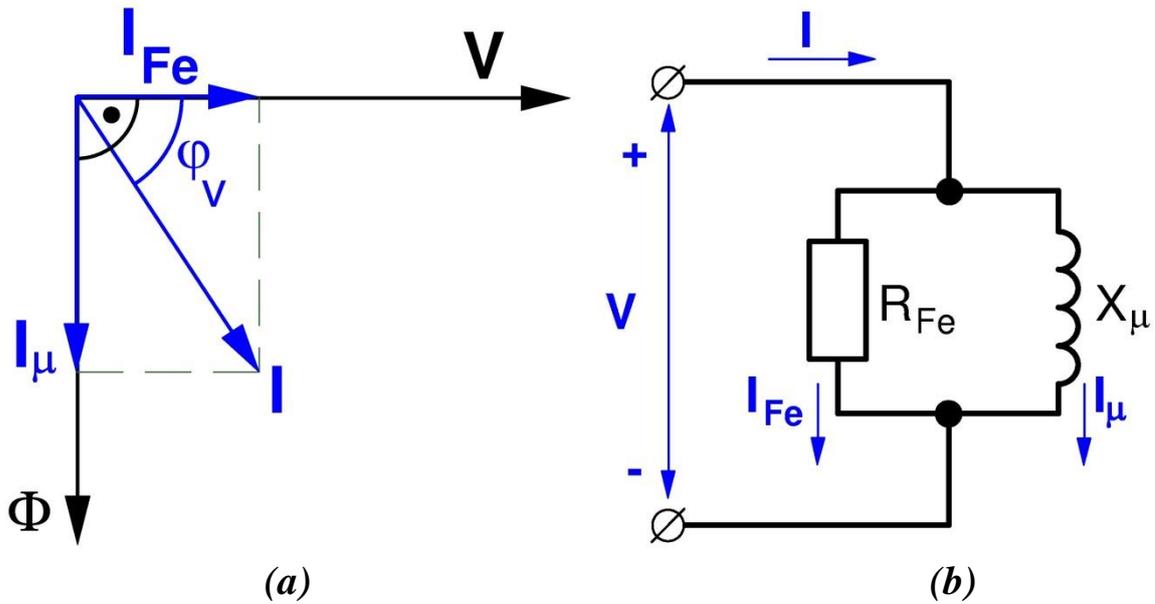


Fig. 14: Diagrama fasorial (a) y circuito equivalente (b) de un circuito magnético alimentado con c.a. y con pérdidas en el hierro

Supongamos ahora que la bobina sigue teniendo una resistencia R pequeña, pero que las pérdidas en el hierro P_{Fe} ya no son despreciables. Estas pérdidas, que se producen en el núcleo magnético debidas a la histéresis y a las corrientes de Foucault, exigen que por la bobina se consuma una potencia activa para que luego esta potencia se pueda transformar en dichas pérdidas. Por lo tanto, la corriente tiene que estar desfasada con respecto a la tensión un ángulo ϕ_v inferior a 90° (Fig. 14a) de tal manera que suceda lo siguiente:

$$P_{Fe} = V \cdot I \cdot \cos \phi_v \quad (29)$$

Esto permite dividir la corriente en dos componentes perpendiculares entre sí (Fig. 14a):

$$I_{Fe} = I \cos \varphi_v \quad (30)$$

$$I_{\mu} = I \operatorname{sen} \varphi_v$$

Una de estas componentes es la *corriente magnetizante* I_{μ} que es la que genera el flujo y, por consiguiente, es paralela a éste y sólo consume potencia reactiva. La otra componente es la *corriente de pérdidas en el hierro* I_{Fe} que es paralela a la tensión, por lo que sólo consume potencia activa, potencia que tiene que tener un valor igual a P_{Fe} . De todo esto se deduce que el circuito equivalente de un circuito magnético alimentado con corriente alterna y con pérdidas en el hierro es el representado en la Fig. 14b. En él aparecen la **reactancia magnetizante** X_{μ} , que se calcula como se indicó en el apartado anterior (ecuaciones (27) y (28)), y la **resistencia de pérdidas en el hierro** R_{Fe} . Aplicando la Ley de Ohm a las dos ramas del circuito equivalente de la Fig. 14b se deducen estas fórmulas:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} \quad (31)$$

$$X_{\mu} = \frac{V}{I_{\mu}}$$

Combinando las expresiones (29), (30) y (31) se consigue llegar finalmente la siguiente relación

$$P_{Fe} = V I_{Fe} = V \frac{V}{R_{Fe}} = \frac{V^2}{R_{Fe}}$$

$$R_{Fe} = \frac{V^2}{P_{Fe}}$$

(32)

Circuito magnético con resistencia, dispersión y pérdidas en el hierro

Consideremos ahora que la bobina del circuito magnético tiene una resistencia R apreciable y que, además del flujo útil Φ , tiene un flujo de dispersión Φ_d (Fig. 15), de tal manera que el flujo total Φ_t de la bobina es la suma de los dos anteriores (ecuación (9)).

Al igual que con el flujo útil (ecuaciones (27) y (28)) se pueden definir una reactancia de dispersión X_d y una inductancia de dispersión L_d así:

$$X_d = 2 \pi f L_d \quad L_d = \frac{\Psi_d}{i} = \frac{N \Phi_d}{i} \quad (33)$$

En muchos textos a L_d y X_d también se les llama L_{σ} y X_{σ} ó L_l y X_l , respectivamente.

Por lo tanto, la ecuación que relaciona los valores instantáneos de la tensión y de la corriente en la bobina pasa de ser la (23) a ser la siguiente:

$$v = R i + \frac{d \psi_t}{d t} = R i + \frac{d \psi_d}{d t} + \frac{d \psi}{d t} = R i + N \frac{d \Phi_d}{d t} + N \frac{d \Phi}{d t} \quad (34)$$

$$v = R i + L_d \frac{d i}{d t} + N \frac{d \Phi}{d t} = R i + L_d \frac{d i}{d t} + L_\mu \frac{d i_\mu}{d t}$$

En consecuencia se deduce que el circuito equivalente ahora pasa a ser el representado en la Fig. 16.

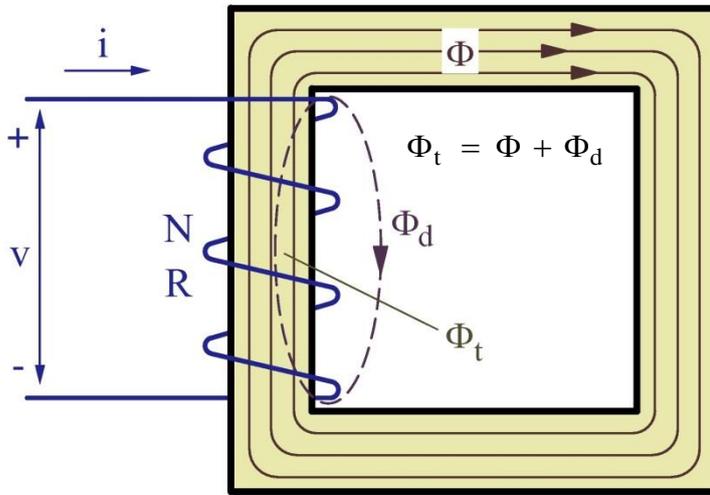


Fig. 15: Circuito magnético con resistencia, dispersión y pérdidas en el hierro

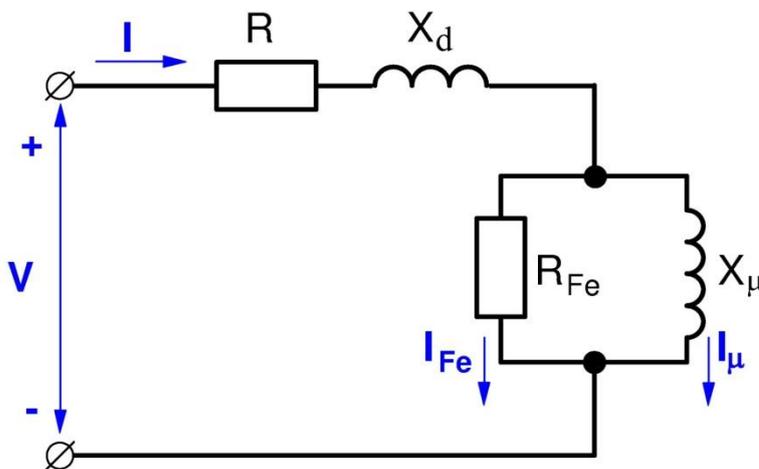


Fig. 16: Circuito equivalente para el circuito magnético de la Fig. 15

En los materiales ferromagnéticos la permeabilidad μ no es constante y se puede demostrar que esto conlleva el que la corriente i no varía de forma sinusoidal en el tiempo. Sin embargo, esta corriente se puede sustituir por otra sinusoidal equivalente que tiene el mismo valor eficaz y que origina las mismas pérdidas en el hierro. Esta corriente equivalente es la que, de una manera implícita, se utiliza en los diagramas y circuitos equivalentes de las Figs. 13, 14 y 16 y en las ecuaciones (29) a (34) y es la que seguiremos empleando de aquí en adelante.

IMANES PERMANENTES

Curva de desmagnetización

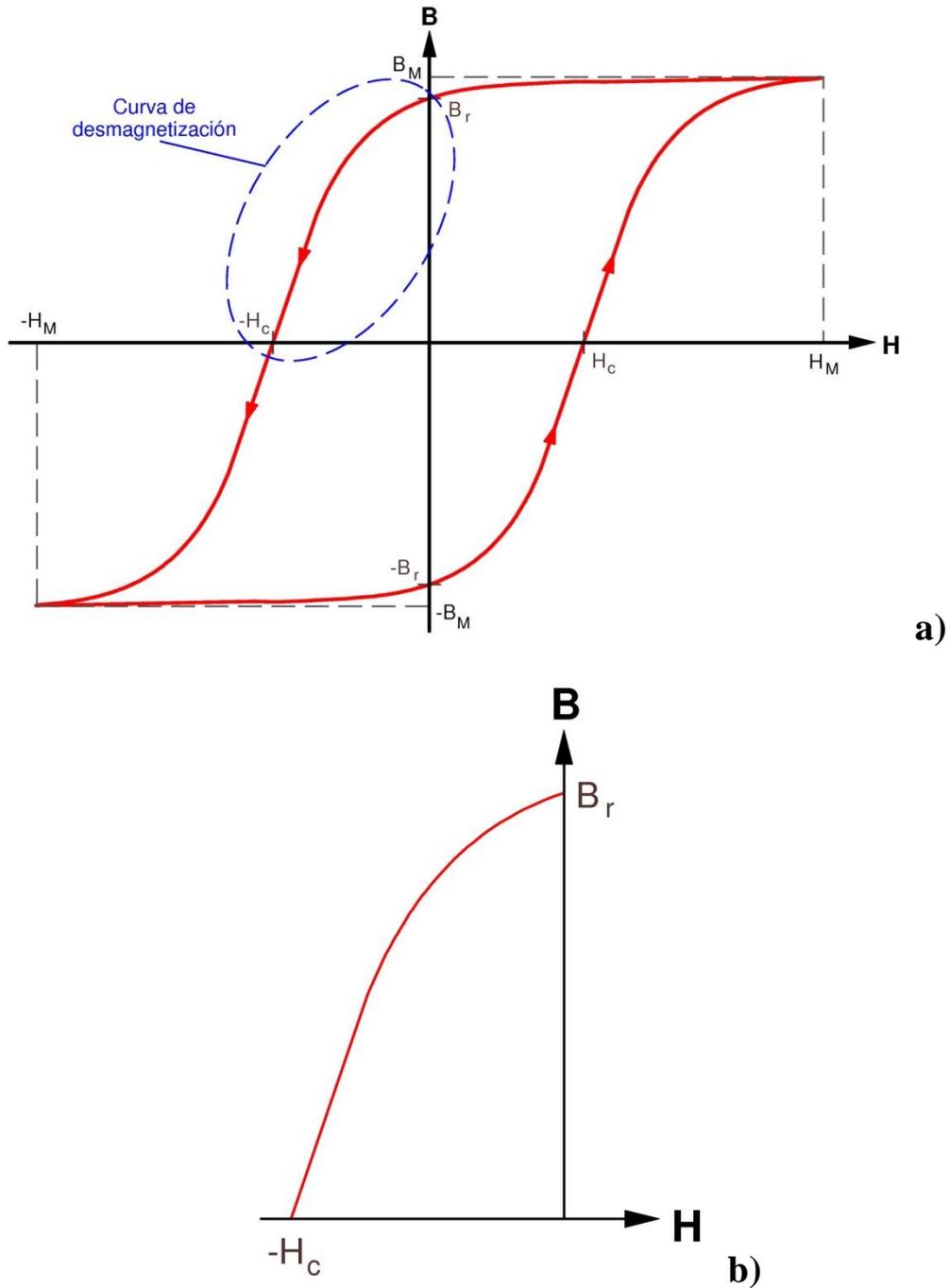


Fig. 17: a) Ciclo de histéresis de un material ferromagnético duro en el que se indica que su 2º cuadrante constituye la curva de desmagnetización, la cual se ha representado en b).

Ya se indicó al estudiar la histéresis magnética que los imanes permanentes se construyen utilizando materiales ferromagnéticos duros. Estos materiales presentan un alto **magnetismo remanente B_r** por lo que mantienen una magnetización \vec{M} elevada en ausencia de campo magnético externo y, por lo tanto, estos materiales son capaces de generar una inducción magnética por sí mismos, sin necesidad de que ninguna causa externa dé lugar a

una excitación \vec{H} . Para que el material no pierda fácilmente su magnetización interesa que su **campo coercitivo H_c** tenga un valor absoluto elevado. En consecuencia estos materiales presentarán un ciclo de histéresis como el representado en la Fig. 17a.

Recordemos que la inducción magnética \vec{B} se obtiene como suma de los efectos de la excitación \vec{H} , debida a las causas externas, y de la magnetización \vec{M} , originada por la acción de los efectos magnéticos de los átomos del medio material (ecuación (1)). Por otra parte, el campo coercitivo H_c es el módulo de la intensidad magnetizante negativa que es preciso introducir para reducir y compensar la magnetización \vec{M} positiva que había adquirido previamente el material y, así, conseguir anular la inducción \vec{B} . En ese momento en que la inducción se anula aún sigue habiendo algo de magnetización \vec{M} positiva. Por ello es preciso que la excitación sea aún más negativa (y por lo tanto, de mayor valor absoluto que H_c) para lograr que la magnetización \vec{M} se anule. El valor absoluto de la excitación magnética que anula la magnetización \vec{M} del material se denomina **campo coercitivo intrínseco H_{ci}** .

El campo coercitivo intrínseco H_{ci} siempre es mayor que el campo coercitivo H_c y es una magnitud que indica mejor que H_c la resistencia a la desmagnetización de un material.

Más adelante se indicarán otras propiedades que interesa que tenga un material que se vaya a usar en la construcción de imanes permanentes.

En los siguientes apartados se va comprobar que cuando se construye un circuito magnético que incluya estos materiales, la existencia de entrehierros da lugar a que aparezca una excitación H negativa. En consecuencia, estos materiales van a trabajar en el segundo cuadrante de su ciclo de histéresis, donde la inducción B es positiva y la excitación H es negativa (Fig. 17a), lo que, según la relación (1), conlleva que la magnetización M es positiva. La porción del ciclo de histéresis que está dentro del segundo cuadrante constituye la **curva de desmagnetización** (Fig. 17b) que resulta de gran utilidad para el estudio de circuitos magnéticos con imanes.

Punto de funcionamiento de un circuito magnético con imanes permanentes

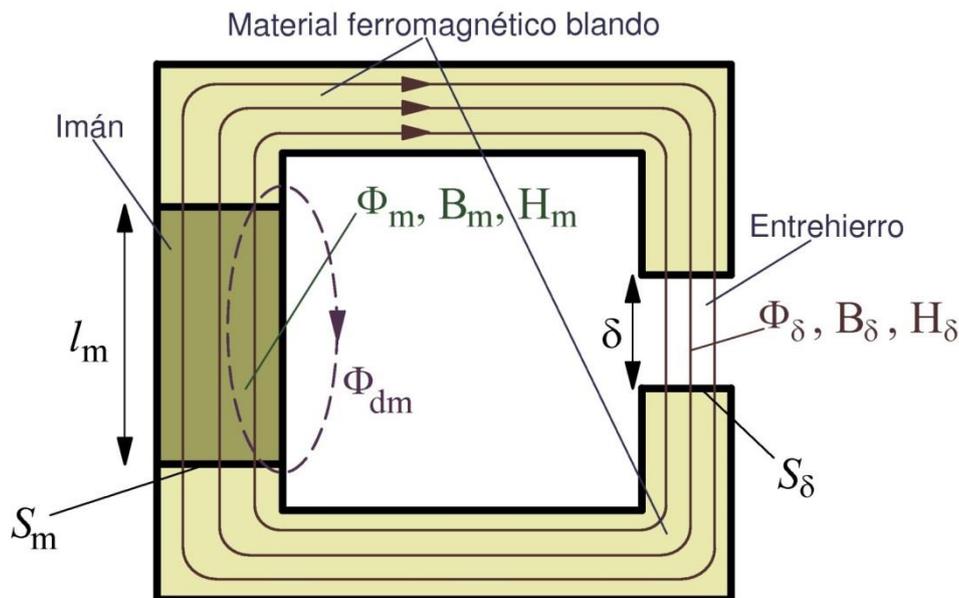


Fig. 18a: Circuito magnético con un imán

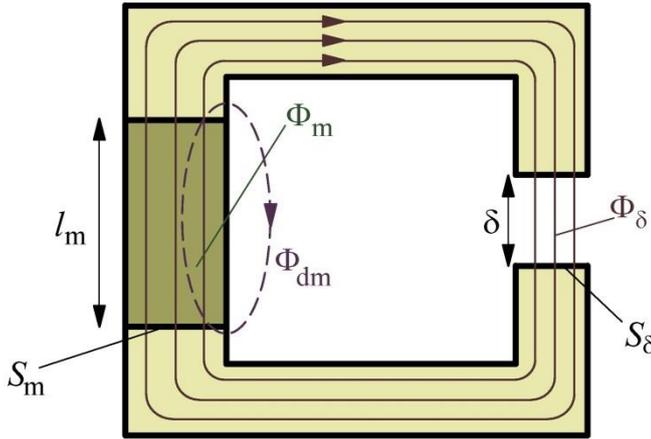


Fig. 18b: Circuito magnético con un imán (versión simplificada de la Fig. 18a)

En las Figs. 18 se muestra un circuito magnético sencillo con un imán (construido con material ferromagnético duro), material ferromagnético blando y un entrehierro. El imán tiene una longitud l_m y una sección S_m y el entrehierro tiene unas dimensiones δ y S_δ , respectivamente.

Dado que la permeabilidad magnética del material ferromagnético blando es muy superior a la del entrehierro y a la del imán, la supondremos de valor prácticamente infinito ($\mu_{Fe} \approx \infty$). Esto significa que, sea cual sea el valor del flujo en el material ferromagnético blando, su excitación magnética H_{Fe} (cociente entre su inducción y su permeabilidad, según la expresión (2)) es siempre nula.

El entrehierro se ve atravesado por el flujo útil Φ_δ , lo que hace que su inducción sea B_δ y su excitación sea H_δ . El imán tiene un flujo de dispersión Φ_{dm} y un coeficiente de Hopkinson v_m por lo que el flujo total Φ_m que lo atraviesa (ver la expresión (10)) es

$$\Phi_m = \Phi_\delta + \Phi_{dm} = v_m \Phi_\delta \quad (35)$$

La inducción y la excitación magnéticas en el imán son B_m y H_m , respectivamente. La relación entre estas dos magnitudes viene dada, en principio, por la curva de desmagnetización del material ferromagnético duro con que está fabricado el imán, la cual es similar a la representada en la Fig. 17b.

De la relación (35) se deduce que:

$$B_m \cdot S_m = v_m \cdot B_\delta \cdot S_\delta \rightarrow B_m = \left[v_m \frac{S_\delta}{S_m} \right] B_\delta \quad (36)$$

$$B_\delta = \left[\frac{S_m}{v_m S_\delta} \right] B_m \quad (37)$$

De las relaciones (36) y (37) se deduce que para conseguir un valor de inducción en el entrehierro B_δ no es necesario que el imán tenga una inducción B_m de ese mismo valor. En

efecto, B_m puede ser más pequeña que B_δ y, aun así, se puede obtener el valor deseado para B_δ dando al imán y al entrehierro las secciones S_m y S_δ adecuadas.

Aplicando el Teorema de Ampère (relación (5a)) al circuito magnético de las Figs. 18 y teniendo en cuenta que $H_{Fe} = 0$ y que no hay ninguna corriente eléctrica actuando en este circuito magnético, se deduce que

$$H_m l_m + H_\delta \delta = 0 \rightarrow H_m = -\frac{\delta}{l_m} H_\delta \quad (38)$$

Este resultado es muy importante. Observemos que si no hubiera entrehierro ($\delta = 0$) la excitación magnética en el imán H_m sería nula y, según su curva de desmagnetización (Fig. 17b), su inducción magnética B_m tendría un valor igual a la remanente B_r ($B_m = B_r$)¹. Pero el hecho de que el circuito magnético tenga un entrehierro no nulo ($\delta \neq 0$) hace que aparezca en el imán una excitación negativa ($H_m < 0$) y que la inducción sea menor que la remanente ($B_m < B_r$). Es decir, al incluir entrehierros en el circuito magnético aparece una excitación magnética negativa H_m en el imán. Esto explica por qué en el estudio de los imanes se utiliza el segundo cuadrante del ciclo de histéresis; es decir, la curva de desmagnetización.

La permeabilidad magnética en el entrehierro es prácticamente igual a la del vacío y, su reluctancia \mathcal{R}_δ se obtiene aplicando la relación (6). En consecuencia, se cumple que

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta \rightarrow H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \quad (39)$$

$$\mathcal{R}_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} \quad (40)$$

Combinando las relaciones (38) y (39) se llega al siguiente resultado:

$$H_m l_m + \frac{B_\delta}{\mu_0} \delta = 0 \rightarrow B_\delta = -\frac{\mu_0}{\delta} l_m H_m \quad (41)$$

Teniendo presente, además, las expresiones (36) y (40) se deduce finalmente que

$$B_m = -\left[v_m \frac{\mu_0}{\delta} \frac{S_\delta}{S_m} l_m \right] H_m \quad (42)$$

$$B_m = -\left[v_m \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_\delta} \right] H_m \quad (43)$$

La expresión (42) (y también la (43)) indica que la relación entre B_m y H_m es lineal y, por lo tanto, es la ecuación de una recta denominada **recta de entrehierro** o **recta de carga**.

¹ Véase el pie de página número 2.

En resumen, la geometría y la constitución del circuito magnético hacen que la relación entre B_m y H_m sea la indicada por la relación lineal (42); mientras que, por otra parte, las características magnéticas del material con que se fabrica el imán obligan a que, al menos inicialmente, la relación entre estas dos magnitudes sea la mostrada mediante su curva de desmagnetización. Como se tienen que cumplir simultáneamente ambas condiciones, el circuito magnético trabaja en el **punto de funcionamiento** M obtenido por corte de la curva de desmagnetización del imán y de la recta de carga del circuito magnético (Fig. 19).

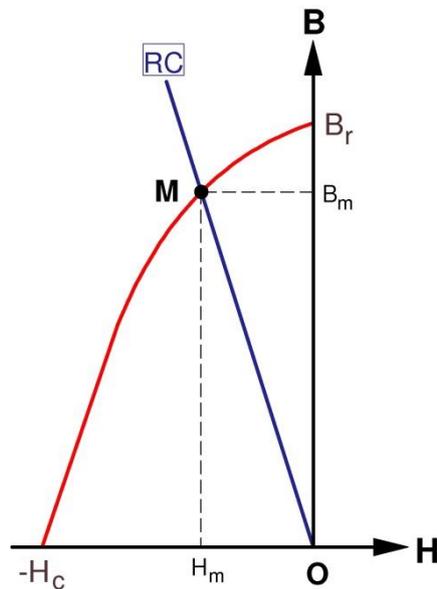


Fig. 19: M es el punto de funcionamiento del circuito magnético de la Fig. 18. (RC: Recta de carga o de entrehierro)

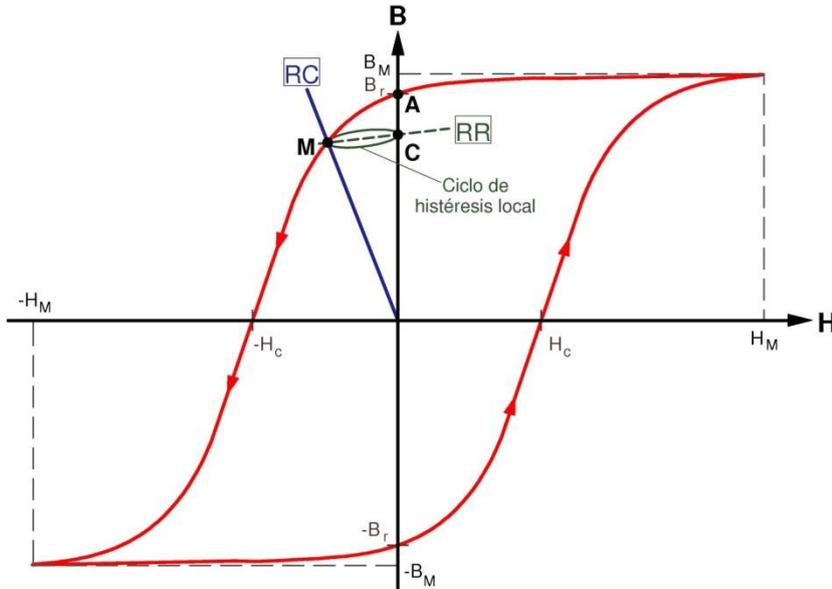
En la Fig. 20 se muestra el caso del circuito magnético de la Fig. 18 en el que inicialmente el entrehierro es nulo y el circuito funciona en el punto A con una inducción igual a la remanente B_r ². Seguidamente el entrehierro se aumenta hasta un valor δ al que corresponde la recta de carga RC . Esto hace que el punto de funcionamiento se mueva a lo largo de la curva de desmagnetización y pase a ser el punto M (punto de corte entre la recta de carga y la curva de desmagnetización). Si ahora se vuelve a anular el entrehierro el circuito magnético no regresa al punto A inicial sino al punto C , donde la inducción va a ser inferior a la remanente B_r que había en el punto A .

En efecto, debido al fenómeno de la histéresis no se obtiene el mismo valor de la inducción para un mismo valor de la excitación magnética si la historia previa del material es distinta. Mientras que la excitación en el imán H_m ha ido haciéndose cada vez más negativa el punto de funcionamiento se ha ido desplazando a lo largo de la curva de desmagnetización, ya que ese es el sentido que le corresponde a esta curva. En efecto, recordemos que la curva de desmagnetización es el segundo cuadrante del ciclo de histéresis que recorre el material cuando la excitación varía cíclicamente entre $+H_M$ y $-H_M$ (Fig. 20a). Pero cuando la excitación negativa H_m disminuye su valor absoluto, el punto de funcionamiento ya no sigue la curva de desmagnetización, pues la recorrería en el sentido incorrecto. Si el entrehierro varía cíclicamente entre 0 y δ lo que sucede es que el imán recorre un pequeño ciclo de histéresis local entre los puntos M y C (ver la Fig. 20a). Este

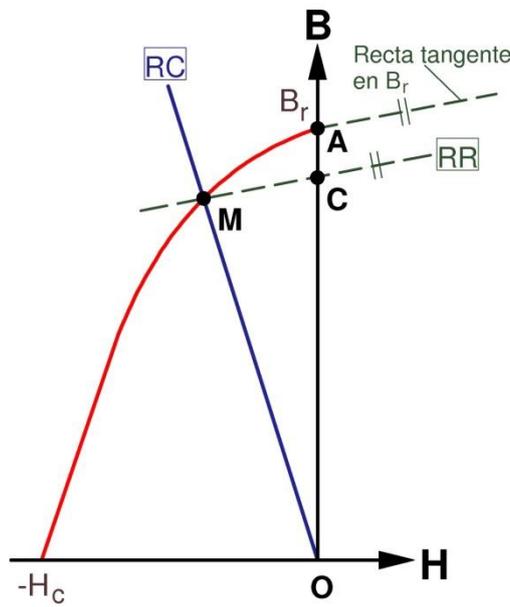
² En rigor, cuando el entrehierro δ es nulo, dado que realmente la excitación H_{Fe} en el material ferromagnético blando no es exactamente nula (aunque sí muy pequeña), el punto de funcionamiento no es A , sino uno muy próximo a la izquierda de éste y la inducción en el imán es, pues, ligeramente inferior a B_r .

ciclo es muy estrecho y se lo suele sustituir por la recta que une los puntos M y C que se denomina *recta de retroceso* o *de retorno* (RR en las Figs. 20).

Se puede demostrar que la recta de retroceso es paralela a la tangente a la curva de desmagnetización en el punto A (Fig. 20b); es decir, en el punto de la curva donde la inducción es la remanente B_r . En cada caso la recta de retroceso se inicia en un punto de la curva de desmagnetización (el punto M en las Fig. 20) a partir del cual se ha empezado a disminuir el valor absoluto de la excitación H_m . Este punto de inicio de la recta de retroceso y que pertenece a la curva de desmagnetización se denomina *punto base*.



a)



b)

Fig. 20: Efectos de la variación cíclica del entrehierro desde 0 hasta un valor δ .
 RC: Recta de carga o de entrehierro cuando el entrehierro vale δ
 RR: Recta de retorno o de retroceso cuyo punto base es M

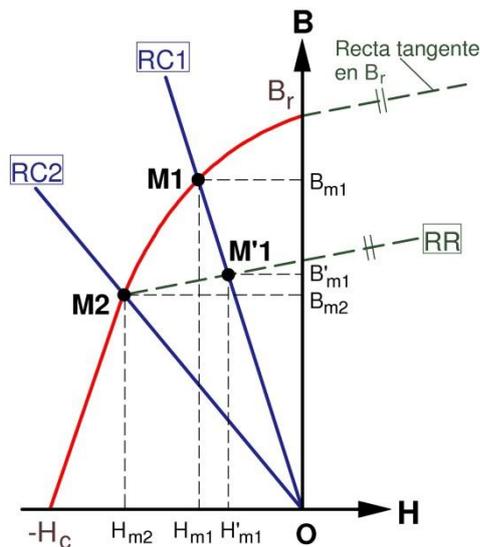


Fig. 21: Variación del entrehierro del circuito magnético de la Fig. 18 entre los valores δ_1 y δ_2

En resumen, si se parte de un punto de funcionamiento inicial sobre la curva de desmagnetización (donde la excitación en el imán H_m es negativa) y se aumenta el valor absoluto de H_m , el nuevo punto de funcionamiento estará también sobre la curva de desmagnetización. Pero, si desde el punto de funcionamiento inicial se disminuye el valor absoluto de la excitación H_m , el nuevo punto de funcionamiento se encontrará sobre la recta de retroceso cuyo punto base es el punto inicial.

Esto se puede comprobar en la situación representada en la Fig. 21. Inicialmente el circuito magnético de la Fig. 18 tiene un entrehierro δ_1 al que le corresponde una recta de carga RC1 y el punto de funcionamiento es M1, que está sobre la curva de desmagnetización. Ahora el entrehierro se aumenta al valor δ_2 ($\delta_2 > \delta_1$) con lo que la recta de carga pasa a ser RC2, lo que conlleva que el valor absoluto de la excitación del imán H_m aumente (es más negativa) y, por lo tanto, el nuevo punto de funcionamiento M2 estará también sobre la curva de desmagnetización. Si ahora reducimos el entrehierro para que vuelva a valer δ_1 , el nuevo punto de funcionamiento no será M1 sino el punto M'1 de cruce entre la recta de retroceso RR, cuyo punto base es M2, y la recta de carga RC1. Si se continúa variando el entrehierro entre δ_1 y δ_2 el punto de funcionamiento se moverá a lo largo de la recta de retroceso RR (Fig. 21) entre los puntos M2 y M'1.

Veamos qué pasa cuando el circuito magnético tiene un entrehierro δ y funciona en el punto M -que está sobre la curva de desmagnetización- y el entrehierro se aumenta mucho hasta hacerle prácticamente infinito (Fig. 22). Este caso corresponde a sacar el imán del circuito magnético y, en el caso de las máquinas eléctricas, es lo que sucede cuando se desmonta una máquina con imanes permanentes y se saca el rotor del interior del estator (Fig. 11). Al hacer infinito al entrehierro se aumenta enormemente la reluctancia del circuito magnético con lo que el flujo se anula y, por lo tanto, también la inducción B_m se hace nula. El circuito pasa a funcionar en el punto D donde el valor absoluto de la excitación es la coercitiva H_c ³. Si ahora volvemos a dar al entrehierro el valor δ inicial el nuevo punto de funcionamiento M' (Fig. 22) estará sobre la recta de retroceso RR cuyo punto base es el D.

³ En realidad, debido al flujo de dispersión, en este caso ni el flujo ni la inducción en el imán se anulan del todo y el punto de funcionamiento no es exactamente el D, sino otro muy próximo a la derecha de éste. Luego, la excitación magnética va a tener un valor absoluto ligeramente inferior a la coercitiva H_c .

Esto es lo que pasa al volver a meter el imán dentro del circuito magnético después de haberlo sacado previamente y, en el caso de una máquina eléctrica, es lo que sucede al volver a montarla después de haberla desmontado anteriormente.

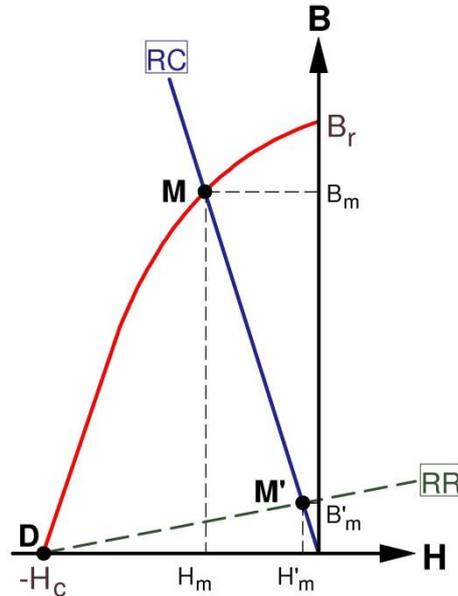


Fig. 22: Desmagnetización de un imán cuando el entrehierro se hace infinito

En la Fig. 22 se observa que la inducción magnética B'_m en el punto M' es muy inferior a la que se tenía anteriormente, B_m , en el punto M y el imán se ha desmagnetizado. Por lo tanto, hay materiales ferromagnéticos duros que sufren una fuerte desmagnetización al aumentar el entrehierro y hay que tener mucha precaución al montar y desmontar máquinas construidas con ellos. Por esta razón los imanes se magnetizan cuando la máquina ya está montada.

Este problema es menos importante en imanes construidos con materiales cuya curva de desmagnetización es casi recta (Fig. 23), que es lo que ocurre con los materiales más modernos, los cuales incluyen tierras raras (Fig. 28): Samario-Cobalto y Neodimio-Hierro-Boro (más adelante se analizarán los materiales utilizados en los imanes permanentes). En este caso la curva de desmagnetización y la recta de retroceso son casi coincidentes y, en consecuencia, los puntos de funcionamiento M y M' están muy cercanos (Fig. 23).

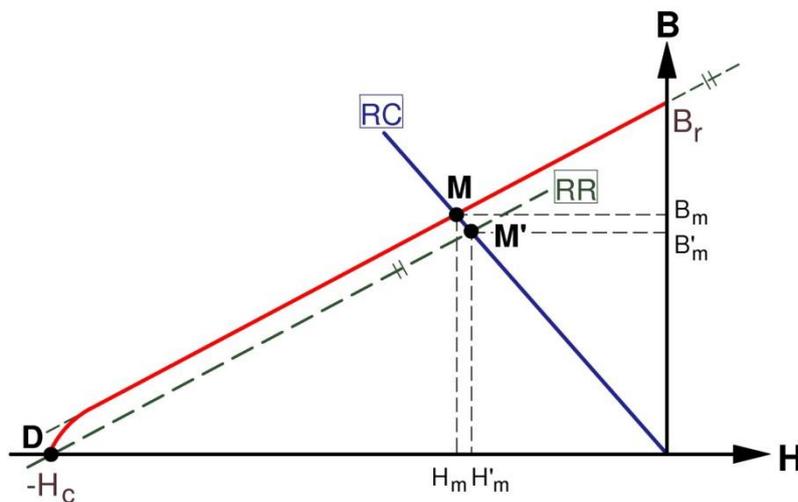


Fig. 23: En algunos imanes la desmagnetización cuando el entrehierro se hace infinito es pequeña

Producto energético máximo

Para el circuito magnético con un imán de las Figs. 18 se obtuvo la relación (43) y de ella se deduce que

$$\mathbf{B}_m \cdot \mathbf{H}_m = - \left[v_m \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_\delta} \right] \mathbf{H}_m^2 \quad (44)$$

Por otra parte, de (40) y (41) se obtiene lo siguiente

$$\mathbf{H}_m = - \frac{\delta}{\mu_0 l_m} \mathbf{B}_\delta = - \frac{\delta}{\mu_0 l_m} \frac{\Phi_\delta}{S_\delta} = - \frac{\mathcal{R}_\delta}{l_m} \Phi_\delta \quad (45)$$

Combinando las expresiones (44) y (45) sale que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{H}_m &= - \left[v_m \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_\delta} \right] \cdot \left[\frac{\mathcal{R}_\delta}{l_m} \Phi_\delta \right]^2 = - \left[v_m \frac{\mathcal{R}_\delta}{l_m \cdot S_m} \right] \Phi_\delta^2 \\ \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{H}_m &= - v_m \frac{\mathcal{R}_\delta}{V_m} \Phi_\delta^2 \end{aligned} \quad (46)$$

En la expresión anterior V_m es el volumen del imán y el producto $(\mathbf{B}_m \mathbf{H}_m)$ se denomina **producto energético** o **producto de energía**. Nótese que esta magnitud tiene signo negativo, pues \mathbf{B}_m es positivo y \mathbf{H}_m es negativo. De la relación (46) se deduce finalmente que

$$V_m = l_m \cdot S_m = - v_m \frac{\mathcal{R}_\delta}{(\mathbf{B}_m \mathbf{H}_m)} \Phi_\delta^2 \quad (47)$$

De la relación (47) se infiere que si se tiene un circuito magnético con un entrehierro de dimensiones predeterminadas y, por consiguiente, con un valor fijado para la reluctancia \mathcal{R}_δ y se desea conseguir que, mediante un imán, el flujo magnético en dicho entrehierro sea Φ_δ , dicho imán tendrá un volumen mínimo si se trabaja con el valor máximo del producto de energía $(\mathbf{B}_m \mathbf{H}_m)$.

Esto significa que, de una parte, en la fabricación de un imán interesa utilizar un material cuyo **producto energético máximo** $(\mathbf{B}_m \mathbf{H}_m)_{\text{Máx}}$ sea lo más grande posible y, por otra parte, interesa diseñar el circuito magnético de forma que el imán trabaje en el punto de la curva de desmagnetización donde es máximo el producto energético $(\mathbf{B}_m \mathbf{H}_m)$ del material con que se ha construido. Por esta razón los fabricantes de materiales ferromagnéticos duros incluyen en sus catálogos la especificación del producto energético máximo, ya que es una magnitud importante en la elección del material y en el diseño de dispositivos con imanes permanentes.

Punto de funcionamiento de un circuito magnético con bobinas e imanes permanentes

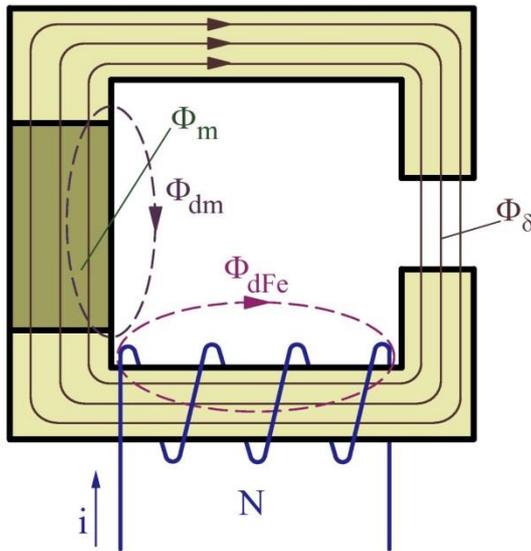


Fig. 24: Circuito magnético con una bobina y un imán permanente

En la Fig. 24 se muestra un circuito magnético con un imán y un entrehierro, que es similar al representado en las Figs. 18, al que se le ha añadido una bobina de N espiras que está recorrida por la corriente i. El convenio de signos para la corriente i es el indicado en la Fig. 24; si la corriente i es positiva origina una excitación positiva. Esto significa que, una vez escogido un sentido positivo para el flujo Φ_{δ} , la corriente i es positiva si intenta que el flujo Φ_{δ} sea positivo (Fig. 24). Seguiremos suponiendo que la permeabilidad en las piezas de material ferromagnético blando tiene un valor prácticamente infinito ($\mu_{Fe} \approx \infty$) y, consiguientemente, su excitación magnética H_{Fe} es nula, sea cual sea el valor de su flujo. Por esta razón, tampoco se tiene en cuenta el posible flujo de dispersión Φ_{dFe} en la bobina, ya que (mientras siga sucediendo que $\mu_{Fe} \approx \infty$) su valor no altera esta aproximación de que $H_{Fe} = 0$ y no va a influir en los resultados que se van a obtener en los siguientes párrafos.

Aplicando el Teorema de Ampère a este circuito magnético, se llega a

$$H_m l_m + H_{\delta} \delta = N i \rightarrow H_m = -\left(\frac{\delta H_{\delta}}{l_m} - \frac{N i}{l_m} \right) \quad (48)$$

Trabajando como con la ecuación (38); es decir, combinado la relación (48) con las relaciones (36) y (39), se obtiene que

$$B_m = -\left[v_m \frac{\mu_0}{\delta} \frac{S_{\delta}}{S_m} l_m \right] \left[H_m - \frac{N i}{l_m} \right] = -\left[v_m \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_{\delta}} \right] \left[H_m - \frac{N i}{l_m} \right] \quad (49)$$

Comparando la relación (38) con la (48) o las relaciones (42) y (43) con la (49) se observa que el efecto de la bobina es desplazar la recta de carga horizontalmente una distancia $d = N i / l_m$. Este desplazamiento es hacia la derecha si la corriente i es positiva y hacia la izquierda si la corriente i es negativa (Fig. 25). Es decir, ahora la recta de carga tiene la misma pendiente que en el circuito magnético sin bobina de las Figs. 18, pero ya no va a pasar por el origen de coordenadas (salvo cuando la corriente i sea nula).

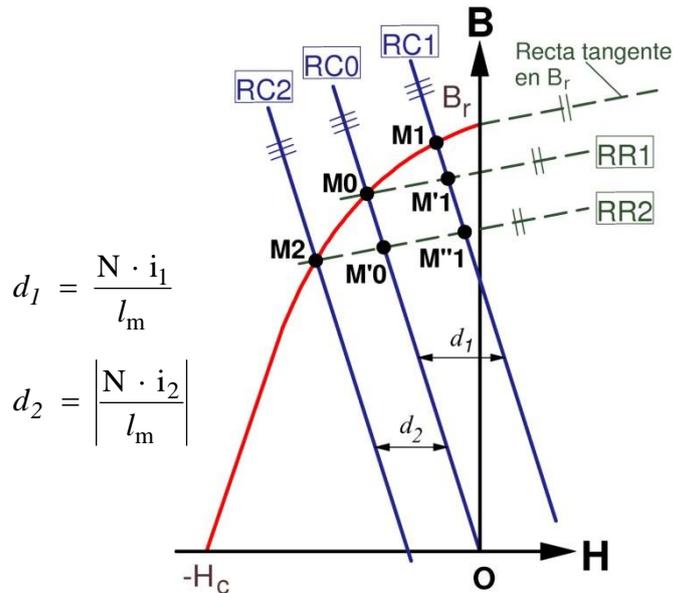


Fig. 25: Comportamiento del circuito magnético de la Fig. 24 con una corriente i_1 positiva y con una corriente i_2 negativa

En la Fig. 25 se muestra la recta RC0, que es la recta de carga cuando la corriente es nula, con lo que el circuito magnético trabajaría en el punto M0. Supongamos que mantenemos invariable el valor δ del entrehierro y que variamos la corriente i que circula por la bobina. Si ahora se introduce una corriente i_1 positiva, la recta de carga pasa a ser RC1 (desplazada una distancia $d_1 = \frac{N \cdot i_1}{l_m}$ a la derecha respecto a la recta RC0). Como la curva de desmagnetización no se puede recorrer hacia la derecha, lo que va a suceder es que el punto de funcionamiento se moverá sobre la recta de retroceso RR1, cuyo punto base es M0. Al final el punto de funcionamiento será el M'1 y no en el M1. Mientras que la corriente no adopte valores negativos, el funcionamiento del circuito magnético se mantendrá sobre la recta de retroceso RR1.

Supongamos ahora que estamos inicialmente con corriente nula en el punto de funcionamiento M0 y, manteniendo constante el entrehierro δ , introducimos una corriente i_2 negativa en la bobina (Fig. 25). La recta de carga pasará a ser la RC2 (desplazada una distancia $d_2 = \left| \frac{N \cdot i_2}{l_m} \right|$ a la izquierda con respecto a la recta RC0) y el punto de funcionamiento se moverá hacia la izquierda sobre la curva de desmagnetización hasta llegar al punto M2. Si ahora la corriente se vuelve a anular, el punto de funcionamiento no puede recorrer la curva de desmagnetización hacia la derecha, por lo que sigue la recta de retroceso RR2 -cuyo punto base es M2- y acaba situado en el punto M'0. Mientras que por la bobina no se haga circular una corriente negativa cuyo valor absoluto sea mayor que el de la corriente i_2 , el funcionamiento del circuito magnético se mantendrá sobre la recta de retroceso RR2.

Si, partiendo del punto M0 y conservando constante el entrehierro δ , lo que se hace es introducir una corriente positiva i_1 y luego una corriente negativa i_2 , el proceso es una combinación de los dos anteriores y está representado en la Fig. 25. Primero, mientras que la corriente aumenta hasta el valor positivo i_1 , el punto de funcionamiento sigue la recta de

retroceso RR1 y va del punto M0 al M'1. Luego, mientras que la corriente se reduce hasta anularse para luego aumentar en sentido negativo hasta valer i_2 , el punto de funcionamiento inicialmente retrocede por la recta RR1 desde el punto M'1 hasta el M0 y luego recorre la curva de desmagnetización hasta el punto M2. Si ahora la corriente vuelve a hacerse positiva con el valor i_1 , el circuito magnético funcionará a lo largo de la recta de retroceso RR2, yendo desde el punto M2, pasando por el M'0 y llegando, finalmente, al punto M'1. A partir de ahora, mientras que por la bobina no se haga circular una corriente negativa cuyo valor absoluto sea mayor que el de la corriente i_2 , el funcionamiento del circuito magnético se seguirá manteniendo sobre la recta de retroceso RR2.

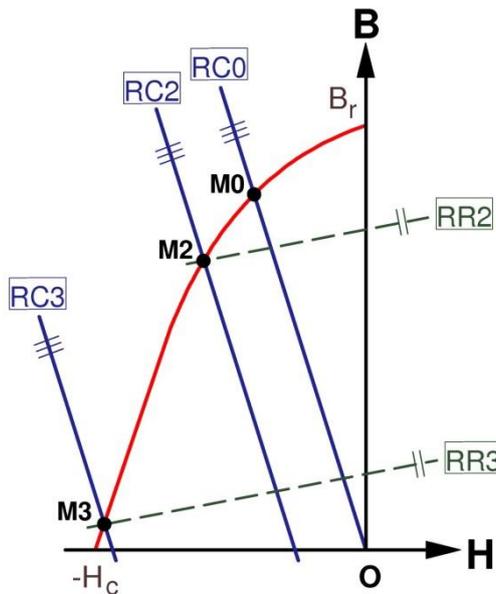


Fig. 26: Comportamiento del circuito magnético de la Fig. 24 con una corriente i_3 negativa muy elevada que lo desmagnetiza

Supongamos que el circuito magnético de la Fig. 24 ha sido diseñado para que en su funcionamiento la corriente negativa no tenga un valor absoluto superior al de la corriente i_2 . Como se acaba de comprobar, después de que la bobina haya sido atravesada por la corriente negativa i_2 por primera vez, el circuito magnético va a permanecer funcionando sobre la recta de retroceso RR2, cuyo punto base es el M2. Pero si, por accidente, por la bobina llegase a circular una corriente negativa i_3 cuyo valor absoluto sea bastante más alto que el de la corriente i_2 , el punto de funcionamiento pasaría a ser M3 y, a partir de dicho momento, el circuito magnético pasa a funcionar sobre la recta de retroceso RR3, cuyo punto base es el M3. Esto significa que ahora el circuito magnético ya no puede funcionar sobre la recta RR2, sino sobre una recta RR3 con mucha menor inducción. Es decir, el imán se ha desmagnetizado y ya no puede producir los valores de inducción magnética que se habían previsto.

Esta situación se da, por ejemplo, en las máquinas eléctricas con imanes permanentes cuando accidentalmente se produce un cortocircuito en bornes del bobinado inducido. La máquina queda desmagnetizada y, al disminuir su campo magnético, sus prestaciones se reducen mucho con respecto a las que estaban previstas en su diseño.

Este fenómeno produce, pues, las mismas consecuencias que cuando se aumenta mucho el entrehierro, que es el fenómeno que se analizó en la Fig. 22. Como dijimos entonces, hay materiales en los que la curva de desmagnetización es recta (Fig. 23) y, entonces, se produce una desmagnetización mucho menor que apenas da problemas.

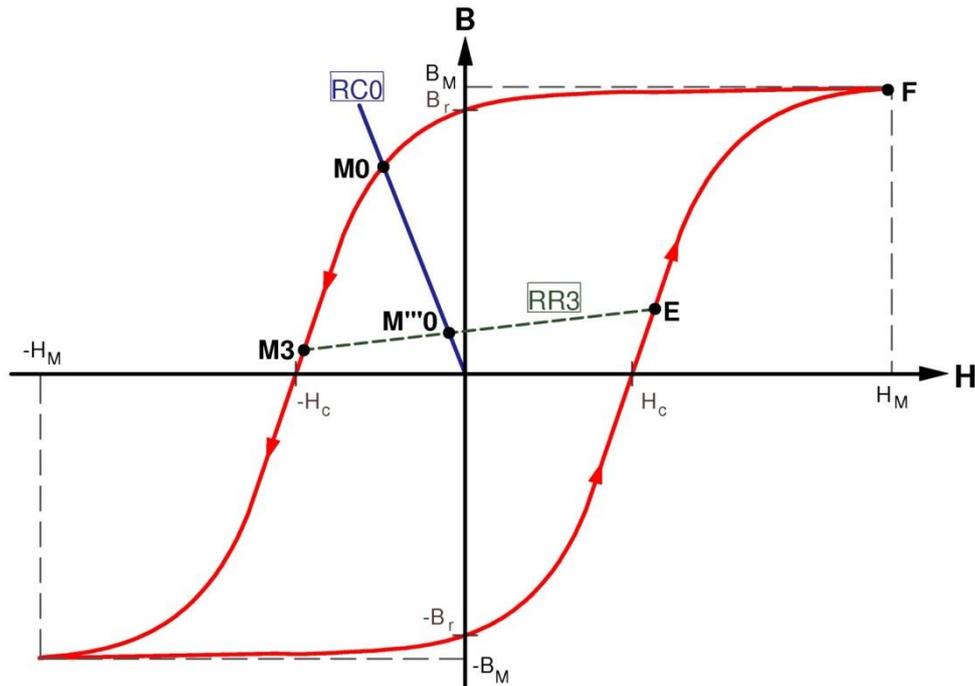


Fig. 27: Proceso de remagnetización del imán del circuito magnético de la Fig. 24

Para conseguir que un imán desmagnetizado vuelva a funcionar como estaba previsto -es decir, sobre la recta de retroceso RR2- es preciso remagnetizarlo. Para ello se hace pasar por la bobina una corriente positiva que genera una excitación magnética $+H_M$ suficientemente elevada como para conseguir que el imán cambie su estado previo de magnetización reducida y pase a magnetizarse completamente en sentido positivo. Es decir, lo que se pretende es que la excitación llegue a alcanzar un valor tal que todos los dominios magnéticos del imán queden orientados en sentido positivo.

El proceso de remagnetización se explica en la Fig. 27. Al principio, tras su desmagnetización, el circuito magnético quedó funcionando en el punto M3. Inicialmente se reduce la corriente negativa i_3 a cero, con lo que el punto de funcionamiento sigue la recta de retroceso RR3 y pasa del punto M3 al $M''0$. Ahora se hace circular por la bobina una corriente positiva que se va aumentando gradualmente con lo que el punto de funcionamiento va recorriendo la recta de retroceso RR3 hacia la derecha hasta que corta la rama inferior del ciclo de histéresis principal en el punto E. Recordemos que el ciclo de histéresis se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj, lo que significa que su rama inferior se recorre de izquierda a derecha. Por lo tanto, a partir del punto E, el punto de funcionamiento empieza a recorrer el ciclo de histéresis hasta que la corriente alcanza un valor tal que la excitación magnética toma el valor $+H_M$ y el punto de funcionamiento es, entonces, el F. A partir de ahora, la corriente se va reduciendo hasta anularse y el punto de funcionamiento recorre hacia la izquierda la rama superior del ciclo de histéresis hasta que, finalmente, cuando la corriente es nula el punto de funcionamiento es M0. A partir de ahí el circuito magnético está en la misma situación de partida que la explicada en la Fig. 25; por lo que, desde el momento en el que la corriente de la bobina alcance por primera vez el valor negativo i_2 , el circuito magnético empezará a funcionar otra vez sobre la recta de retroceso RR2 (Fig. 25).

MATERIALES Y CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Hasta ahora se ha venido suponiendo que las partes de los circuitos magnéticos de las Figs. 18 y 24 construidas con material ferromagnético blando tienen permeabilidad μ_{Fe} infinita, por lo que su reluctancia y su excitación magnética son nulas. Consideremos ahora que en el circuito magnético con imán y con bobina de la Fig. 24 la permeabilidad del material ferromagnético blando es elevada, pero no infinita. Entonces la aplicación del Teorema de Ampère no da la relación (48), sino esta otra

$$H_m l_m + H_\delta \delta + \sum_i H_{Fei} l_{Fei} = N i \quad (50)$$

En la expresión anterior el último término de la suma a la izquierda del signo igual es el sumatorio de los productos excitación \times longitud en todos los tramos del circuito magnético construidos con material ferromagnético blando.

Definimos el parámetro k_s como este cociente

$$k_s = \frac{H_\delta \delta + \sum_i H_{Fei} l_{Fei}}{H_\delta \delta} = 1 + \frac{\sum_i H_{Fei} l_{Fei}}{H_\delta \delta} \quad (51)$$

El valor de k_s no es fijo, pues va a depender de los valores de la permeabilidad en cada una de las piezas de material ferromagnético blando, y ya sabemos que en estos materiales la permeabilidad no es constante sino que es función de su excitación magnética. En cualquier caso el parámetro k_s tiene siempre un valor superior a 1.

Manipulando la relación (51) se obtiene esta otra expresión para calcular k_s :

$$k_s = 1 + \frac{\sum_i \mathcal{R}_{Fei} \Phi_{Fei}}{\mathcal{R}_\delta \Phi_\delta} = 1 + \frac{\sum_i \mathcal{R}_{Fei} (v_{Fei} \Phi_\delta)}{\mathcal{R}_\delta \Phi_\delta}$$

$$k_s = 1 + \frac{\sum_i v_{Fei} \mathcal{R}_{Fei}}{\mathcal{R}_\delta} \quad (52)$$

En esta relación \mathcal{R}_{Fei} es la reluctancia de la pieza i de material ferromagnético blando y v_{Fei} es su coeficiente de Hopkinson.

Supuesto conocido este parámetro k_s y combinando las relaciones (50) y (51) se llega a

$$H_m l_m + k_s H_\delta \delta = N i \quad (52)$$

Esto indica que ahora la ecuación de la recta de carga pasa de ser la representada por la expresión (49) a ser la siguiente

$$B_m = - \left[\frac{v_m \mu_0}{k_s} \frac{S_\delta}{\delta} \frac{S_m}{S_m} l_m \right] \left[H_m - \frac{N i}{l_m} \right] = - \left[\frac{v_m}{k_s} \frac{l_m}{S_m} \frac{1}{\mathcal{R}_\delta} \right] \left[H_m - \frac{N i}{l_m} \right] \quad (53)$$

Es decir, que ahora la recta de carga tiene una pendiente ligeramente menor, la cual se calcula dividiendo por k_s la pendiente que se obtuvo en (49), cuando se suponía que la permeabilidad de las piezas de material ferromagnético blando era infinita.

Como k_s no es constante, ahora la resolución del circuito magnético va a requerir de un proceso iterativo. Se parte de un valor supuesto de este parámetro, se calcula el circuito magnético y se obtienen los valores de la permeabilidad magnética en cada pieza de material ferromagnético blando. Con estas permeabilidades se calcula el valor del parámetro k_s correspondiente y se compara con el valor que se supuso al principio. Si la diferencia es apreciable habrá que repetir este cálculo con el nuevo valor de k_s y así sucesivamente hasta que la diferencia entre el valor inicialmente supuesto para el parámetro k_s y el calculado después sea suficientemente pequeña.

Pérdidas por corrientes de Foucault

Las máquinas eléctricas con imanes permanentes están diseñadas para que, en una situación ideal, los imanes no se vean sometidos a variaciones del campo magnético mientras la máquina esté funcionando con un régimen permanente. Sólo habrá variaciones puntuales del campo magnético cuando la máquina pase de un estado de funcionamiento a otro; por ejemplo, cuando varía el par que debe proporcionar.

Sin embargo, esto es una situación ideal. Así, por ejemplo, en una máquina síncrona excitada con imanes permanentes que girase a su velocidad de sincronismo, que tuviera un entrehierro perfectamente uniforme, que cada fase de su bobinado inducido originase una fuerza magnetomotriz la cual variase de forma perfectamente sinusoidal a lo largo del entrehierro y que este bobinado estuviera alimentado con un sistema perfectamente equilibrado de corrientes, las cuales variasen de una forma perfectamente sinusoidal en el tiempo, funcionaría de esta forma ideal, sin variaciones en el campo magnético. Pero la máquina tiene pequeñas variaciones en el entrehierro porque el bobinado se aloja en ranuras, su bobinado origina una fuerza magnetomotriz con armónicos espaciales y las corrientes que lo alimentan pueden contener armónicos temporales. Esto hace que, en muchas ocasiones, los imanes estén sometidos de forma continuada a pequeñas oscilaciones en el campo magnético. Esto mismo sucede en el circuito magnético con imán y bobina de la Fig. 24 si la bobina, en vez de alimentarla con una corriente perfectamente continua, se la alimenta con una corriente rectificada que contenga un cierto rizado; es decir, con unas pequeñas variaciones en su valor.

Estas variaciones continuadas y de pequeña amplitud del campo magnético producen la aparición de corrientes de Foucault en el interior de los imanes. Como ya vimos en el apartado correspondiente de este texto, estas corrientes dan lugar a unas pérdidas que son inversamente proporcionales a la resistividad del material ferromagnético por donde circulan.

Esta situación hace que la resistividad del imán sea un aspecto a tener en cuenta en el diseño de las máquinas eléctricas con imanes permanentes

Para reducir las pérdidas por corrientes de Foucault, además de procurar utilizar imanes construidos con materiales de elevada resistividad (o, lo que es equivalente, de baja conductividad eléctrica), conviene que los imanes sean de pequeño tamaño, especialmente su sección perpendicular a la dirección del campo magnético.

Materiales ferromagnéticos duros

Después de todo lo explicado hasta ahora, queda claro que las propiedades que interesa que posea un material ferromagnético duro, con el que se van a construir imanes permanentes, son estas:

- Alto valor del magnetismo remanente B_r , que le permita crear un inducción elevada.
- Alto valor del campo coercitivo H_c o, mejor aún, un elevado campo coercitivo intrínseco H_{ci} , para que sea difícil que pierda su magnetización.
- Un elevado producto energético máximo $(B_m H_m)_{Máx}$ para que el volumen necesario de material ferromagnético duro sea lo más pequeño posible.
- Elevada resistividad eléctrica ρ para reducir las pérdidas por corrientes de Foucault.
- Capacidad de conservar sus propiedades magnéticas y mecánicas con la temperatura. Esto significa que su temperatura máxima de servicio, la cual depende de su temperatura de Curie (que es la temperatura a la que el material deja de ser ferromagnético), debe ser lo más alta posible.
- Elevada resistencia al ataque químico de las substancias con las que pueda estar en contacto.
- Buenas cualidades mecánicas.

Es difícil encontrar materiales que posean todas estas propiedades y según la aplicación de que se trate habrá que primar unas sobre las otras.

Seguidamente se van a describir los materiales que se usan en la actualidad para la fabricación de imanes. Las características de estos materiales se resumen en las curvas de desmagnetización de la Fig. 28 y en la tabla II.

Alnico

Se trata de una aleación de hierro con aluminio, níquel y cobalto, lo que da origen a su nombre. Se empezó a emplear en la década de 1930 y constituyó la primera gran mejora que se desarrolló con respecto a las aleaciones de hierro usadas al principio de la tecnología eléctrica.

Este material es el que presenta la menor resistencia a la desmagnetización pero es el que soporta temperaturas más elevadas. También presenta una buena resistencia a la corrosión, es duro y resulta difícil de mecanizar.

Ferritas cerámicas

En la década de 1950 la empresa Philips fabricó los primeros imanes no metálicos con ferritas. Las ferritas cerámicas están formadas por polvo de óxido de hierro al que se le añade bario o estroncio que se prensa en una matriz y luego se *sinteriza*; es decir, se le somete a una temperatura elevada (de 1100 a 1300°C), pero inferior a la de fusión. Otra posibilidad es mezclar el polvo con un aglutinante de polímeros y comprimirlo en un molde, lo que permite fabricar imanes de cualquier forma.

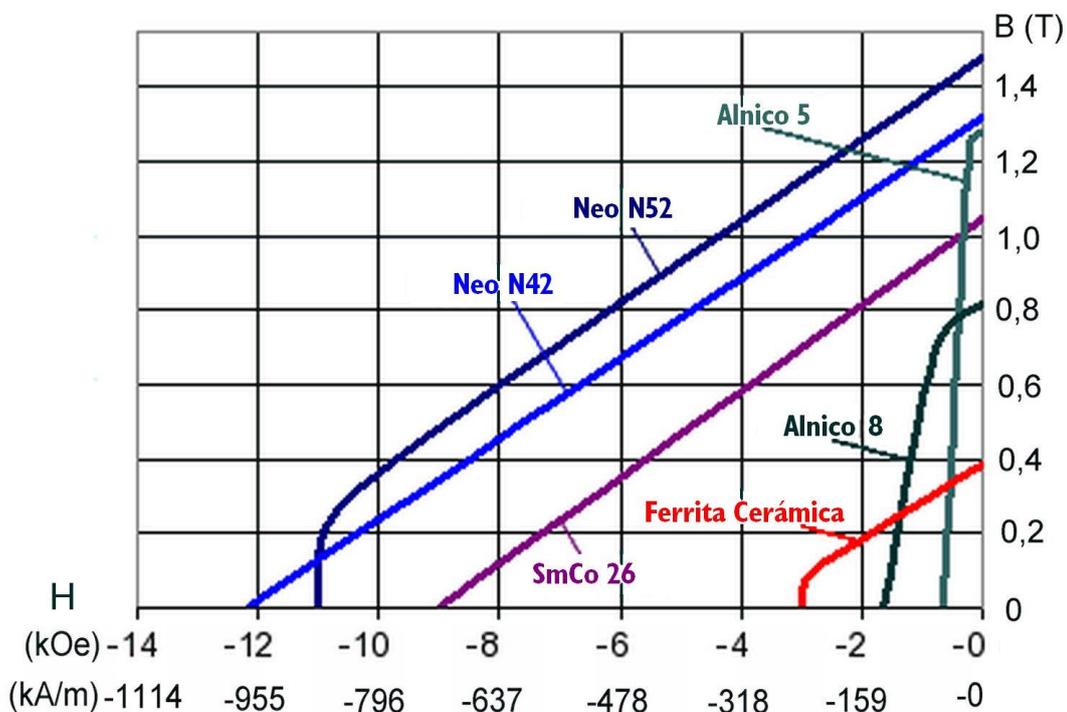


Fig. 28: Curvas de desmagnetización de diferentes materiales ferromagnéticos duros (Modificación de la imagen cuya fuente es: K&J Magnetics, Inc.)

Tabla II: Características de los materiales utilizados para construir imanes permanentes

	<i>AlNiCo</i>	<i>Ferrita</i>	<i>SmCo</i>	<i>NdFeB</i>
B_r (T)	0,71 a 1,35	0,23 a 0,40	0,83 a 1,16	0,83 a 1,41
H_c (kA/m)	40 a 150	150 a 290	480 a 840	700 a 1000
H_{ci} (kA/m)	42 a 173	200 a 380	560 a 2400	900 a 3000
(B_mH_m)_{Máx} (kJ/m ³)	10 a 70	8 a 30	130 a 240	190 a 400
Temperatura de Curie (°C)	810 a 870	450	750 a 825	310
Temperatura máxima de servicio (°C)	450 a 550	250 a 300	300 a 350	150
Resistividad eléctrica ρ a 20°C (Ω cm)	54x10 ⁻⁶ a 75x10 ⁻⁶	10 ⁴	53x10 ⁻⁶ a 86x10 ⁻⁶	120x10 ⁻⁶ a 160x10 ⁻⁶
Coste relativo	Moderado	Muy bajo	Muy alto	Alto
Resistencia a la desmagnetización	Baja	Moderada	Muy alta	Alta

Si en el momento de moldear el imán no se aplica ningún campo magnético se obtiene un material isótropo, pero si se aplica un campo magnético externo durante el moldeo se consigue un material anisótropo con unas propiedades magnéticas mejoradas en una dirección preferente.

Las ferritas son los imanes que presentan una resistencia eléctrica más alta (no son conductores de la electricidad). Las ferritas cerámicas son duras y frágiles.

El bajo precio de las ferritas hace que aún sea el material más empleado para fabricar los imanes de las máquinas eléctricas.

Samario-cobalto

Estos materiales se empezaron a utilizar en la década de 1960 y están formados por un compuesto intermetálico de una tierra rara, el samario, con un metal de transición, el cobalto.

Estos imanes son anisótropos, pues presentan una dirección preferente donde sus propiedades magnéticas son mejores. Para fabricarlos se pulveriza un lingote de la aleación, se introduce este polvo en un molde y se prensa a alta temperatura en presencia de un campo magnético que definirá la orientación preferente del imán.

Los imanes de neodimio-hierro-boro, que veremos seguidamente, presentan también unas buenas cualidades magnéticas y son más baratos. Sin embargo, los imanes de samario-cobalto son menos sensibles a los cambios de temperatura y tienen una mayor resistencia a la corrosión.

Los imanes de samario-cobalto son muy caros, por lo que su uso no se ha extendido masivamente. Se utilizan cuando primen sus ventajas frente a los de neodimio y el precio no sea un aspecto decisivo.

Algunas aplicaciones de estos imanes son: pequeños motores paso a paso, sistemas de posicionamiento en tubos de rayos catódicos, instrumental de laboratorio, auriculares y altavoces, etc.

Neodimio-hierro-boro

Estos imanes surgieron del intento de obtener imanes de tierras raras más baratos que los de samario-cobalto y fueron desarrollados por las empresas Suminoto y General Motors en la década de 1980. Actualmente son los imanes más utilizados junto con las ferritas y, al igual que estas, se pueden producir por sinterización o sobre una base de polímero. Hoy en día la mayor parte de la producción mundial de Nd-Fe-B se concentra en China.

De manera similar a los de samario-cobalto, los imanes de neodimio-hierro-boro también están formados por un compuesto intermetálico donde ahora la tierra rara es el neodimio y elemento de transición es el hierro. El neodimio es más abundante que el samario y el hierro más barato que el cobalto, por lo que estos imanes tienen un precio más asequible. El boro le añade a la aleación una gran anisotropía magnética y una mayor temperatura de operación. Estos imanes, por lo tanto, son anisótropos.

El Ne-Fe-B es bastante sensible a la corrosión. Este problema puede reducirse encapsulando los imanes.

Existen imanes de Nd-Fe-B comerciales con diferentes proporciones de neodimio y de hierro, lo que les confiere un amplio margen de propiedades disponibles.

Son los imanes más potentes que se fabrican, lo que, junto con su precio, hace que sean los imanes de tierras raras más utilizados en la actualidad. Así, se emplean en: algunos motores y generadores, ferrocarriles con levitación magnética, sistemas de separación magnética de materiales, equipos de diagnóstico por resonancia magnética nuclear, etc.

FUERZAS Y PARES EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Energía y coenergía magnéticas

Supóngase un circuito magnético similar al de la Fig. 4 formado por una bobina de N espiras arrollada sobre un núcleo de sección S , longitud media l , volumen V y reluctancia \mathcal{R} fabricado con un material de permeabilidad magnética μ . La bobina está recorrida por una corriente i -la cual produce la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) \mathcal{F} - y sus espiras están atravesadas por un flujo Φ , lo que hace que la bobina tenga unos enlaces de flujo Ψ . L es la inductancia de la bobina. Todas estas magnitudes están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 V &= S \cdot l & \mathcal{R} &= \frac{l}{\mu S} & \mathcal{F} &= N \cdot i = H \cdot l \\
 \Phi &= B \cdot S & \Psi &= N \cdot \Phi = L \cdot i & B &= \mu \cdot H
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

La **energía magnética** W_m almacenada en este sistema vale

$$W_m = \int_V \left[\int_0^B H dB \right] dV = \left[\int_0^B H dB \right] (S \cdot l) = \int_0^B (H \cdot l) (S \cdot dB) = \int_0^\Phi \mathcal{F} d\Phi$$

$$W_m = \int_0^\Phi (N \cdot i) d\Phi = \int_0^\Phi i (N \cdot d\Phi) = \int_0^\Psi i d\Psi$$

$$\boxed{W_m = \int_0^\Phi \mathcal{F} d\Phi = \int_0^\Psi i d\Psi}
 \tag{55}$$

De una manera puramente matemática y por analogía con la fórmula anterior, se define la magnitud **coenergía magnética** así

$$\boxed{W'_m = \int_0^\mathcal{F} \Phi d\mathcal{F} = \int_0^i \Psi di}
 \tag{56}$$

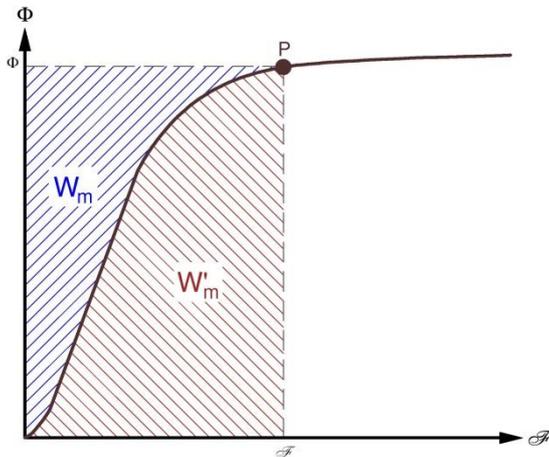


Fig. 29: Energía y coenergía magnéticas en un medio no lineal.

En la Fig. 29 se muestra la curva Φ - \mathcal{F} de este circuito magnético y las áreas que definen W_m y W'_m cuando el núcleo está construido con un material magnético no lineal (en dicha figura se ha supuesto que se trata de un material ferromagnético).

Es fácil comprobar que si el circuito magnético se construye con materiales magnéticos lineales, los cuales tienen una curva de magnetización rectilínea y dan lugar a una curva Φ - \mathcal{F} también rectilínea, la energía y la coenergía magnética son iguales (Fig. 30).

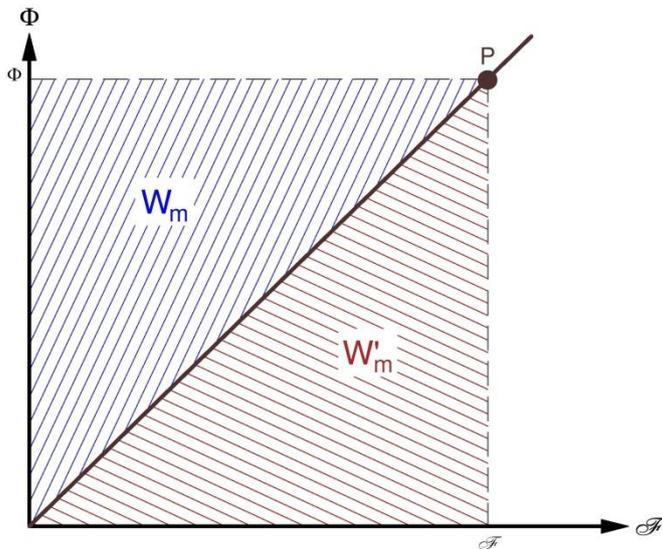


Fig. 30: Energía y coenergía magnéticas en un medio lineal ($W_m = W'_m$)

En los medios lineales se verifica lo siguiente:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F} \Phi = \frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} \quad (57)$$

(medios lineales)

Las relaciones anteriores se pueden expresar en función de la inductancia L de la bobina:

$$L = N \frac{\Phi}{i} \text{ y } \mathcal{F} = N i \quad \rightarrow \quad W_m = W'_m = \frac{1}{2} \mathcal{F} \Phi = \frac{1}{2} (N i) \left(\frac{L i}{N} \right)$$

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad (58)$$

(medios lineales)

Principio de los trabajos virtuales

Es evidente que en el circuito magnético de la Fig. 31 sobre la pieza móvil aparece una fuerza horizontal f que tiende a reducir el valor de la distancia x y que provoca una par M que tiende a reducir el ángulo θ .

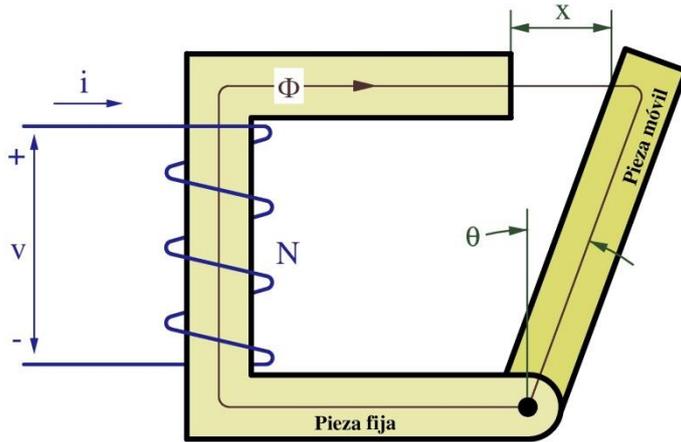


Fig. 31: Circuito magnético con una parte fija y otra móvil.

Para calcular f y M se puede utilizar el principio de los trabajos virtuales. Supóngase que la fuerza f provocara un movimiento diferencial en la dirección de x (o lo que es equivalente, un giro diferencial según el ángulo θ) y que este movimiento se realizase de forma que siempre se mantuviera constante el valor del flujo. Esto no significa que realmente el sistema se vaya a mover así, o ni siquiera que se vaya a mover (la pieza móvil puede estar bloqueada); pero si se supone un movimiento ficticio (virtual) de esta manera, se pueden deducir los valores de f y de M a partir de la variación de la energía magnética almacenada:

$$f = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{\Phi=\text{cte}} \quad M = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right|_{\Phi=\text{cte}} \quad (59)$$

Si el movimiento virtual se realizara de forma que la corriente i de la bobina permaneciera siempre constante, se deduce que f y M se pueden obtener a partir de las variaciones de la coenergía magnética:

$$f = + \left. \frac{\partial W'_m}{\partial x} \right|_{i=\text{cte}} \quad M = + \left. \frac{\partial W'_m}{\partial \theta} \right|_{i=\text{cte}} \quad (60)$$

Aplicando este principio, plasmado en las ecuaciones (59) y (60), a un sistema lineal, en el que se verifican las relaciones (57) y (58), se deduce que:

$$f = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (61)$$

(medios lineales)

$$M = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (62)$$

(medios lineales)

BIBLIOGRAFÍA

- [1] CAMPBELL, P. 1999. *Permanent magnet materials and their application*. Cambridge. Cambridge University Press.
- [2] COEY, J.M.D. 2010. *Magnetism and magnetic materials*. Cambridge. Cambridge University Press.
- [3] CORTES CHERTA, M. 1970. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo I: La máquina eléctrica en general*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [4] CORTES M., CORRALES J., ENSEÑAT A. 1991. *Teoría general de las máquinas eléctricas*. Madrid. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- [5] EVDOKIMOV, F.E. 1975. *Electricidad básica*. Barcelona. 1975. Editorial Gustavo Gili, S.A.
- [6] FERNÁNDEZ, J.C. 2004. *4-Materiales magnéticos*. Universidad de Buenos Aires. Argentina. <http://materias.fi.uba.ar/6209/download/download.htm>
- [7] FRAILE MORA, J. 2005. *Electromagnetismo y circuitos magnéticos*. Madrid McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.
- [8] FRAILE MORA, J. 2008. *Electromagnetismo y circuitos magnéticos*. Madrid McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.
- [9] JILES, D. 1991. *Introduction to magnetism and magnetic materials*. Londres. Chapman & Hall.
- [10] KASATKIN, A.S., NEMTSOV, M.V. 1986. *Electrical Engineering*. Moscú. Mir Publishers.
- [11] LORRAIN, P.; CORSON, D.R. 1977. *Campos y ondas electromagnéticos*. Madrid. Seleccionaciones científicas.
- [12] MAGNETIC MATERIALS PRODUCERS ASSOCIATION. 2000. *MMPA standard No. 0100-00: Standard specifications for permanent magnet materials*. Illinois. MMPA.
- [13] NIKULIN, N. 1988. *Ciencia de los materiales eléctricos*. Moscú. Editorial Mir.
- [14] PYRHÖNEN, JUHA y otros. 2010. *Design of rotating electrical machines*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [15] RAMÍREZ, J. 1980. *Enciclopedia CEAC de la electricidad. Materiales electrotécnicos*. Barcelona. Ediciones CEAC.
- [16] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2009. *Máquinas eléctricas*. Universidad de Cantabria (España). <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo%20magn%20entrehierro%20Web.pdf>
- [17] RODRÍGUEZ VÁZQUEZ, J. 1980. *Enciclopedia CEAC de la Electricidad: Materiales electrotécnicos*. Barcelona. Ediciones CEAC, S.A.
- [18] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.

© 2014, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.



Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>