UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA

ASPECTOS BÁSICOS DEL ELECTROMAGNETISMO APLICADO A LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Doctor Ingeniero Industrial

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

ASPECTOS BÁSICOS DEL ELECTROMAGNETISMO APLICADO A LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

Se denomina **campo** a una zona del espacio que goza de la propiedad de que en él se manifiesta un fenómeno físico. Así, por ejemplo, un campo gravitatorio es una zona del espacio que tiene la propiedad de que si se coloca una masa en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza.

Los campos se caracterizan por una magnitud que varía de un punto a otro del espacio. Si esta magnitud es vectorial se trata de un ***campo vectorial***.

En un campo vectorial una ***línea de campo*** es una línea que es tangente en todos sus puntos a la magnitud vectorial que define dicho campo.

Un **campo eléctrico** es una zona del espacio que tiene la propiedad física de que si se coloca una carga eléctrica en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza.

Este campo vectorial se caracteriza por la magnitud ***intensidad del campo eléctrico*** $\vec{\mathbf{E}}$ que es el valor para cada punto del espacio de la fuerza que se ejercería sobre una carga de valor unidad situada en dicho punto. En el Sistema Internacional $\vec{E}$ se mide en Voltios/metro (V/m).

El ***desplazamiento eléctrico*** $\vec{\mathbf{D}}$ es una magnitud que no depende del medio donde se manifiesta un campo eléctrico, que se mide en C/cm^2 (Culombios/cm^2) y que en medios lineales e isótropos se calcula mediante la siguiente expresión

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

donde ε es la ***permitividad absoluta*** del medio.

Un campo eléctrico puede ser originado por la presencia de otras cargas eléctricas o por la existencia de un campo magnético variable en el tiempo.

Un **campo magnético** es una zona del espacio que tiene la propiedad de que si se coloca una carga eléctrica <u>en movimiento</u> en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza. Normalmente las cargas en movimiento con las que se va a tratar en este texto son corrientes eléctricas circulando por un conductor.

Este campo vectorial se caracteriza por la magnitud ***inducción magnética*** $\vec{\mathbf{B}}$ que en el Sistema Internacional se mide en Teslas (T) y que se define a partir de la fuerza (fuerza de Lorentz) que aparece sobre una carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

($\times$ = Producto vectorial de vectores)

Un campo magnético puede ser originado por la presencia de otras cargas eléctricas en movimiento (normalmente corrientes eléctricas) y también por la existencia de campos eléctricos variables en el tiempo. Al analizar las máquinas eléctricas nos referiremos exclusivamente a campos magnéticos creados sólo por corrientes eléctricas.

La inducción magnética $\vec{B}$ en un medio lineal e isótropo se puede expresar así:

$$\vec{B} = \mu \, \vec{H}$$

La ***permeabilidad magnética absoluta*** $\boldsymbol{\mu}$ es un parámetro que representa la influencia de las propiedades magnéticas del medio sobre $\vec{B}$. La ***excitación magnética o intensidad magnetizante*** $\vec{\mathbf{H}}$ es una magnitud que depende de las causas que crean el campo magnético (corrientes y variaciones del campo eléctrico) y es independiente de las características del medio. En el Sistema Internacional μ se mide en Henrios/metro (H/m) -unidad que también se denomina Newtons/Amperios^2 (N/A^2) - y $\vec{H}$ en Amperios/metro (A/m).

La ***permeabilidad relativa*** $\boldsymbol{\mu_r}$ de un medio es un parámetro adimensional y se obtiene por cociente de su permeabilidad magnética μ entre la del vacío μ_0 ($\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}$ H/m).

Las ***líneas de inducción magnética*** son líneas tangentes en cada uno de sus puntos al vector inducción magnética $\vec{B}$.

La concentración de líneas de inducción en una zona del espacio es proporcional al valor de la inducción magnética en dicha zona.

El ***flujo magnético*** $\boldsymbol{\Phi}$ a través de una superficie S se obtiene mediante esta integral de superficie (Fig. 1):

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \qquad (1)$$

($\bullet$ = Producto escalar de vectores)

donde el vector $d\vec{S}$ en cada punto es perpendicular a la superficie S.

Según el sentido de $d\vec{S}$ en la expresión (1) se habla de flujo entrante o saliente. En el caso de que S sea una superficie cerrada se toma usualmente $d\vec{S}$ con sentido saliente.

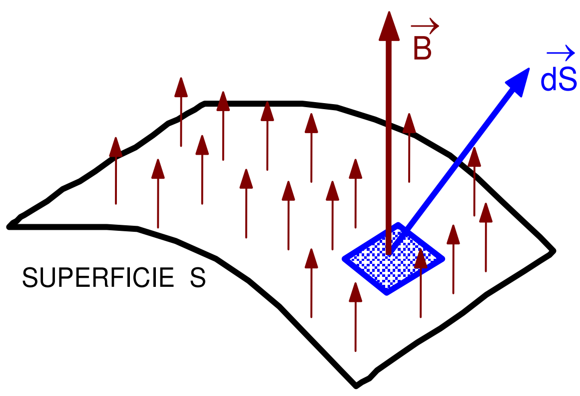


Fig. 1: Definición de flujo magnético Φ

PROPIEDADES DEL CAMPO MAGNÉTICO. POLOS MAGNÉTICOS

La inducción $\vec{B}$ tiene divergencia nula en todos sus puntos, por consiguiente se trata de un campo solenoidal y posee estas propiedades:

- Carece de puntos fuente y sumidero; es decir, es imposible encontrar un polo magnético aislado. Aunque un imán sea troceado muchas veces, cada una de sus partes tendrá siempre dos polos magnéticos.
- Las líneas de inducción, por lo tanto, no podrán nacer en un punto y morir en otro. Esto significa que estas líneas son siempre cerradas.
- Como consecuencia de lo anterior, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.
- La propiedad anterior conlleva el que los flujos magnéticos a través de superficies abiertas limitadas por el mismo contorno L (Fig. 2) son iguales.
- Aunque inicialmente el flujo es un concepto ligado a una superficie, la propiedad anterior permite definir el **flujo de una espira** (la cuál es un hilo conductor en forma de línea cerrada) como el flujo que atraviesa cualquiera de las superficies limitadas por dicha espira.

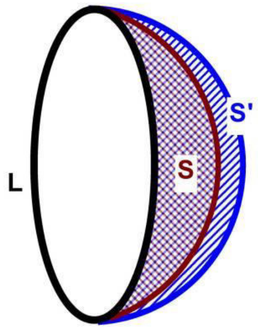


Fig. 2: Las superficies abiertas S y S' están limitadas por el mismo contorno L, luego están sometidas al mismo flujo magnético

De las propiedades que se acaban de exponer se deduce que el concepto de **polo magnético**, como zona fuente o sumidero de las líneas de inducción magnética, no tiene un sentido físico riguroso. Sin embargo, resulta cómodo utilizar esta noción de polo referida a un cuerpo que está en el seno de un campo magnético. De esta manera, un polo Norte de un cuerpo es una zona del mismo de donde salen líneas de inducción magnética hacia el exterior y un polo Sur es una zona del cuerpo donde penetran líneas de inducción magnética procedentes del exterior (Fig. 3).

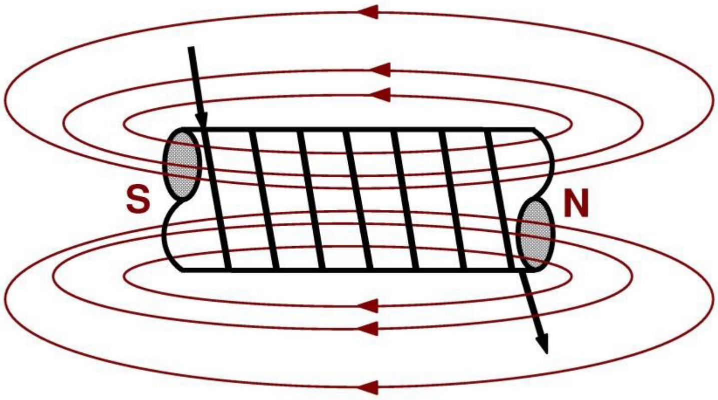


Fig. 3: Polos Norte y Sur de un solenoide

Las líneas del campo magnético creado por un conductor rectilíneo muy largo recorrido por una corriente eléctrica (Fig. 4) son circunferencias concéntricas cuyo centro está sobre el conductor y cuyo sentido viene dado por la ***regla del sacacorchos****: el sentido de las líneas de este campo magnético es el del giro de un sacacorchos para conseguir que avance en el sentido de la corriente eléctrica*.

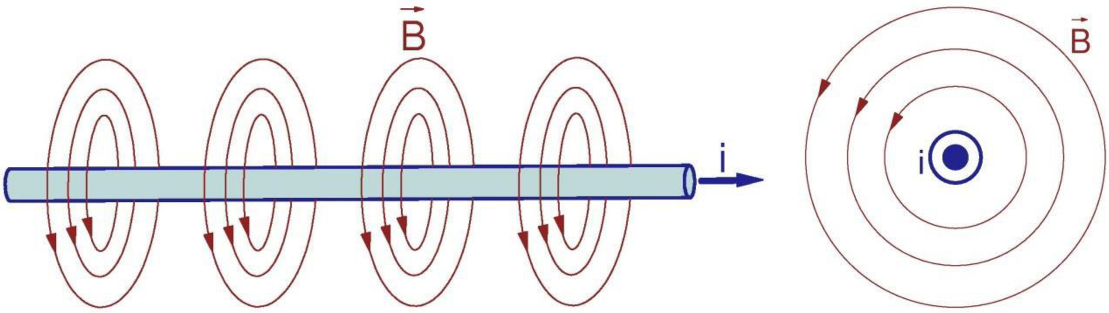


Fig. 4: Líneas del campo magnético originado por un conductor rectilíneo con corriente.

En el caso del campo magnético creado por una espira o una bobina con corriente (Figs. 3 y 10) también se puede usar la regla del sacacorchos, aunque aplicándola de una manera algo diferente: *si un sacacorchos imaginario gira en el sentido con el que la corriente eléctrica circula por la espira o bobina, dicho sacacorchos avanza con el mismo sentido que tienen las líneas de campo magnético en el interior de la espira o bobina*.

ENLACES DE FLUJO

En un apartado anterior se ha definido el flujo de una ***espira***, pero muchas veces lo que se tiene es una ***bobina***, que es un conjunto de espiras conectadas en serie (como el solenoide de la Fig. 3), o una ***fase*** del bobinado de una máquina eléctrica. En este caso se emplea otra magnitud de flujo denominada **enlaces de flujo** o **flujo total concatenado** $\boldsymbol{\psi}$ [1].

Sea una bobina compuesta por n espiras en serie las cuáles tienen los siguientes flujos magnéticos: Φ_1, Φ_2,.., Φ_n. Los enlaces de flujo ψ de esta bobina es la suma de los flujos magnéticos de todas sus espiras:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n \qquad (2)$$

Más adelante se describirán las máquinas eléctricas. Entonces se observará que sus bobinados (también denominados devanados o arrollamientos) están divididos en una o más ***fases***, cada una de las cuáles está conectada a una tensión de la red eléctrica. Cada fase es un circuito constituido por una o varias ***ramas en paralelo*** idénticas cada una de las cuáles, a su vez, está formada por una o varias bobinas en serie. El conjunto de bobinas en serie que constituye una rama en paralelo forman un conjunto de N espiras en serie cuyos flujos magnéticos son Φ_1, Φ_2,.., Φ_N. Los enlaces de flujo o flujo total concatenado de una fase ψ son los correspondientes a una de sus ramas en paralelo:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N \qquad (3)$$

---

[1] En los países de habla inglesa esta magnitud se suele representar por λ .

Si la fase pertenece a un devanado <u>concentrado</u>, de tal manera que todas sus espiras están sometidas simultáneamente al mismo flujo Φ, se cumplirá que

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N = N \cdot \Phi \qquad (4)$$

Si, como es habitual en las máquinas eléctricas, la fase forma parte de un devanado <u>distribuido</u>, las espiras que la forman están sometidas a flujos diferentes. En el caso de que la inducción magnética que actúa sobre la fase esté distribuida sinusoidalmente en el espacio se puede demostrar que se cumple esta relación:

$$\psi = N \cdot \xi_b \cdot \Phi \qquad (5)$$

Los símbolos empleados en las fórmulas anteriores son:

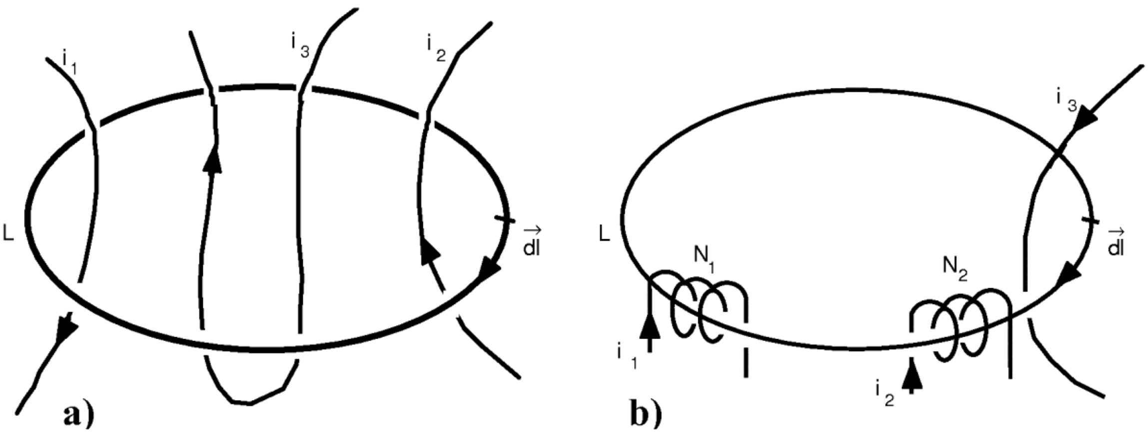
- N es el número de espiras en serie de una de las ramas en paralelo de la fase.
- ξ_b es el factor de bobinado de la fase (en algunos textos este coeficiente se le designa como k o k_w).
- Φ es el flujo que atravesaría a una espira de paso diametral situada de tal forma que sus ejes coincidieran con los de la fase.

Recuérdese que en el Sistema Internacional la inducción magnética B se mide en Teslas (T) y los flujos Φ y los enlaces de flujo ψ se miden en Webers (Wb).

TEOREMA DE AMPÉRE

El Teorema de Ampére permite analizar campos magnéticos originados exclusivamente por corrientes eléctricas y viene dado por la siguiente expresión:

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum_j i_j \qquad (6)$$



$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = i_1 - i_2$

$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = N_1\, i_1 - N_2\, i_2 + i_3$

<u>Fig. 5</u>: Ejemplos de aplicación del Teorema de Ampére.

Este teorema dice que si se integra el vector excitación $\vec{H}$ a lo largo del camino cerrado L (circulación de $\vec{H}$ a lo largo de L) el resultado obtenido es igual a la suma de todas las corrientes que encierra el contorno L. Para ello es preciso tener en cuenta que se consideran positivas las corrientes dirigidas en el sentido de un sacacorchos cuando se lo gira en el sentido que se haya tomado como positivo para $d\vec{l}$ al realizar la integral anterior. Así, en la Fig. 5a, $d\vec{l}$ visto desde arriba, tiene sentido horario, por lo que la corriente i_1 es positiva y la corriente i_2 es negativa. La corriente i_3 tiene un efecto nulo.

Si el camino L incluye N bobinas a las que recorre por su interior (Fig. 5b), el Teorema de Ampére se puede escribir así:

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum_{j=1}^{N} N_j \cdot i_j \tag{7}$$

En la expresión anterior N_j e i_j son, respectivamente, el número de espiras en serie y la corriente de la bobina j. En el cómputo de las N bobinas abrazadas por el camino L se incluyen también los conductores con corriente, como la i_3 de la Fig. 5b, los cuáles se consideran como bobinas de una sola espira.

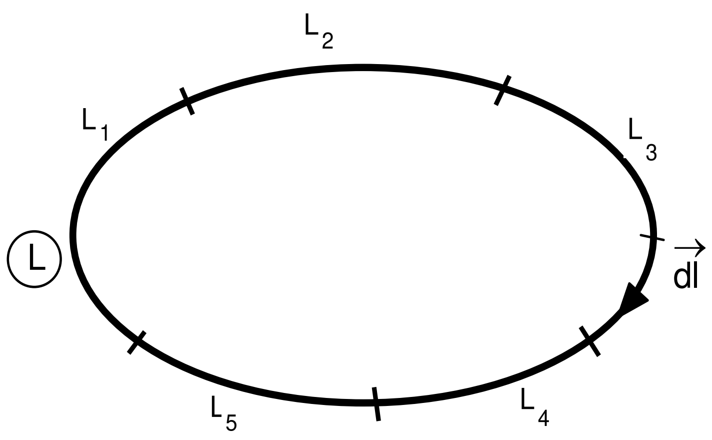
A la circulación $\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l}$ se le denomina **fuerza magnetomotriz (f.m.m.)** del recorrido L y se la representa por $\mathscr{F}$.

Se denomina **fuerza magnetomotriz de la bobina j** a la f.m.m. que existiría si no hubiera más corriente que la de la bobina j. Se lo representa por $\mathscr{F}_j$ y su valor es igual al producto $N_j \cdot i_j$. La f.m.m. se mide en Amperios-vuelta o, simplemente, en Amperios.

Nótese que, a pesar de su nombre, la fuerza magnetomotriz no se trata de una fuerza mecánica que se mida en Newtons. No confunda esta magnitud con la fuerza electromotriz (f.e.m.) de los circuitos eléctricos.

De las definiciones anteriores se deduce que la ecuación (7) se puede escribir así:

$$\mathscr{F} = \sum_{j=1}^{N} \mathscr{F}_j \tag{8}$$



<u>Fig. 6</u>: Descomposición del recorrido L en los tramos L_1, L_2, ..., L_5.

Por otra parte, en muchas ocasiones el camino L interesa descomponerlo en M tramos L_1, L_2,…, L_M (Fig. 6) de tal forma que:

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{H} \bullet d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{H} \bullet d\vec{l} + \cdots + \int_{L_M} \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum_{k=1}^{M} \left(\int_{L_k} \vec{H} \bullet d\vec{l} \right)$$

Se denomina **diferencia de potencial magnético o caída de tensión magnética (F_k)** en el tramo L_k a

$$F_k = \int_{L_k} \vec{H} \bullet d\vec{l} \tag{9}$$

Luego, el Teorema de Ampére se puede expresar así:

$$\mathscr{F} = \sum_{j=1}^{N} \mathscr{F}_j = \sum_{k=1}^{M} F_k \tag{10}$$

Si se tiene un campo eléctrico variando en el tiempo con frecuencias altas -muy superiores a las habituales en la Electrotecnia- el campo magnético es debido no sólo a las corrientes eléctricas, sino también a las variaciones temporales del desplazamiento eléctrico y en lugar del Teorema de Ampére habría que utilizar el ***Teorema de Ampére-Maxwell***:

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum_j \left(i_j + \iint_{S_j} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \right)$$

Dadas las frecuencias que se usan en la Electrotecnia, que raramente superan el kilohercio, en las máquinas eléctricas no es necesario usar el Teorema de Ampére-Maxwell y bastará con emplear el Teorema de Ampére.

CONDICIONES DE CONTORNO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL LÍMITE ENTRE DOS MEDIOS MATERIALES DISTINTOS

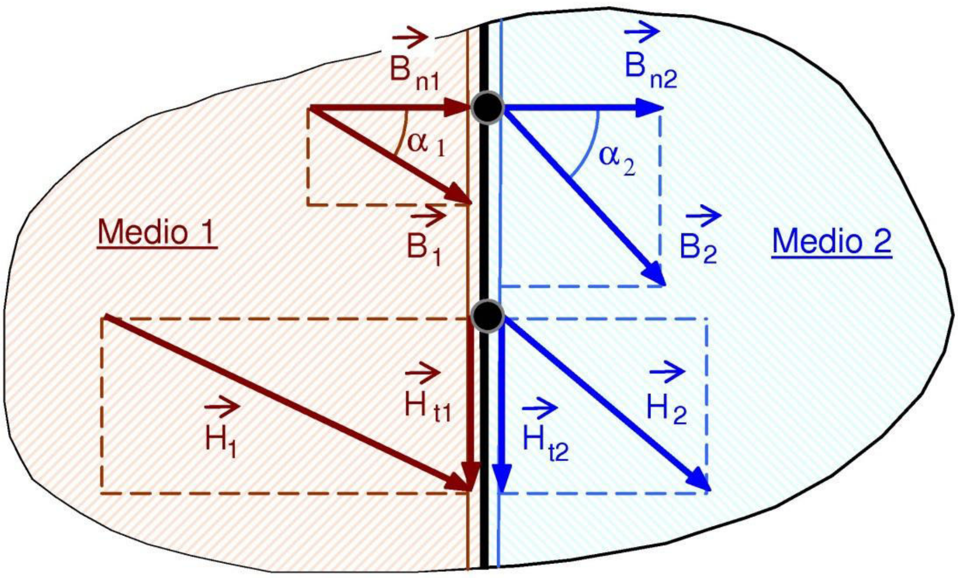


Fig. 7: Condiciones de contorno en el límite de dos medios magnéticos

Sean dos medios materiales de permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2, respectivamente (permeabilidades relativas μ_{r1} y μ_{r2}), separados por una superficie donde la densidad de corriente J es nula en todos sus puntos (Fig. 7). En dicha superficie se cumplen las siguientes condiciones:

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \tag{11}$$

donde B_n es la componente de la inducción magnética perpendicular a la superficie de separación y H_t es la componente de la excitación magnética paralela a dicha superficie. Los subíndices 1 y 2 se refieren a los dos medios materiales.

En el caso de que el medio 1 sea un medio amagnético (con una permeabilidad prácticamente igual a la del vacío) y el medio 2 sea ferromagnético (con una permeabilidad elevada), se tiene que:

$$\mu_{r2} >>> \mu_{r1}$$

Luego

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_1 \approx 0} \tag{12}$$

Por lo tanto, *las líneas de inducción magnética en la superficie de separación entre un medio amagnético y un medio ferromagnético son perpendiculares a dicha superficie en el lado del medio amagnético*.

FUERZA DE LAPLACE

Cuando un elemento conductor de longitud diferencial $d\vec{l}$ está recorrido por una corriente i en el seno de un campo magnético cuya inducción es $\vec{B}$, aparece sobre él una fuerza diferencial $d\vec{F}$ que se calcula así:

$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \times \vec{B} \tag{13}$$

($\times$ = Producto vectorial de vectores)

A la expresión anterior se la denomina fuerza de Laplace.

Por lo tanto, un conductor de longitud L recorrido por una corriente i y situado en el seno de un campo magnético se ve sometido a una fuerza $\vec{F}$ que se obtiene integrando la expresión (13):

$$\vec{F} = \int_L i\, d\vec{l} \times \vec{B} \tag{14}$$

En el caso particular de que el conductor sea rectilíneo y de que la inducción magnética $\vec{B}$ a lo largo de todo el conductor tenga el mismo valor y sea perpendicular al mismo (Fig. 8), de la expresión (14) se deduce que la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre este conductor tiene un módulo F cuyo valor es

$$F = B\,i\,L \tag{15}$$

y cuyo sentido se puede determinar por la *regla de la mano izquierda* (Fig. 9). En efecto, si se colocan los dedos pulgar, índice y corazón de la mano izquierda en tres direcciones en el espacio perpendiculares entre sí, dichos dedos indican, respectivamente, los sentidos de la fuerza $\vec{F}$, de la inducción magnética $\vec{B}$ y de la corriente i. Para acordarse del significado de cada dedo se puede usar la regla mnemotécnica del **FBI**:

F (Fuerza $\vec{F}$):	Pulgar
B (Inducción $\vec{B}$)	Índice
I (Corriente i)	Medio

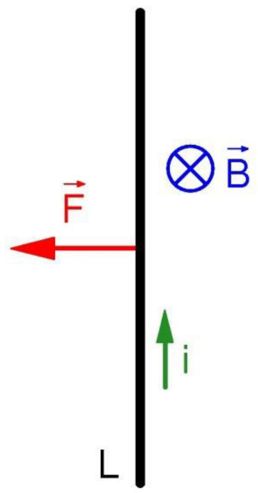


Fig. 8: *Fuerza de Laplace sobre un conductor rectilíneo y perpendicular a la inducción magnética $\vec{B}$ (la cuál en esta figura es un vector perpendicular al plano del papel y entrante a éste)*

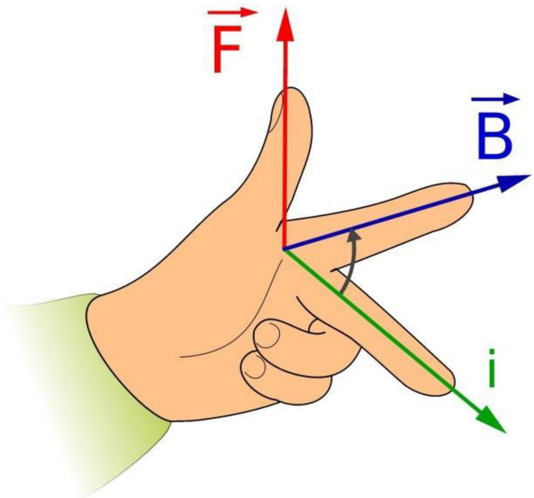


Fig. 9: *Regla de la mano izquierda para determinar el sentido de la fuerza de Laplace. (Imagen modificada de la dibujada por J. F. Melero y que está disponible en Wikipedia Commons)*

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA. LEYES DE FARADAY Y DE LENZ

El fenómeno de la inducción electromagnética, descubierto por Faraday, consiste en que un campo magnético que varía en el tiempo da lugar a un campo eléctrico; lo cual conlleva que en un conductor sometido a la acción de un campo magnético variable en el tiempo aparezca una fuerza electromotriz (f.e.m.) que se puede aprovechar para generar una corriente eléctrica.

A continuación se va a analizar este fenómeno sobre una espira, una bobina o una fase y un conductor abierto.

F.e.m. inducida sobre una espira

Una espira es un conductor que forma una curva cerrada y que, como se mostró en un apartado anterior (Fig. 2), tiene un flujo magnético igual al correspondiente a una superficie cualquiera que tenga dicha espira como contorno límite.

La ***Ley de Faraday*** indica que cuando el flujo magnético de una espira varía con el tiempo se induce sobre ella una fuerza electromotriz (f.e.m.) de valor igual a la derivada temporal de dicho flujo. El sentido de dicha f.e.m. viene dado por la ***Ley de Lenz***: la f.e.m. inducida tiene un sentido tal que intenta dar lugar a una corriente que, a su vez, origina un campo magnético adicional que se opone a las variaciones de flujo que iniciaron todo este fenómeno.

La Ley de Faraday se puede escribir de dos maneras distintas según que se quiera trabajar con fuerzas electromotrices (f.e.m.s) o con fuerzas contraelectromotrices (f.c.e.m.s).

En el caso más frecuente de trabajar con la fuerza electromotriz, la Ley de Faraday para una espira es así

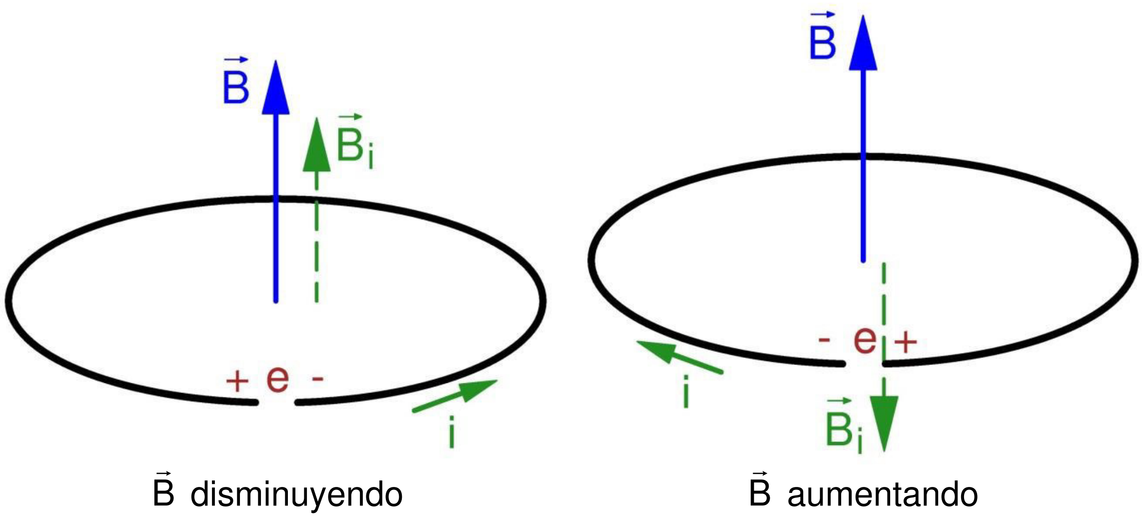
$$e = -\frac{d\,\Phi}{d\,t} \tag{16}$$

(e = f.e.m. de la espira)

Mientras que en el caso de trabajar con la fuerza contraelectromotriz, la Ley de Faraday para una espira es así:

$$e = +\frac{d\,\Phi}{d\,t} \tag{17}$$

(e = f.c.e.m. de la espira)



a) (f.e.m.) **b)** (f.c.e.m.)

Fig. 10: Convenios de signos de $\vec{B}$ y de e (es decir, indicación de los sentidos de estas magnitudes cuando son positivas) para la Ley de Faraday en una espira: a) F.e.m.; b) F.c.e.m.

La Fig. 10a representa el convenio de signos para la f.e.m. Supóngase una espira circular, que de momento supondremos perfectamente cerrada (sin el pequeño corte mostrado en la figura), atravesada por un campo magnético vertical orientado hacia arriba cuya inducción magnética $\vec{B}$ varía en el tiempo. Esto hace que el flujo magnético Φ de la espira varíe en el tiempo e induzca sobre ella una fuerza electromotriz e que viene dada por la relación (16) que incluye un signo negativo.

En consecuencia, según esta relación (16) la f.e.m. e tendrá signo positivo cuando la derivada temporal del flujo sea negativa; es decir, cuando el flujo esté disminuyendo. Según la Ley de Lenz esta f.e.m. se opondrá a las variaciones de flujo que la originan y, por tanto, intentará que el flujo no disminuya procurando originar una corriente como la mostrada en la Fig. 10a que, según la regla del sacacorchos, crea una inducción $\vec{B}_i$ que refuerza el flujo. En resumen, para una inducción magnética $\vec{B}$ vertical orientada hacia arriba la f.e.m. inducida e será positiva cuando trata de crear una corriente que circula en sentido antihorario vista desde arriba (Fig. 10a).

Para analizar la polaridad de esta f.e.m. supóngase ahora que -como se muestra en la Fig. 10a- se ha hecho un pequeño corte en la espira. La f.e.m. tendrá el mismo valor que antes, pero no podrá circular corriente, a no ser que se cierre el circuito de la espira conectando los extremos del corte a un circuito exterior. De esta forma la espira pasa a actuar como un generador que alimenta al circuito exterior donde la corriente deberá circular desde la izquierda a la derecha del corte. De todo esto se deduce que el extremo izquierdo del corte tiene polaridad positiva y el extremo derecho tiene polaridad negativa (véase la Fig. 10a).

La Fig. 10b representa el convenio de signos para la f.c.e.m. Supóngase la misma espira de antes cuyo flujo magnético Φ varía en el tiempo debido a que la inducción magnética vertical $\vec{B}$ también es variable. Esto provoca que se induzca sobre ella una fuerza contraelectromotriz e que viene dada por la relación (17).

En consecuencia, la f.c.e.m. e tendrá signo positivo cuando la derivada temporal del flujo sea positiva; es decir, cuando el flujo esté aumentando. Según la Ley de Lenz esta f.c.e.m. se opondrá a las variaciones de flujo que la originan y, por tanto, intentará que el flujo no aumente procurando originar una corriente como la mostrada en la Fig. 10b que crea una inducción $\vec{B}_i$ que se opone al flujo. En resumen, para una inducción magnética $\vec{B}$ vertical dirigida hacia arriba la f.c.e.m. inducida e será positiva cuando trata de crear una corriente que circula en sentido horario vista desde arriba (Fig. 10b).

Para analizar la polaridad de esta f.c.e.m. supóngase ahora que se ha hecho un pequeño corte en la espira (Fig. 10b). No podrá circular corriente a no ser que se cierre el circuito de la espira conectando los extremos del corte a un circuito exterior donde la corriente deberá circular desde la derecha hacia la izquierda del corte. Luego el extremo derecho del corte tiene polaridad positiva y el extremo izquierdo tiene polaridad negativa (Fig. 10b).

A partir de ahora sólo se va a razonar con fuerzas electromotrices. Es evidente que para el cálculo de fuerzas contraelectromotrices sólo habrá que cambiar el signo de e en las expresiones correspondientes.

Dado que el flujo magnético viene dado por la fórmula (1), sus variaciones en el tiempo pueden ser debidas a tres causas que pueden suceder aislada o conjuntamente:

- La inducción magnética $\vec{B}$ es variable en el tiempo (como se ha supuesto en las Figs. 10a y 10b), lo cual hace que el flujo Φ también lo sea.
- La inducción magnética $\vec{B}$ no varía en el tiempo, pero sí en el espacio y la espira está en movimiento. Esto da lugar a que en diferentes instantes de tiempo la espira esté situada en posiciones diferentes donde la inducción es distinta y, por lo tanto, origina diferentes valores de flujo Φ. Al final, el movimiento de la espira hace que existan variaciones temporales de flujo magnético.
- La espira cambia de forma con el tiempo por lo que se modifica su superficie y, consecuentemente, el flujo magnético abrazado por ella.

F.e.m. inducida sobre una bobina o sobre una fase de un devanado

Si tenemos una fase de un devanado constituida por una o varias ramas en paralelo de N espiras en serie, la f.e.m. total inducida en la fase será igual a la suma de las N f.e.m.s inducidas en las espiras de una rama:

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_N = -\left(\frac{d\,\Phi_1}{d\,t} + \frac{d\,\Phi_2}{d\,t} + \ldots + \frac{d\,\Phi_N}{d\,t}\right)$$

Y, por lo tanto, recordando la definición de la magnitud enlaces de flujo ψ, dada por la expresión (3), se llega finalmente a este resultado:

$$e = -\left(\frac{d\,\Phi_1}{d\,t} + \frac{d\,\Phi_2}{d\,t} + \ldots + \frac{d\,\Phi_N}{d\,t}\right) = -\frac{d\,\psi}{d\,t}$$

$$e = -\frac{d\,\psi}{d\,t} \tag{18}$$

(e = f.e.m.)

La expresión (18) también es válida para una bobina y constituye una forma más general de la Ley de Faraday que la relación (16), la cual sólo vale para una espira.

En el caso de aplicar la expresión anterior a un bobinado concentrado, cuyas espiras tienen todas el mismo flujo Φ y que, por lo tanto, cumple la relación (4), se obtiene esta relación menos general que la (18):

Devanado concentrado

$$e = -N\,\frac{d\,\Phi}{d\,t} \tag{19}$$

(e = f.e.m.)

F.e.m. inducida sobre un conductor abierto en movimiento

En el caso de un conductor en movimiento en el seno de un campo magnético, la f.e.m. inducida sobre él se puede calcular aplicando la misma fórmula (16) que en una espira si el flujo magnético Φ se interpreta como el flujo barrido por el conductor en su movimiento. Luego, en un conductor en movimiento la f.e.m. inducida se puede obtener así:

$$e = -\frac{d\,\Phi}{d\,t} \tag{20}$$

(e = f.e.m. del conductor; Φ = Flujo barrido por el conductor en su movimiento)

En la Fig. 11 se muestra un conductor que se mueve hacia la derecha con una velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético con una inducción $\vec{B}$ de dirección perpendicular al plano del papel y sentido entrante. Inicialmente el conductor está en la posición 1 y al cabo de un tiempo el conductor se ha movido y ocupa la posición 2. En este movimiento el conductor ha barrido el área sombreada S y el flujo correspondiente a esta área es el que se debe utilizar en la expresión (20).

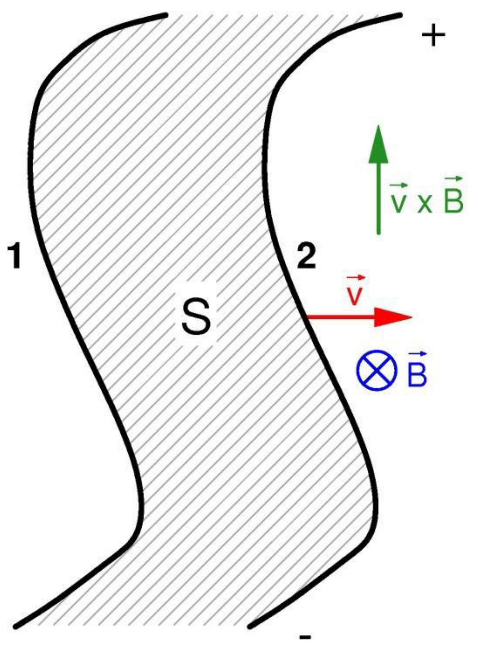


Fig. 11: F.e.m. inducida y flujo barrido por un conductor que se mueve a la derecha con la velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético cuya inducción $\vec{B}$ es perpendicular al plano del papel y de sentido entrante.

Esta f.e.m. inducida se puede entender a partir la ***Fuerza de Lorentz*** que experimenta una carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético cuya inducción es $\vec{B}$:

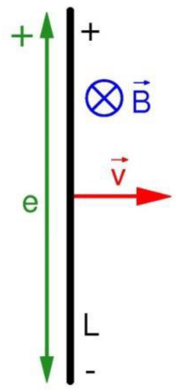
$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{21}$$

Por lo tanto, las cargas libres del conductor en movimiento de la Fig. 11 experimentarán una fuerza de dirección vertical (dirección del producto vectorial de $\vec{v}$ por $\vec{B}$) que desplaza hacia arriba a las cargas positivas y hacia abajo a las negativas. Luego, el conductor quedará cargado positivamente en su extremo superior y negativamente en su extremo inferior.

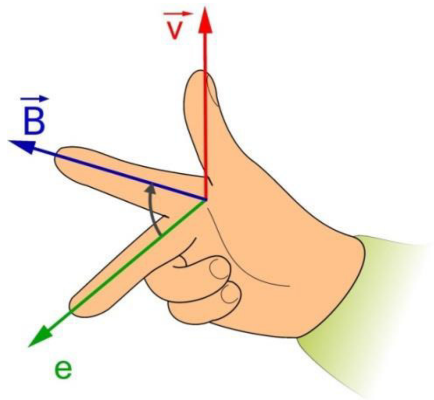
En el caso particular (Fig. 12) de que el conductor sea rectilíneo, su longitud sea L, la inducción magnética $\vec{B}$ a lo largo de todo el conductor tenga el mismo valor y sea perpendicular al mismo y la velocidad $\vec{v}$ sea perpendicular tanto a la inducción $\vec{B}$ como al conductor se puede deducir que la f.e.m. inducida sobre el conductor vale:

$$e = B\,L\,v \tag{22}$$

La polaridad de esta f.e.m. se puede determinar por la <u>*regla de la mano derecha*</u> (Fig. 13). En efecto, si se colocan los dedos pulgar, índice y corazón de la mano derecha en tres direcciones en el espacio perpendiculares entre sí, dichos dedos indican, respectivamente, los sentidos de la velocidad $\vec{v}$, de la inducción magnética $\vec{B}$ y de la f.e.m. e (aceptando que la f.e.m. apunta hacia el lado del conductor con polaridad positiva).



<u>Fig. 12</u>: F.e.m. inducida sobre un conductor rectilíneo que se mueve con la velocidad $\vec{v}$ y es perpendicular a la inducción magnética $\vec{B}$ (la cuál en esta figura es un vector perpendicular al plano del papel y entrante a éste)



<u>Fig. 13</u>: Regla de la mano derecha para determinar el sentido de la f.e.m. inducida sobre un conductor en movimiento. (Imagen modificada de la dibujada por J. F. Melero y que está disponible en Wikipedia Commons)

Nótese que tanto en las reglas de la mano izquierda como de la mano derecha tenemos una magnitud mecánica (la fuerza $\vec{F}$ o la velocidad $\vec{v}$), una magnitud magnética (la inducción magnética $\vec{B}$) y una magnitud eléctrica (la corriente i o la f.e.m. e). Por lo tanto podemos aplicar la regla mnemotécnica del **FBI** en ambos casos si para la mano derecha se interpreta la letra **F** como la magnitud mecánica (que en este caso es la velocidad $\vec{v}$) y la letra **I** como la magnitud eléctrica (que en este caso es la f.e.m. e). En la Tabla I se resume el uso de esta regla mnemotécnica.

<u>Tabla I</u>: Regla mnemotécnica del FBI

Letra	Dedo	Tipo de magnitud	Regla de la mano izquierda	Regla de la mano derecha
F	Pulgar	Mecánica	Fuerza ($\vec{F}$)	Velocidad ($\vec{v}$)
B	Índice	Magnética	Inducción ($\vec{B}$)	Inducción ($\vec{B}$)
I	Medio	Eléctrica	Corriente (i)	F.e.m. (e)

INDUCTANCIAS

La inductancia mutua es un parámetro que cuantifica la interacción magnética entre dos bobinas mientras que la autoinducción es otro parámetro que cuantifica el efecto del campo magnético creado por una bobina sobre sí misma. En el estudio de máquinas eléctricas se generalizan estos parámetros para aplicarlos, no a bobinas individuales, sino a fases de los bobinados (recordemos que una fase de un devanado, bobinado o arrollamiento es un conjunto de bobinas que están conectadas en serie o que están formando varias ramas idénticas conectadas en paralelo de manera que todas las bobinas están recorridas por corrientes de igual valor).

De esta manera, si una fase J de un devanado recorrida por la corriente i_J genera una inducción magnética que al actuar sobre otra fase K hace que ésta reciba un flujo concatenado o enlaces de flujo ψ_{KJ} (Fig. 14a), se denomina **inductancia mutua** o **coeficiente de inducción mutua** entre K y J a este coeficiente:

$$L_{KJ} = \frac{\psi_{KJ}}{i_J} \tag{23}$$

En el caso de que sea la misma fase K de un devanado, recorrida por la corriente i_K, la que genera la inducción magnética y la que origina sobre sí misma los enlaces de flujo ψ_K (Fig. 14b), se define otro coeficiente, análogo al anterior, denominado **inductancia propia**, **autoinductancia** o **coeficiente de autoinducción**:

$$L_K = \frac{\psi_K}{i_K} \tag{24}$$

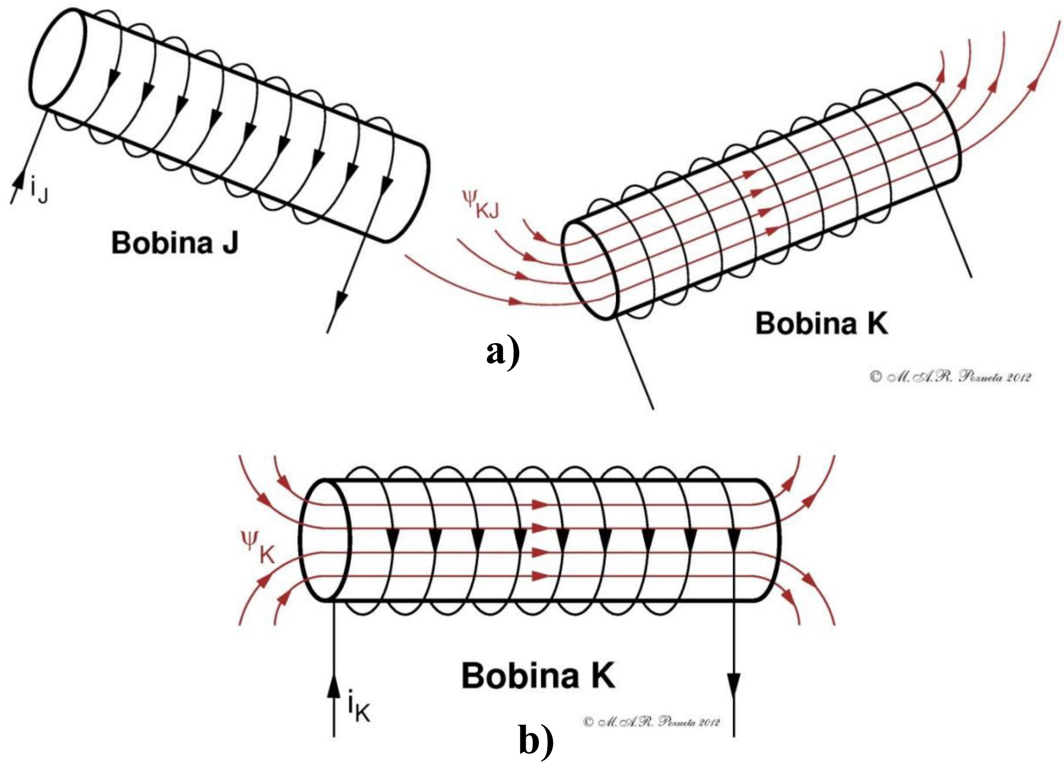


Fig. 14: Inducción mutua (a) y autoinducción (b) entre bobinas

En los medios magnéticos lineales (donde la permeabilidad magnética es constante) estos parámetros dependen sólo de la geometría del sistema. Si las fases de los devanados están situadas sobre un material ferromagnético (que es no lineal y, por consiguiente, su permeabilidad magnética no es constante), estos coeficientes dependen también del valor de las corrientes que circulen por los bobinados.

ENERGÍA ALMACENADA EN EL CAMPO MAGNÉTICO

Una zona del espacio en donde existe un campo magnético almacena una energía por unidad de volumen w_m de valor

$$w_m = \frac{\text{Energía magnética}}{\text{volumen}} = \frac{W_m}{\text{volumen}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} w_m = \int_0^B \vec{H} \bullet d\vec{B} \\ \bullet = \text{producto escalar} \end{array}} \qquad (25)$$

En la mayor parte de los casos prácticos sucede que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{H}$ tienen la misma dirección (por ejemplo, en los medios homogéneos e isótropos), lo que hace que el producto escalar de la expresión anterior se convierta en un producto de módulos. En estos casos, si se dispone de la curva B-H (curva de imanación) del material (Fig. 15), la energía magnética almacenada por unidad de volumen w_m , para unos valores de B y de H dados por el punto P, es igual al área encerrada entre el eje de ordenadas y la curva (Fig. 15).

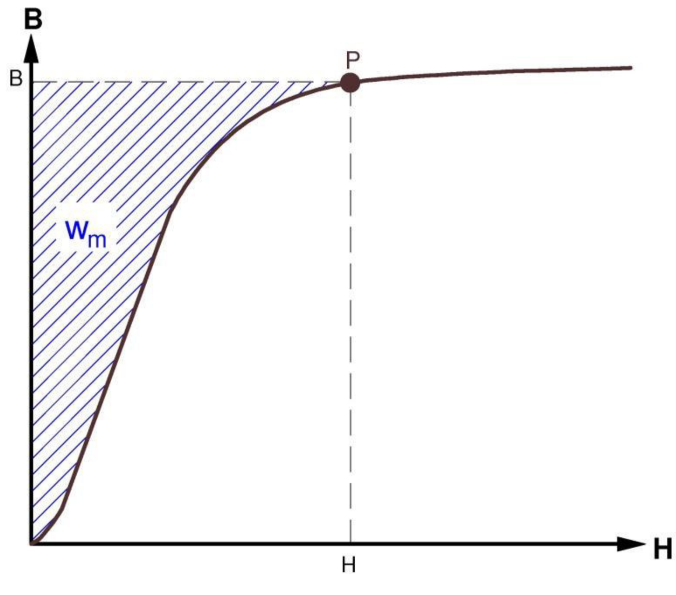


Fig. 15: Energía magnética almacenada por unidad de volumen w_m en un material ferromagnético.

En un medio homogéneo, isótropo y lineal la permeabilidad magnética μ es constante, luego

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{y} \quad \mu = \text{constante}$$

$$w_m = \int_0^B \vec{H} \bullet d\vec{B} = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB$$

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad \text{(medio lineal)}} \qquad (26)$$

En estos medios la curva B-H del material es una línea recta, por lo que la energía magnética por unidad de volumen w_m es igual al área representada en la Fig. 16.

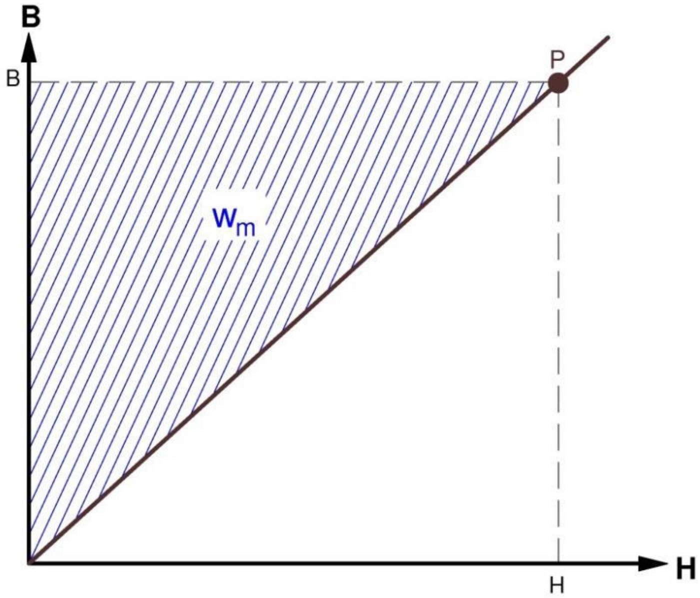


Fig. 16: Energía magnética almacenada por unidad de volumen w_m en un material lineal.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALONSO, M. y FINN, E.J. 1995. *Física. Vol. II: Campos y ondas*. Delaware. U.S.A. Addison-Wesley Iberoamericana.

[2] EVDOKIMOV, F.E. 1975. *Electricidad básica*. Barcelona. 1975. Editorial Gustavo Gili, S.A.

[3] FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B. y SANDS, M. 1998. *Física. Vol. II: Electromagnetismo y materia*. Madrid. Pearson Education.

[4] FRAILE MORA, J. 2008. *Electromagnetismo y circuitos magnéticos*. Madrid McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

[5] JILES, D. 1991. *Introduction to magnetism and magnetic materials*. Londres. Chapman & Hall.

[6] KASATKIN, A.S., NEMTSOV, M.V. 1986. *Electrical Engineering*. Moscú. Mir Publishers.

[7] LORRAIN, P.; CORSON, D.R. 1977. *Campos y ondas electromagnéticos*. Madrid. Selecciones científicas.