



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA*



ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Doctor Ingeniero Industrial

© 2017, Miguel Angel Rodríguez Pozueta
Universidad de Cantabria (España)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.



Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Puede encontrar más documentación gratuita en la página web del autor: <http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

ÍNDICE

ÍNDICE

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

Condición de arranque	1
Limitaciones en la corriente de arranque.....	1
Arranque directo.....	2
Arranques con tensión reducida.....	3
Arranque por inserción de impedancias en el estator.....	3
Arranque por autotransformador.....	5
Arranque estrella-triángulo.....	7
Arrancador electrónico o estático.....	9
Arranque por introducción de resistencias en serie con el rotor.....	11
Arranques usando los sistemas de control de velocidad.....	13
Momento de inercia y momento giratorio	13
Tiempo de arranque de un motor asíncrono.....	14
Fórmula de Kloss.....	14
Análisis del arranque directo en vacío mediante la fórmula de Kloss.....	15
Energía perdida durante el arranque.....	16
Arranques pesados.....	16
Bibliografía.....	17

ANEXOS

<u>ANEXO A</u> : Ejemplo de cálculo de varios arranques de un motor asíncrono.....	19
<u>ANEXO B</u> : Dinámica del motor asíncrono.....	33
Introducción	33
Tiempo de arranque de un motor asíncrono.....	34
Tiempo de arranque en vacío.....	35
Pérdidas de energía en el arranque de un motor asíncrono.....	37
Balance de potencias.....	37
Pérdidas de energía en el arranque.....	39
Pérdidas de energía en el arranque en vacío.....	40
Pérdidas de energía en el arranque con carga.....	41
Pérdidas de energía en el frenado a contracorriente y en la inversión del sentido de giro en vacío.....	43

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

CONDICIÓN DE ARRANQUE

- El **arranque** es el proceso de puesta en marcha de un motor que lo lleva desde una velocidad nula a la del punto de funcionamiento estable que corresponda al par resistente de la carga que tiene que mover.
- Para que pueda realizarse esta maniobra debe cumplirse la **condición de arranque**: durante el arranque el par del motor debe ser superior al par resistente. De no cumplirse esta condición, el par motor es insuficiente para mover la carga mecánica que tiene acoplada y no se puede producir el arranque.

LIMITACIONES EN LA CORRIENTE DE ARRANQUE

- En el instante de iniciar el arranque, cuando la velocidad todavía es nula y el deslizamiento entonces vale 1, la corriente que demanda el motor es varias veces superior a la asignada. Esta corriente elevada puede provocar caídas de tensión en la instalación eléctrica que alimenta al motor afectando a otros aparatos conectados a ella. Por esta razón existen normas que establecen las máximas corrientes de arranque permitidas (por ejemplo, la ITC-BT-47).
- Esto obliga a utilizar en muchas ocasiones procedimientos que reduzcan la corriente de línea que se demanda a la red eléctrica durante el arranque con respecto a la que circula en el arranque directo.

ARRANQUE DIRECTO (1)

- Este método de arranque es el más sencillo de todos y se emplea en motores de pequeña potencia (o en motores grandes si están conectados a una red eléctrica independiente, de tal manera que su corriente de arranque no afecte a otros consumidores).
- Consiste en arrancar el motor simplemente conectándolo a su tensión asignada V_{1NL} .
- En este método de arranque (y también en los de tensión reducida, que se van a estudiar más adelante) la corriente del rotor reducida al estator I'_{2a} va a ser lo suficientemente grande comparada con la de vacío I_0 como para despreciar esta última.

Por lo tanto, se va a considerar que la corriente de arranque I_a (que circula por el estator) es prácticamente igual a la del rotor reducida al estator:

$$I'_{2a} \gg I_0 \Rightarrow I_a \approx I'_{2a}$$

ARRANQUE DIRECTO (2)

- **Corriente de arranque directo:**

$$I_a \approx I'_{2a} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{1}\right)^2 + X_{cc}^2}} \Rightarrow I_a = \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}$$

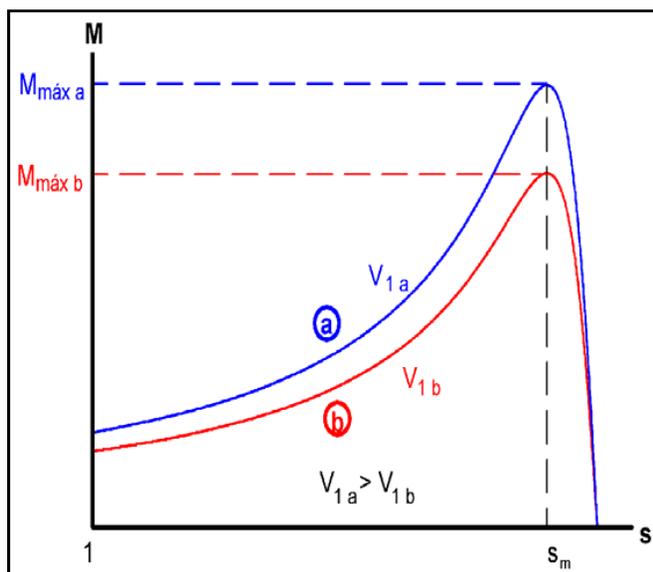
Estrella: $I_{aL} = I_a$ **Triángulo:** $I_{aL} = \sqrt{3} \cdot I_a$

- **Par de arranque directo** (par con $s = 1$ y $V_1 = V_{1N}$):

$$M_a = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I_{2a}^2$$

ARRANQUES CON TENSIÓN REDUCIDA

- Existen varios procedimientos de arranque que consisten en alimentar al motor con una tensión inferior a la asignada en el momento del arranque para después, cuando el rotor ya está girando, ir la aumentando hasta alcanzar su valor asignado.



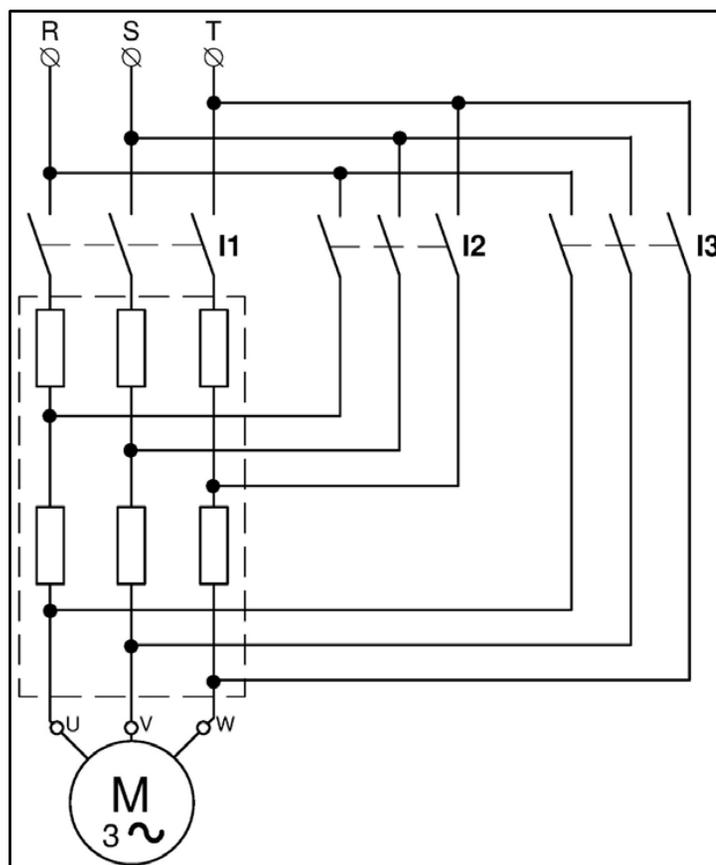
- La corriente de arranque disminuye, pero también el par de arranque. Luego, hay que comprobar que se cumple la condición de arranque. Por esta razón, estos procedimientos de arranque sólo se pueden utilizar si el motor se arranca sin carga o con cargas mecánicas que no ejerzan un par resistente elevado a bajas velocidades.

ARRANQUE POR INSERCIÓN DE IMPEDANCIAS EN EL ESTATOR

Es un método de arranque con tensión reducida.

En este circuito la maniobra de arranque consiste en:

- Cerrar el interruptor **I1** con los interruptores **I2** e **I3** abiertos: *arranque a tensión reducida (con toda la impedancia en serie con el estator).*
- Cerrar el interruptor **I2**: *se deja solamente una fracción de la impedancia en serie, lo que aumenta la tensión del estator.*
- Cerrar el interruptor **I3**: *el motor recibe la totalidad de la tensión de la red.*



CÁLCULO DEL ARRANQUE POR INSERCIÓN DE IMPEDANCIAS EN EL ESTATOR (1)

La impedancia que se conecta en serie con cada fase del estator en el momento de iniciar el arranque es:

$$\bar{Z}_e = R_e + jX_e$$

Luego, R_1 y X_1 se incrementan en R_e y X_e , respectivamente. Lo mismo sucede con R_{cc} y X_{cc} :

$$I_{aZ} \approx I'_{2aZ} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}}$$

$$M_{aZ} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I_{2aZ}^2$$

CÁLCULO DEL ARRANQUE POR INSERCIÓN DE IMPEDANCIAS EN EL ESTATOR (2)

Tanto en este arranque como en el directo, el motor conserva la misma conexión, estrella o triángulo. Por lo tanto:

$$\frac{I_{aZL}}{I_{aL}} = \frac{I_{aZ}}{I_a} = \frac{I'_{2aZ}}{I'_{2a}}$$

Se define el parámetro adimensional z (inferior a 1) así:

$$z = \sqrt{\frac{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}}$$

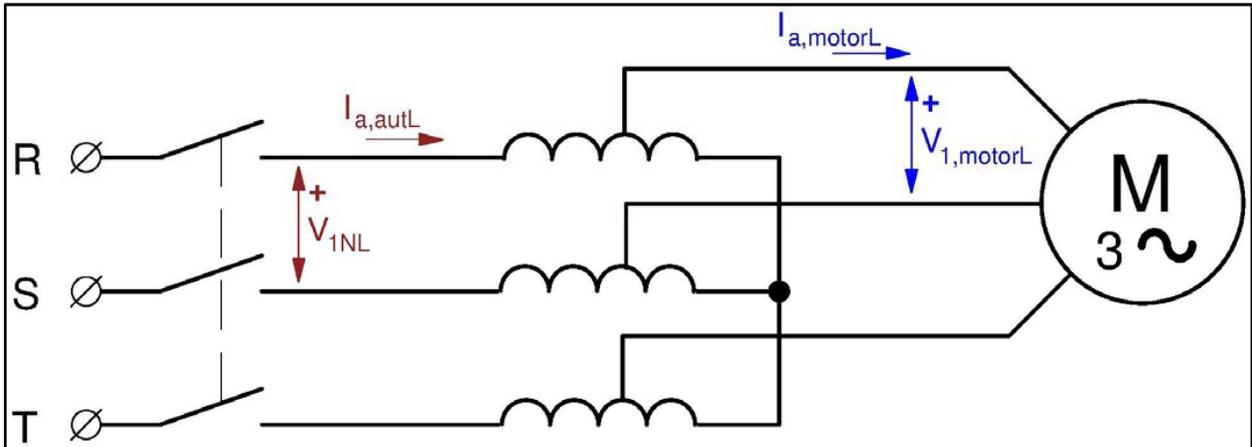
Luego:

$$I_{aZL} = z \cdot I_{aL}$$

$$M_{aZ} = z^2 \cdot I_a$$

ARRANQUE POR AUTOTRANSFORMADOR (1)

Se trata de un método de arranque con tensión reducida. El autotransformador suministra una tensión reducida $V_{1,motorL}$ al motor en el momento de arrancarlo. Cuando este ya empieza a girar, se le pasa a alimentar a su tensión asignada V_{1NL} .



$$x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}}$$

$$I_{a,autL} = x^2 \cdot I_{aL}$$

$$M_{a,aut} = x^2 \cdot M_a$$

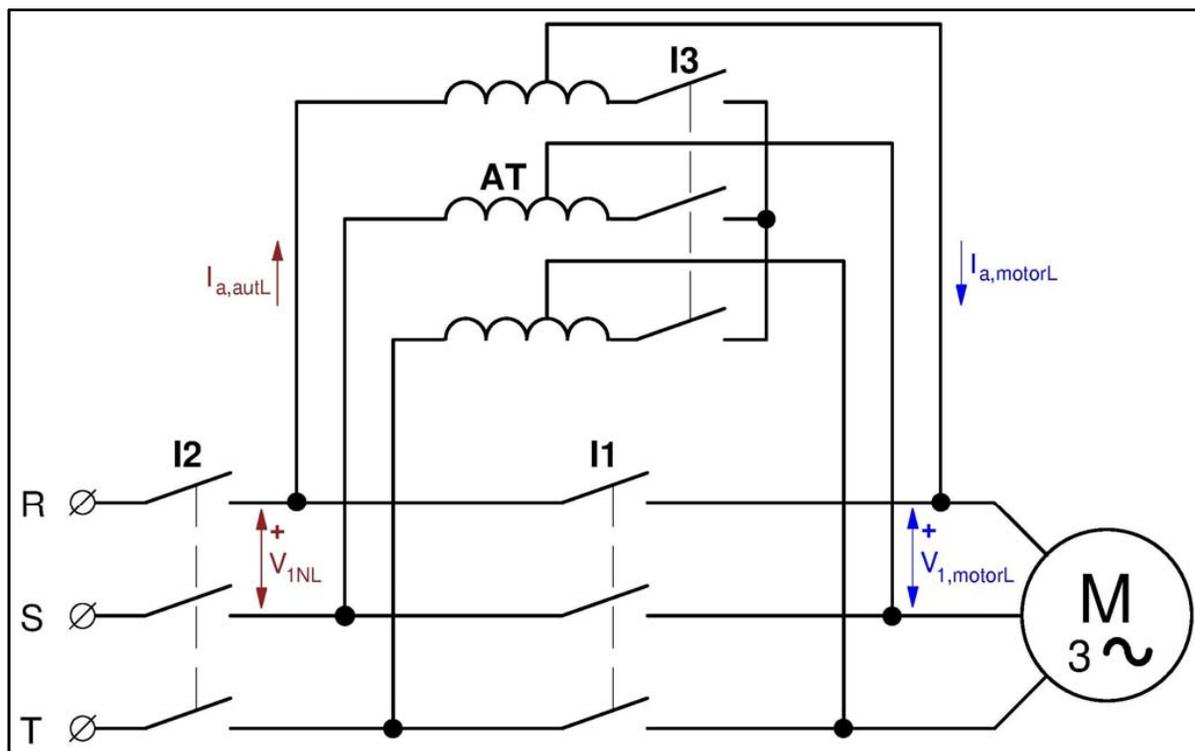
En el momento de arrancar el motor, el autotransformador le suministra una tensión del línea $V_{1,motorL}$, inferior a su tensión asignada V_{1NL} , lo que hace que la tensión de fase del motor sea $V_{1,motor} < V_{1N}$. En el arranque del motor, el autotransformador demanda una corriente de línea $I_{a,autL}$ y el motor consume una corriente de línea $I_{a,motorL}$, lo que hace que su corriente de fase sea $I_{a,motor}$

$$\text{Si } \boxed{x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} = \frac{I_{a,autL}}{I_{a,motorL}} \rightarrow \begin{cases} I_{a,autL} = x \cdot I_{a,motorL} \\ x < 1 \end{cases}$$

Comparando con el arranque directo, se deduce que:

$$\frac{I_{a,motorL}}{I_{aL}} = \frac{I_{a,motor}}{I_a} = \frac{\frac{V_{1,motor}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}}{\frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} = x \rightarrow \begin{cases} I_{a,motorL} = x \cdot I_{aL} \\ \boxed{I_{a,autL} = x^2 \cdot I_{aL}} \end{cases}$$

$$\frac{M_{a,aut}}{M_a} = \frac{\frac{m_1 R'_2}{2 \pi n_1 / 60} \frac{V_{1,motor}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}}{\frac{m_1 R'_2}{2 \pi n_1 / 60} \frac{V_{1N}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}} = \left(\frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} \right)^2 = x^2 \rightarrow \boxed{M_{a,aut} = x^2 \cdot M_a}$$

ARRANQUE POR AUTOTRANSFORMADOR (2)

AT = Autotransformador trifásico

- 1) Teniendo previamente cerrado el interruptor **I3** y abierto el interruptor **I1** se cierra el interruptor **I2**. La máquina arranca a la tensión reducida que le proporciona el autotransformador trifásico **AT**.
- 2) Se abre el interruptor **I3**. El autotransformador **AT** deja de funcionar como tal y ahora se convierte en unas reactancias puestas en serie con cada fase del inducido. Las caídas de tensión en estas reactancias dan lugar a que el motor tenga mayor tensión que antes, pero aún está a una tensión inferior a la de la red.
- 3) Se cierra el interruptor **I1** (dejando abierto a **I3**). La máquina recibe la totalidad de la tensión de la red (es decir, queda a su tensión asignada) y acaba su arranque alcanzando una velocidad cercana a la de sincronismo.

ARRANQUE ESTRELLA-TRIÁNGULO (1)

- Es otro método de arranque con tensión reducida.
- El arranque estrella-triángulo sólo se puede utilizar si el motor está conectado a una red eléctrica cuya tensión de línea sea igual a la tensión asignada de fase del motor. Esto obliga a que *para que el motor funcione a su tensión asignada deba conectarse en triángulo*:

$$V_{1L} = V_{1N} \Rightarrow \text{Conexión triángulo para que: } V_1 = V_{1N}$$

- En este caso el arranque se realiza con el motor conectado en estrella. Cuando el motor ha adquirido cierta velocidad se conmutan las conexiones y se lo conecta en triángulo para que pase a funcionar con su tensión asignada.

ARRANQUE ESTRELLA-TRIÁNGULO (2)

- Al arrancar en estrella, la tensión de fase del motor ya no es la asignada sino $\sqrt{3}$ veces menor:

$$V_{1L} = V_{1N} \Rightarrow \text{Conexión estrella para que: } V_1 = \frac{V_{1L}}{\sqrt{3}} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{3}}$$

- Esto provoca que la corriente de fase en este arranque $I_{a\lambda}$ sea $\sqrt{3}$ veces menor que la del arranque directo, I_{aL} . Por otra parte, en este caso el arranque directo corresponde a la conexión triángulo, donde la corriente de arranque de fase I_a es $\sqrt{3}$ veces menor que la corriente de línea I_{aL} ; mientras que en la conexión estrella las corrientes de arranque de fase y de línea son iguales y ambas las denominamos $I_{a\lambda}$. Además, el par de arranque es proporcional al cuadrado de la tensión de fase del motor.

En consecuencia, tanto la corriente de línea en el arranque estrella-triángulo $I_{a\lambda}$ como el par de arranque correspondiente $M_{a\lambda}$ son iguales a la tercera parte de sus respectivos valores en el arranque directo:

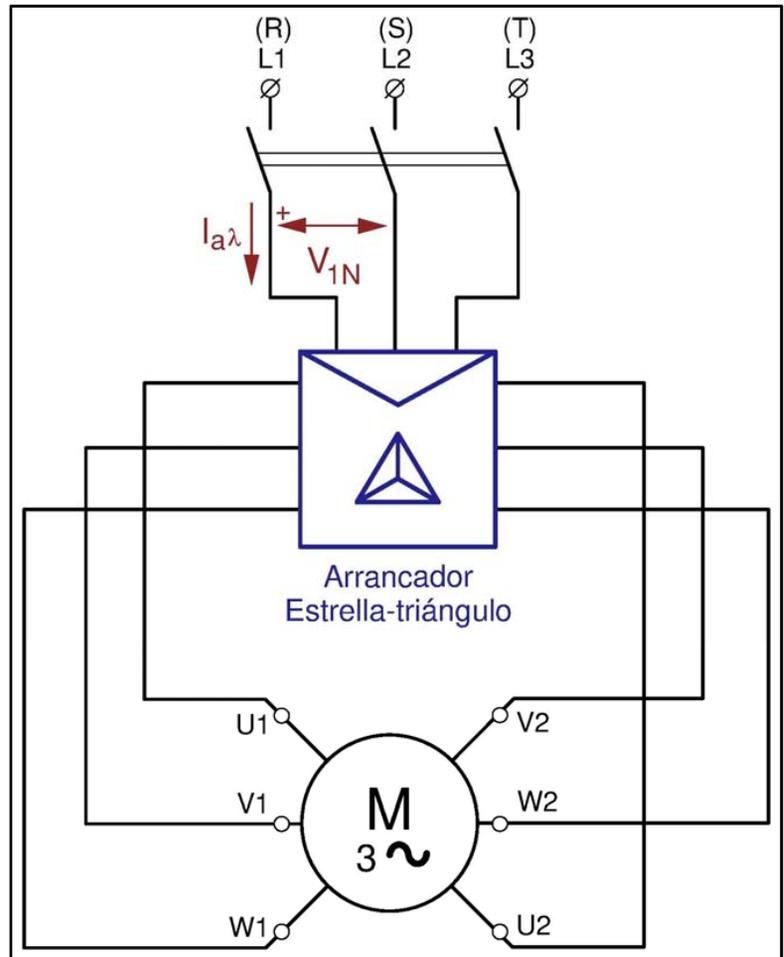
$$\left. \begin{array}{l} I_{a\lambda} = I_a / \sqrt{3} \\ I_a = I_{aL} / \sqrt{3} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3}} ; \boxed{M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3}}$$

ARRANCADOR ESTRELLA-TRIÁNGULO

La figura muestra la forma de conectar un **arrancador estrella-triángulo**, el cual permite conectar el motor tanto en estrella como en triángulo.

El motor se arranca en estrella y poco tiempo más tarde, cuando ya ha alcanzado cierta velocidad, se le conmuta a triángulo.

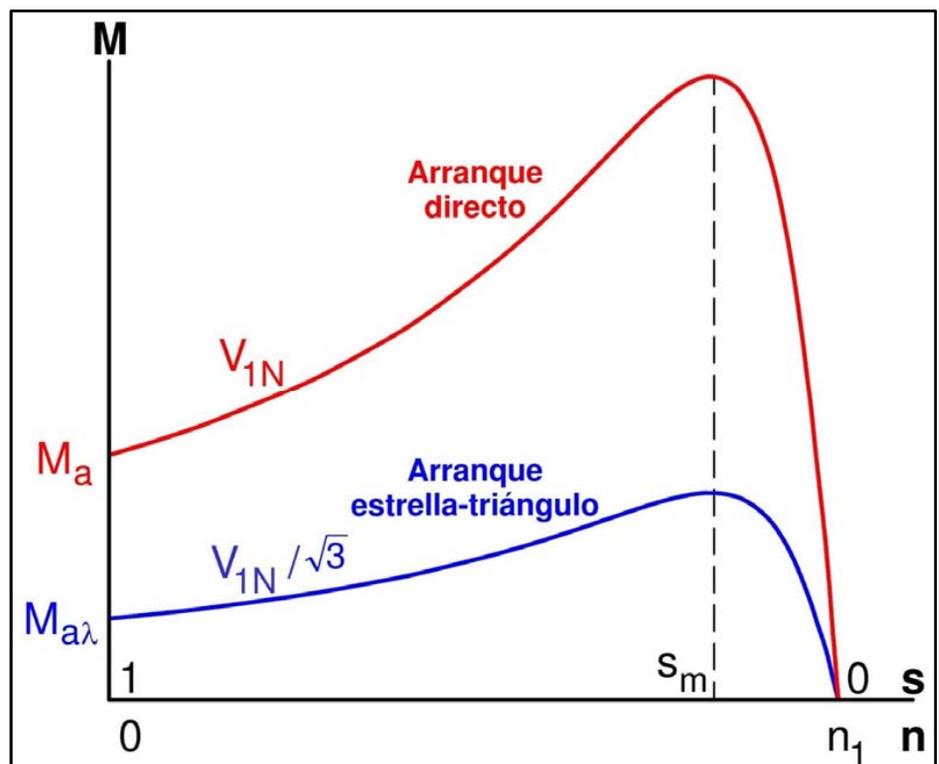
En algunos arrancadores la conmutación de estrella a triángulo se realiza automáticamente y en otros se efectúa de forma manual.



CURVAS DE PAR EN EL ARRANQUE ESTRELLA-TRIÁNGULO

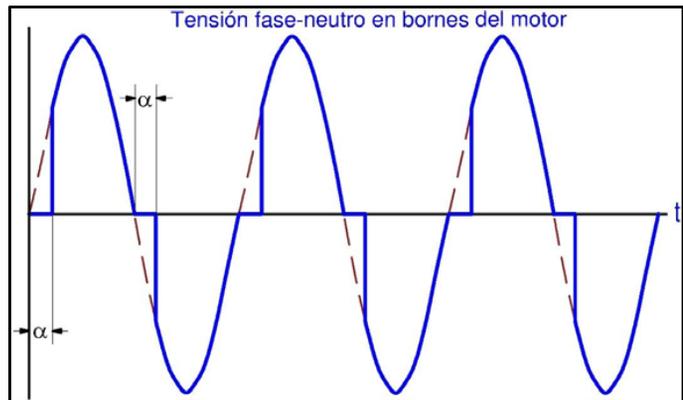
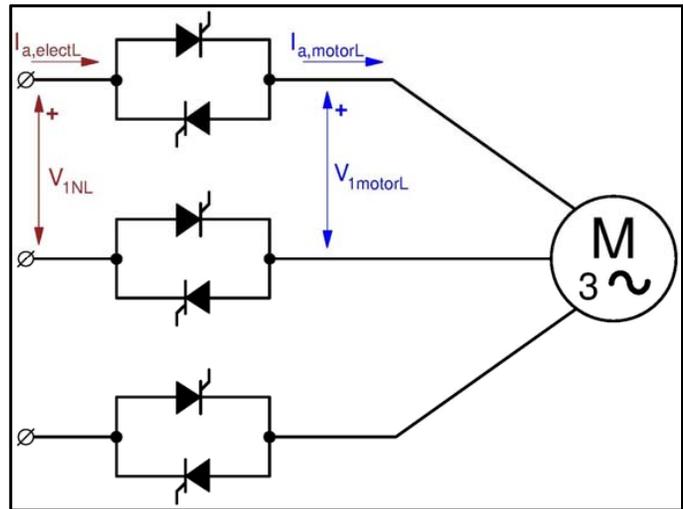
La figura muestra las curvas de par cuando el motor está conectado en **triángulo** (*arranque directo*) y cuando está en **estrella** (*arranque estrella-triángulo*).

En **triángulo** la tensión de fase es igual a la asignada V_{1N} y en **estrella** es $\sqrt{3}$ veces menor.



ARRANCADOR ELECTRÓNICO O ESTÁTICO (1)

- Es un método de arranque con tensión reducida.
- Un arrancador electrónico permite variar el valor eficaz de la tensión del estator durante el arranque.
- La frecuencia se mantiene constante.
- La onda de tensión se deforma.



$$x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}}$$

$$I_{a,electL} = x \cdot I_{aL}$$

$$M_{a,elect} = x^2 \cdot M_a$$

Estos arrancadores constan de un puente con tres parejas de interruptores electrónicos (tiristores, transistores, GTOs, etc.) en oposición. Modificando el ángulo de disparo α de estos interruptores electrónicos se controla el valor eficaz de la tensión que se suministra al motor. Estos arrancadores deforman la tensión, que ya no es perfectamente sinusoidal, pero consiguen un control continuo y fácil del valor eficaz de la tensión que recibe el motor.

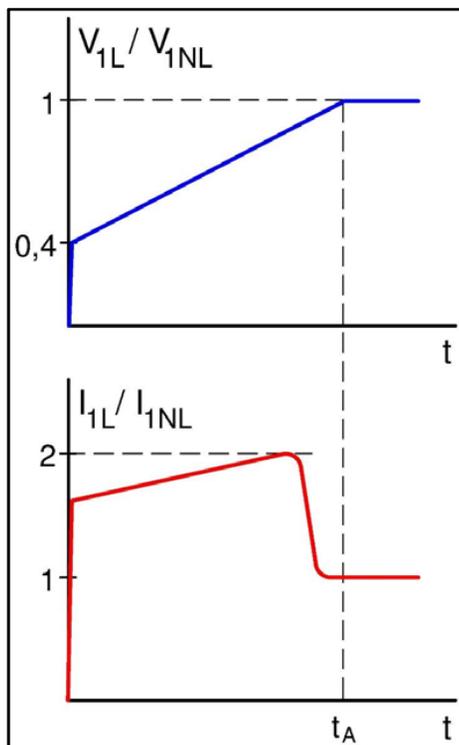
El motor recibe una tensión de línea $V_{1,motorL}$ que da lugar a una tensión $V_{1,motor}$ en cada una de sus fases. En el arranque la corriente de línea en el motor $I_{a,motorL}$ es la misma que la que se demanda a la red $I_{a,electL}$ ($I_{a,electL} = I_{a,motorL}$) y la corriente de fase del motor es $I_{a,motor}$.

Si ahora x se define así: $x = \frac{V_{1,motorL}}{V_{1NL}} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} \quad (x < 1)$

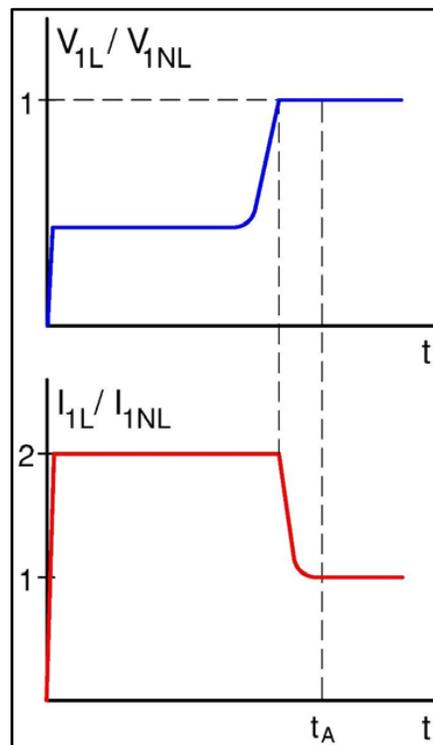
Comparando con el arranque directo, se deduce que:

$$\frac{I_{a,motorL}}{I_{aL}} = \frac{I_{a,motor}}{I_a} = \frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} = x; \quad I_{a,electL} = I_{a,motorL} \rightarrow I_{a,electL} = x \cdot I_{aL}$$

$$\frac{M_{a,elect}}{M_a} = \left(\frac{V_{1,motor}}{V_{1N}} \right)^2 = x^2 \rightarrow M_{a,elect} = x^2 \cdot M_a$$

ARRANCADOR ELECTRÓNICO O ESTÁTICO (2)

**Arranque por rampa
de tensión**



**Arranque por regulación
de la corriente**

- El arrancador puede suministrar una tensión que durante el arranque aumenta desde un valor inicial hasta la tensión asignada del motor siguiendo una rampa (relación lineal) ajustable. Normalmente, el arrancador controla la corriente del motor durante el arranque, de forma que si es demasiado elevada (2,5 a 4,5 veces I_{1NL}) reduce la tensión transitoriamente.

Otra posibilidad es que el arrancador proporcione una tensión tal que la corriente del motor sea constante durante el arranque hasta que esto requiera que la tensión sea igual a la asignada V_{1NL} . A partir de ese momento, el arranque prosigue a tensión constante e igual a la asignada.

- Una vez que ha terminado el arranque, el arrancador queda fuera de servicio y el motor se conecta directamente a la red mediante un contactor.

Algunos fabricantes recomiendan, sin embargo, que cuando el motor tenga que mover cargas pequeñas, muy inferiores a la asignada, se lo alimente a tensión reducida mediante el arrancador, ya que así se ahorra energía y se mejora el factor de potencia.

Esto se basa en que al reducir la tensión conservando la misma frecuencia se reduce el campo magnético del motor, con lo que se reduce la potencia reactiva que consume y las pérdidas en el hierro. También se reduce el par que puede proporcionar el motor, pero esto no importa porque está moviendo una carga pequeña que demanda un par reducido.

ARRANQUE POR INTRODUCCIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE CON EL ROTOR (1)

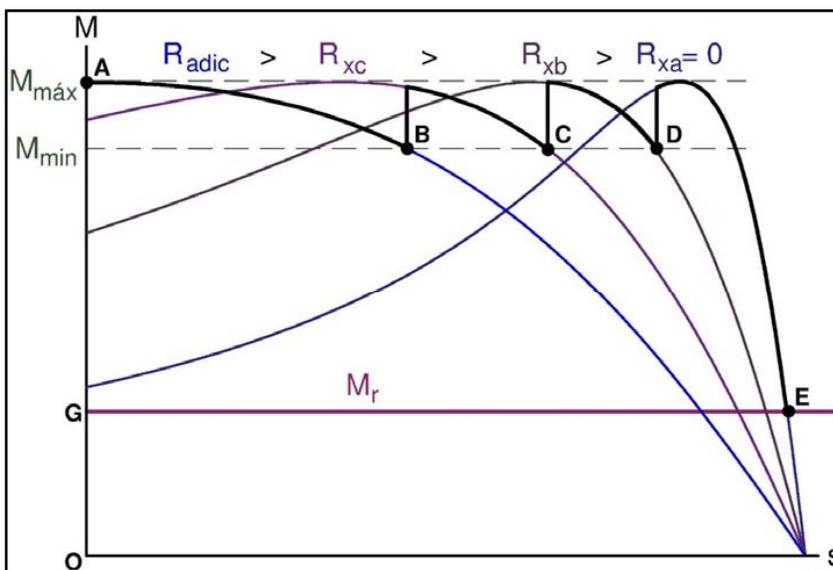
- Este sistema de arranque sólo se puede usar en motores de rotor bobinado y consiste en conectar una resistencia R_x en serie con cada una de las fases del rotor. Una vez arrancado el motor, se va disminuyendo progresivamente el valor de estas resistencias hasta que el rotor queda cortocircuitado.
- Este método de arranque es mejor que los de tensión reducida porque, además de reducir la corriente de arranque, se consigue aumentar el par de arranque. Incluso se puede conseguir el par máximo en el arranque.

$$I'_{2aR} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + R'_2 + R'_x)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{(R_{cc} + R'_x)^2 + X_{cc}^2}}$$

Estrella: $I'_{2aRL} = I'_{2aR}$

Triángulo: $I'_{2aRL} = \sqrt{3} \cdot I'_{2aR}$

ARRANQUE POR INTRODUCCIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE CON EL ROTOR (2)

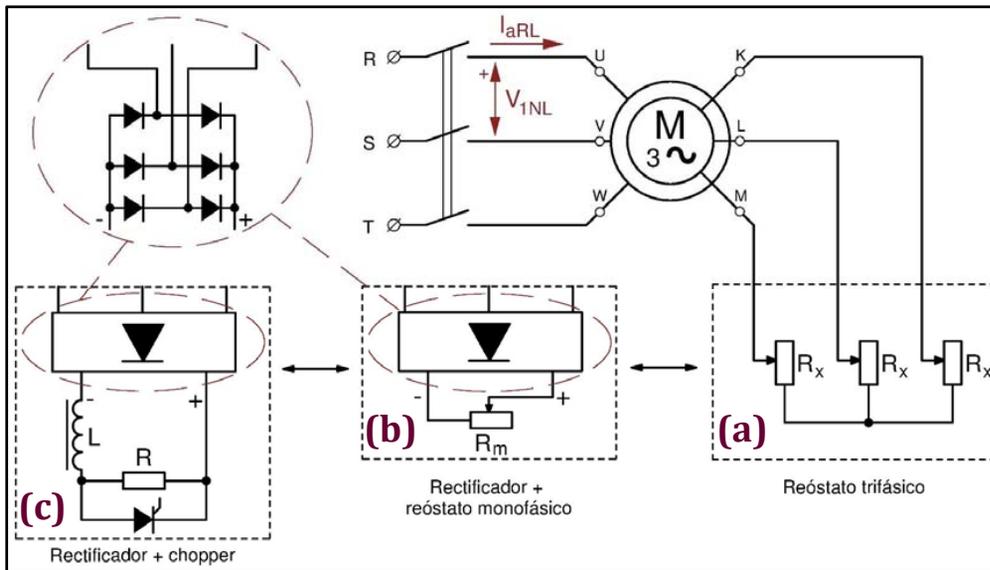


Esta figura muestra el proceso de arranque de un motor de rotor bobinado en el que se utiliza un reóstato trifásico que permite dar cuatro valores distintos a R_x .

El mayor de estos valores es R_{adic} , que origina el par máximo en el arranque, y el menor ($R_{xa} = 0$) deja el rotor en cortocircuito.

El motor se arranca con $R_x = R_{adic}$ y se disminuye el valor de R_x cada vez que el par se reduce hasta un valor mínimo M_{min} predefinido (puntos **B**, **C** y **D**). Al final queda que $R_x = 0$ y con este valor se finaliza el arranque. De esta forma el par no baja de M_{min} durante el arranque. Esto hace que esta maniobra se produzca rápidamente porque se realiza con el motor proporcionando unos pares elevados.

SISTEMAS DE CONEXIÓN DE RESISTENCIAS VARIABLES EN SERIE CON LAS FASES DEL ROTOR



Variación de resistencia rotórica mediante un reóstato trifásico (a), un reóstato monofásico (b) y variación estática mediante un chopper (c)

El chopper consiste en un interruptor electrónico que se abre y cierra en rápida sucesión y de forma cíclica. Si está permanentemente cerrado la resistencia es cero y si permanece abierto la resistencia es R . Si se abre y cierra periódicamente la resistencia efectiva toma un valor intermedio entre 0 y R , dependiente de la fracción del tiempo que está abierto y que está cerrado.

En la figura superior se muestran varias formas de conectar resistencias variables en serie con las fases del rotor de una máquina asíncrona de anillos:

- a) El sistema más sencillo consiste en utilizar un reóstato trifásico variable, que está formado por tres resistencias idénticas R_x variables.
- b) Otro sistema consiste en utilizar una única resistencia variable R_m conectada al rotor a través de un rectificador trifásico de diodos.
- c) Una mejora del sistema anterior consiste en que al rectificador de diodos se conecte una resistencia R fija, pero un circuito electrónico -basado en un chopper- permite variar su valor efectivo.

Hay varios circuitos electrónicos que permiten hacer esto, uno de los cuáles es el mostrado en la figura superior. En este montaje se puede variar la resistencia efectiva en el lado de corriente continua del rectificador entre 0 y R , lo que se consigue modificando la fracción de tiempo en el que chopper está cerrado frente a la que está abierto.

ARRANQUES USANDO LOS SISTEMAS DE CONTROL DE VELOCIDAD

- En los motores asíncronos provistos de un equipo de control de velocidad, se puede utilizar este para arrancarlos.
- Lo habitual es que la instalación de estos equipos no se justifique económicamente si solo se van a emplear para el arranque.
- Si el motor se alimenta a través de un **convertidor de frecuencia**, el arranque se realiza aumentando de forma continua y paulatina la frecuencia en el estator f_1 a la vez que se varía la tensión (o la corriente) para que el flujo magnético no varíe durante toda la maniobra.

La frecuencia f_1 aumenta desde un valor reducido hasta su valor asignado, por lo tanto, la velocidad síncrona también va creciendo hasta su valor asignado y se consigue que la velocidad de giro aumente de forma suave y controlada.

Con este sistema se puede mantener un par elevado durante todo el arranque, por lo que este se realiza rápidamente, y se reduce la energía disipada en el arranque (como se verá más adelante).

- Si se trata de un motor especial que tiene la posibilidad de **variar su número de polos**; es decir, que puede funcionar con varias velocidades síncronas distintas (de 2 a 4 velocidades síncronas), la energía disipada en el arranque se reduce si esta maniobra se hace por etapas: se inicia con el n^o de polos más alto (velocidad síncrona más pequeña) y luego se bajando escalonadamente el número de polos hasta llegar a la velocidad síncrona más alta.

MOMENTO DE INERCIA Y MOMENTO GIRATORIO

- El **momento de inercia** de un accionamiento; es decir, el momento de inercia del conjunto motor-carga mecánica más el acoplamiento mecánico entre ambos, se designa **J**. En el S.I. se mide en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.
- J se puede obtener así:

$$J = m R^2 = \frac{G D^2}{4 g}$$

m = Masa giratoria (kg)

R = Radio de inercia (m)

G = Peso de las masas giratorias (N)

D = Diámetro de inercia (m)

g = Aceleración de la gravedad (m/s^2)

- Se llama **momento giratorio** al producto **GD^2** , que en algunos catálogos aparece como **PD^2** .

TIEMPO DE ARRANQUE DE UN MOTOR ASÍNCRONO

- El proceso de arranque es un fenómeno cuyo análisis preciso requiere el uso de las ecuaciones del régimen transitorio. En un análisis simplificado se supone que el arranque se produce a una velocidad relativamente lenta, lo que permite considerarlo como una sucesión de distintos estados permanentes y, por lo tanto, se puede analizar empleando la curva de par de régimen permanente.
- Sea M el par del motor y M_r el par resistente de la carga que mueve:

$$\Delta M = M - M_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad dt = \frac{J}{\Delta M} d\Omega$$

Tiempo de arranque: $t_a = J \int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Delta M}$ ($\Omega = \Omega_1 (1 - s)$) $t_a = -J \Omega_1 \int_1^s \frac{ds}{\Delta M}$

(Ω = Velocidad final de equilibrio, a la cual corresponde el deslizamiento s)

- Tiempo que tarda el motor en pasar del deslizamiento s_A al s_B en el arranque:

$$t = -J \Omega_1 \int_{s_A}^{s_B} \frac{ds}{\Delta M}$$

FÓRMULA DE KLOSS

Fórmula de Kloss:

$$\frac{M}{M_{\text{máx}}} = \frac{2(1 + a s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2 a s_m + \frac{s_m}{s}} \quad \left(a = \frac{R_1}{R'_2} \right)$$

Para **motores grandes:** $R_1 \lll R'_2 \rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$

Luego:

$$\frac{M}{M_{\text{máx}}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}$$

ANÁLISIS DEL ARRANQUE DIRECTO EN VACÍO MEDIANTE LA FÓRMULA DE KLOSS (1)

- Aquí se estudia el arranque directo en vacío. Luego: $M_r = 0$ e $\Delta M = M$.
- Por lo tanto, el tiempo que tarda el motor en pasar del deslizamiento s_A al s_B en el arranque se calcula ahora así:

$$t = -J \Omega_1 \int_{s_A}^{s_B} \frac{ds}{M}$$

- Según la fórmula de Kloss (suponiendo que $R_1 \ll R'_2 \Rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$):

$$M = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} M_{\text{máx}}$$

- Luego:

$$t = -\frac{J \Omega_1}{2 M_{\text{máx}}} \int_{s_A}^{s_B} \left(\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} \right) ds \Rightarrow t = \frac{J \Omega_1}{2 M_{\text{máx}}} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{2 s_m} + s_m \ln \frac{s_A}{s_B} \right]$$

ANÁLISIS DEL ARRANQUE DIRECTO EN VACÍO MEDIANTE LA FÓRMULA DE KLOSS (2)

- Si se quiere calcular el **tiempo de arranque** t_a se tiene que $s_A = 1$ y s_B es muy pequeño ($s_B \ll s_A$). Luego $s_A^2 - s_B^2 \approx 1$ y se deduce que:

$$t_a = \frac{J \Omega_1}{2 M_{\text{máx}}} \left[\frac{1}{2 s_m} - s_m \ln s_B \right] = \tau_{\text{mec}} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right]$$

En la práctica es habitual calcular t_a para un valor de $s_B = 0,05$

- La **constante de tiempo electromecánica** τ_{mec} es el tiempo de arranque si durante todo el proceso de arranque el par se mantuviera constante e igual al par máximo $M_{\text{máx}}$ y la velocidad final que se alcanzara fuera la de sincronismo Ω_1 :

$$\tau_{\text{mec}} = \frac{J}{M_{\text{máx}}} \int_0^{\Omega_1} d\Omega \Rightarrow \tau_{\text{mec}} = \frac{J \Omega_1}{M_{\text{máx}}}$$

- Este parámetro τ_{mec} permite comparar entre motores para decidir cuál es de arranque más rápido.

ENERGÍA PERDIDA DURANTE EL ARRANQUE

- Si se desprecian las pérdidas magnéticas y mecánicas y el arranque se realiza **en vacío**, sucede que la **energía perdida en el arranque** ΔW_a vale:

$$\Delta W_a = \frac{J \Omega_1^2}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) = W_c (1 + a)$$

- *La energía perdida en el arranque ΔW_a es proporcional a la energía cinética W_c del sistema motor-carga a la velocidad de sincronismo Ω_1 ($W_c = J \Omega_1^2 / 2$).*
- *Todos los sistemas de arranque que no incluyan variación de la velocidad de sincronismo Ω_1 tienen la misma energía perdida ΔW_a en el arranque en vacío.*
- La energía perdida ΔW_a en un arranque **en carga** puede ser mucho mayor que en el arranque en vacío y depende, además de W_c , del método de arranque; ya que ΔW_a se reduce si el par del motor se mantiene elevado durante el arranque. *En carga, si t_a aumenta también se incrementa ΔW_a .*
- La energía perdida en el arranque ΔW_a se disipa en forma de calor y eleva la temperatura de la máquina.
- El arranque por inserción de resistencias en serie con el rotor tiene la ventaja de que gran parte de ΔW_a se disipa en el reóstato de arranque y no en el motor.

ARRANQUES PESADOS

- Un arranque es pesado si la constante de inercia total J es grande, lo que origina una energía perdida ΔW_a alta. Si estos arranques se producen de forma frecuente la temperatura del motor se puede elevar excesivamente.
- En motores normales se puede considerar que un arranque es pesado si la constante de inercia total J supera en dos veces a la constante de inercia del motor solo.
- Estos arranques mejoran si se utilizan motores de construcción especial, de más longitud y menos diámetro, que presentan menos inercia.
- Otra posibilidad es utilizar dos motores colocados sobre el mismo eje, cada uno de la mitad de la potencia total. El conjunto de estos dos motores presenta menos inercia que un único motor de la potencia total.
- Otra forma de reducir la energía perdida en estos arranques es usar algún sistema que disminuya la velocidad de sincronismo Ω_1 durante el arranque (lo que reduce la energía cinética W_c y, por tanto, ΔW_a). Por ejemplo, arrancar con un convertidor de frecuencia o utilizar un motor provisto de un devanado especial que permita modificar su número de polos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [2] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [3] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [4] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [5] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [6] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [7] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [8] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [9] LANGSDORF. 1968. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Madrid. Editorial Castillo D.L.
- [10] MERINO AZCÁRRAGA. 1995. *Arranque industrial de motores asíncronos: teoría, cálculo y aplicaciones*. Madrid: McGraw-Hill de Electrotecnologías.
- [11] PICHOR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [12] RAMÍREZ VAZQUEZ, J. 1985. *101 esquemas de maniobra, mando y control*. Barcelona: Ediciones CEAC, S.A.
- [13] REVISTA TÉCNICA INDUSTRIAL. Nº 215. *Arrancadores electrónicos para motores asíncronos trifásicos*.
- [14] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: UniCan: <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas%20camino.pdf>
- [15] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2017. *Frenado de máquinas asíncronas o de inducción*. Santander: Universidad de Cantabria: [http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Frenado asincronas Web.pdf](http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Frenado%20asincronas%20Web.pdf)
- [16] SANZ FEITO, JAVIER. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Education.
- [17] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [18] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [19] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

ANEXOS

ANEXO A:

EJEMPLO DE CÁLCULO DE VARIOS ARRANQUES DE UN MOTOR ASÍNCRONO

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado tiene estas características:

$V_{1NL} = 400 \text{ V}$	Estator conectado en triángulo	$f_1 = 50 \text{ Hz}$
$R_1 \approx 0 \ \Omega$	$R'_2 = 0,23 \ \Omega$	$X_{cc} = 1 \ \Omega$
$m_i = \sqrt{2}$	$J = 0,8 \text{ kgm}^2$	$2p = 4 \text{ polos}$

Calcule la corriente de línea en el estator y el par cuando este motor se arranca mediante los siguientes métodos:

- Arranque directo.
- Añadiendo una resistencia de $2 \ \Omega$ en serie con cada fase del estator.
- Con un arrancador estrella-triángulo.
- Con un autotransformador que suministra al motor una tensión de línea de 200 V.
- Con un arrancador electrónico donde $x = 0,6$.
- Añadiendo en serie con cada fase del rotor una resistencia R_{adic} , de tal forma que el par máximo se produzca en el arranque. Calcule también el valor óhmico de R_{adic} .

Ahora se realiza el arranque directo de este motor estando en vacío:

- Hacer una estimación del tiempo de arranque en vacío de este motor hasta un deslizamiento $s_B = 0,05$. Para ello utilizar la expresión deducida de la fórmula de Kloss. Calcular también la energía perdida durante este arranque.
- Repetir el apartado anterior si el arranque en vacío se efectúa con el autotransformador del apartado d), el cual puede proporcionar tres tensiones diferentes. En este arranque la tensión va aumentando a medida que crece la velocidad del motor -y consecuentemente, disminuye el deslizamiento- de esta manera:

	I	II	III
Deslizamiento	$1 \geq s > 0,7$	$0,7 \geq s > 0,3$	$0,3 \geq s$
Tensión de línea	$V_{1LI} = V_{1,motorL} = 200 \text{ V}$	$V_{1LII} = 300 \text{ V}$	$V_{1LIII} = V_{1NL} = 400 \text{ V}$

- Suponga ahora que el devanado del estator de este motor posee la conexión Dahlander, lo cual permite variar su número de polos y, consecuentemente, su velocidad de sincronismo. En este caso este motor puede funcionar con 4 y con 8 polos.

Calcule la energía perdida en el arranque si esta maniobra se realiza a la tensión asignada y en dos etapas: comienza con la máquina teniendo 8 polos y, cuando, la velocidad aumenta hasta acercarse a la de sincronismo correspondiente a este número de polos, se conmuta a 4 polos y se termina el arranque con este nuevo número de polos.

SOLUCIÓN:

$$(V_{1N} = 400 \text{ V}; n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}; \Omega_1 = 157,1 \text{ rad/s}; R_{cc} = 0,23 \Omega; m_v = m_i = \sqrt{2})$$

- a)** $(I_a = 390 \text{ A}); I_{aL} = 675 \text{ A}; M_a = 668 \text{ Nm}$
- b)** $(z = 0,420; I_{aZ} = 164 \text{ A}); I_{aZL} = 283 \text{ A}; M_{aZ} = 118 \text{ Nm}$
- c)** $I_{a\lambda} = 225 \text{ A}; M_{a\lambda} = 223 \text{ Nm}$
- d)** $(x = 0,5); I_{a,\text{aut}L} = 169 \text{ A}; M_{a,\text{aut}} = 167 \text{ Nm}$
- e)** $I_{a,\text{elect}L} = 405 \text{ A}; M_{a,\text{elect}} = 240 \text{ Nm}$
- f)** $(R'_{\text{adic}} = 0,77 \Omega; I_{aR} = 283 \text{ A}; s_m = 0,23; M_{\text{máx}} = 1528 \text{ Nm});$
 $R_{\text{adic}} = 0,385 \Omega; I_{aRL} = 490 \text{ A}; M_{aR} = 1528 \text{ Nm}$
- g)** $(\tau_{\text{mec}} = 0,082 \text{ s}); t_a = 0,12 \text{ s}; \Delta W_a = 9872 \text{ J}$
- h)** $(\tau_{\text{mecI}} = 0,328 \text{ s}; \tau_{\text{mecII}} = 0,146 \text{ s}; \tau_{\text{mecIII}} = 0,082 \text{ s};$
 $t_{\text{I}} = 0,195 \text{ s}; t_{\text{II}} = 0,078 \text{ s}; t_{\text{III}} = 0,025 \text{ s}); t_a = 0,298 \text{ s}; \Delta W_a = 9872 \text{ J}$
- i)** $(\Omega_{\text{I}} = 78,6 \text{ rad/s}; \Omega_{\text{II}} = 157,1 \text{ rad/s}; \Delta W_{a\text{I}} = 2471 \text{ J}; \Delta W_{a\text{II}} = 2465 \text{ J})$
 $\Delta W_a = 4936 \text{ J}$

SOLUCIÓN DETALLADA

Cuestiones preliminares

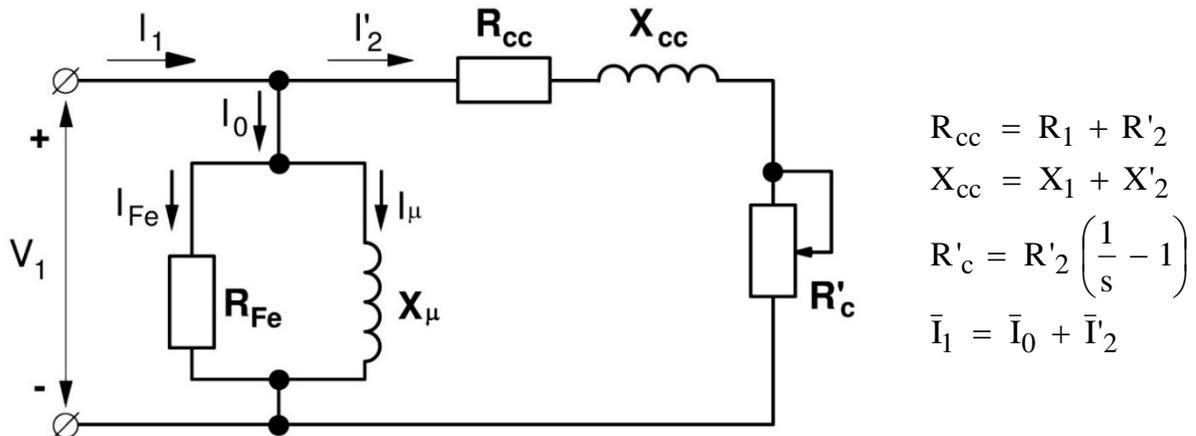


Fig. A1: Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona

- Tensión asignada de fase, \$V_{1N}\$:

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1N} = V_{1NL} \Rightarrow \underline{V_{1N} = 400 \text{ V}}$$

- Velocidad de sincronismo (\$2p = 4\$ polos):

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,1 \text{ rad / s}}$$

- Resistencia \$R_{cc}\$:

Fig. A1: $R_{cc} = R_1 + R'_2 \Rightarrow \underline{R_{cc} = 0,23 \Omega}$

- En un motor de inducción de anillos sucede que las relaciones de transformación de tensiones \$m_v\$ y de corrientes \$m_i\$ son iguales:

$$\text{Motor de anillos} \Rightarrow m_v = m_i \Rightarrow \underline{m_v = m_i = \sqrt{2}}$$

- Si la corriente de vacío \$I_0\$ es despreciable frente a la corriente del estator \$I_1\$, se puede aceptar que esta última es igual a la corriente del rotor reducida al estator \$I'_2\$:

Fig. A1: $I_0 \ll I_1 \Rightarrow I_1 \approx I'_2 \tag{A.1}$

- Dada la conexión triángulo del estator, sus corrientes de línea \$I_{1L}\$ y de fase \$I_1\$ están relacionadas así:

$$\text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{1L} = \sqrt{3} I_1 \tag{A.2}$$

- Ecuaciones de la máquina asíncrona conectada a una tensión trifásica y con el rotor en cortocircuito:

El deslizamiento s de una máquina asíncrona girando a una velocidad de n r.p.m., lo que equivale a Ω rad/s, se define así:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (\text{A.3})$$

Del circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona (Fig. A1) se obtiene que la corriente del rotor reducida al estator I'_2 vale:

(Fig. A1):

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad (\text{A.4})$$

La ecuación del par M cuando la máquina funciona alimentada con una fuente de tensión alterna polifásica se calcula mediante esta fórmula:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\Omega_1} I'^2_2 \quad (\text{A.5})$$

En esta máquina el número de fases del estator m_1 es tres; es decir: $m_1 = 3$ fases.

El deslizamiento s_m cuando el par es máximo se obtiene mediante esta relación:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad (\text{A.6})$$

a) Arranque directo

- En un arranque el deslizamiento vale $s = 1$ (luego, según la Fig. A1, la resistencia de carga R'_c es nula) y la corriente de vacío es despreciable (lo que significa que en un arranque se cumple la relación (A.1)). Además, en el arranque directo la tensión de fase es la asignada ($V_1 = V_{1N}$). En consecuencia, de las relaciones (A.4) y (A.5) se deduce que las fórmulas a aplicar para el arranque directo son:

(A.1), (A.4) y Fig. A1:

$$I_a \approx I'_{2a} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}} \quad (\text{A.7})$$

(A.5) y (A.7):

$$M_a = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I'^2_{2a} \quad (\text{A.8})$$

- Empleando la relación (A.7) en este motor se obtiene que la intensidad de fase en el arranque directo I_a vale:

$$(A.7): \quad I_a = \frac{400}{\sqrt{0,23^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I_a = 390 \text{ A}}$$

El estator de este motor está conectado en triángulo. Por consiguiente, la corriente de línea en el arranque directo I_{aL} vale:

$$(A.2): \quad \text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{aL} = \sqrt{3} I_a = \sqrt{3} \cdot 390 \Rightarrow \boxed{I_{aL} = 675 \text{ A}}$$

- El par de arranque directo M_a se obtiene mediante la relación (A.8):

$$(A.8): \quad M_a = \frac{3 \cdot 0,23}{157,1} \cdot 390^2 \Rightarrow \boxed{M_a = 668 \text{ Nm}}$$

- En este motor asíncrono la corriente de línea y el par en el arranque directo valen, respectivamente, 675 A y 668 Nm.

b) Arranque por inserción de impedancias en serie con el estator

- En este tipo de arranque se conecta en serie con cada fase del estator una impedancia compuesta, en el caso más general, por una resistencia R_e y una reactancia X_e :

$$\bar{Z}_e = R_e + jX_e \quad (A.9)$$

Es evidente que el motor con esta impedancia conectada en serie con cada fase del estator equivale a que ahora tenga una resistencia y una reactancia de dispersión del estator cuyos valores están incrementados en R_e y X_e , respectivamente. Lo mismo sucede con R_{cc} y X_{cc} (ver la Fig. A1). Por lo tanto, partiendo de las relaciones (A.1), (A.7) y (A.8) se deduce que, con este método, la corriente de fase I_{aZ} y el par M_{aZ} en el arranque son así:

$$(A.1), (A.7) \text{ y Fig. A1: } I_{aZ} \approx I'_{2aZ} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}} \quad (A.10)$$

$$(A.8) \text{ y Fig. A1: } M_a = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2} = \frac{m_1 \cdot R'_2}{\Omega_1} \cdot I_{2a}^2 \quad (A.11)$$

- Tanto en el arranque directo como en el arranque por inserción de impedancias en serie con el estator, el motor conserva la misma conexión, estrella o triángulo. Por lo tanto, teniendo en cuenta la fórmula (A.2), es evidente que se cumple esta relación:

$$(A.1) \text{ y } (A.2): \quad \frac{I_{aZL}}{I_{aL}} = \frac{I_{aZ}}{I_a} = \frac{I'_{2aZ}}{I'_{2a}} \quad (A.12)$$

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

Se define el coeficiente adimensional z , inferior a 1, mediante la siguiente relación:

$$z = \sqrt{\frac{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}{(R_{cc} + R_e)^2 + (X_{cc} + X_e)^2}} \quad (\text{A.13})$$

Luego, de (A.7), (A.10), (A.12) y (A.13) se concluye que:

$$\text{(A.7), (A.10), (A.12) y (A.13): } \frac{I_{aZL}}{I_{aL}} = \frac{I_{aZ}}{I_a} = z \Rightarrow I_{aZL} = z \cdot I_{aL} \quad (\text{A.14})$$

Observando las relaciones (A.8), (A.11), (A.13) y (A.14) se deduce que:

$$\text{(A.8), (A.11) y (A.14): } \frac{M_{aZ}}{M_a} = \left(\frac{I_{aZ}}{I_a}\right)^2 = z^2 \Rightarrow M_{aZ} = z^2 \cdot I_a \quad (\text{A.15})$$

- En el motor que se está analizando la impedancia que se introduce en serie con cada fase del estator es así:

$$\text{(A.9):} \quad R_e = 2 \Omega; \quad X_e = 0 \Omega$$

Por consiguiente, en este caso el parámetro z vale:

$$\text{(A.13):} \quad z = \sqrt{\frac{0,23^2 + 1^2}{(0,23 + 2)^2 + (1 + 0)^2}} \Rightarrow \underline{z = 0,420}$$

Finalmente, de la aplicación de las relaciones (A.14) y (A.15) resulta que:

$$\text{(A.14):} \quad I_{aZL} = 0,420 \cdot 675 \Rightarrow \boxed{I_{aZL} = 283 \text{ A}}$$

$$\text{(A.15):} \quad M_{aZ} = 0,420^2 \cdot 668 \Rightarrow \boxed{M_{aZ} = 118 \text{ Nm}}$$

- Alternativamente, la corriente y el par de arranque en este caso también se pueden obtener a partir de las fórmulas (A.10), (A.2) y (A.11):

$$\text{(A.10):} \quad I_{aZ} = \frac{400}{\sqrt{(0,23 + 2)^2 + (1 + 0)^2}} \Rightarrow \underline{I_{aZ} = 164 \text{ A}}$$

$$\text{(A.2):} \quad \text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{aZL} = \sqrt{3} I_{aZ} = \sqrt{3} \cdot 164 \Rightarrow \boxed{I_{aZL} = 283 \text{ A}}$$

$$\text{(A.11):} \quad M_{aZ} = \frac{3 \cdot 0,23}{157,1} \cdot 164^2 \Rightarrow \boxed{M_{aZ} = 118 \text{ Nm}}$$

- En este motor, la corriente de línea y el par en el arranque cuando se inserta una resistencia de 2Ω en serie con cada fase del estator valen, respectivamente, 283 A y 118 Nm.

c) Arranque estrella-triángulo

- En este tipo de arranque el motor se arranca en estrella y transcurrido cierto tiempo, en el que el motor ha adquirido cierta velocidad, se le conecta en triángulo; con lo que queda alimentado a su tensión asignada. En el momento del arranque, cuando el motor está conectado en estrella, su tensión de fase es $\sqrt{3}$ veces menor que su tensión asignada V_{1N} . En estrella las corrientes de línea y de fase son iguales y en triángulo la primera es $\sqrt{3}$ veces mayor que la segunda. De todo esto se deduce que, en este tipo de arranque, la corriente de línea $I_{a\lambda}$ (igual a la corriente de fase) y el par $M_{a\lambda}$ valen:

$$I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3} \quad (A.16)$$

$$M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3} \quad (A.17)$$

- Aplicando las relaciones (A.16) y (A.17) al motor que se está analizando se obtiene que:

$$(A.16): \quad I_{a\lambda} = \frac{675}{3} \Rightarrow \boxed{I_{a\lambda} = 225 \text{ A}}$$

$$(A.17): \quad M_{a\lambda} = \frac{668}{3} \Rightarrow \boxed{M_{a\lambda} = 223 \text{ Nm}}$$

- En este motor asíncrono la corriente de línea y el par en el arranque estrella-triángulo valen, respectivamente, 225 A y 223 Nm.

d) Arranque con un autotransformador

- En este tipo de arranque el motor se arranca a una tensión reducida suministrada por un autotransformador y, posteriormente, se va subiendo paulatinamente la tensión a medida que aumenta la velocidad para, finalmente, dejarle conectado a su tensión asignada. En el autotransformador la corriente en el primario (que es la que se demanda a la red eléctrica) y en el secundario (que es la que consume el motor) guardan una proporción inversa a su relación de transformación.
- Se define el parámetro adimensional x , inferior a 1, como el cociente de la tensión de línea que recibe el motor en el momento de iniciar el arranque entre su tensión asignada de línea:

$$x = \frac{V_{1,\text{motor}L}}{V_{1NL}} \quad (A.18)$$

Se comprueba que con este sistema se cumple que en el arranque la corriente de línea que se demanda a la red $I_{a,\text{aut}L}$ y el par $M_{a,\text{aut}}$ se pueden calcular así:

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

$$I_{a,\text{autL}} = x^2 \cdot I_{aL} \quad (\text{A.19})$$

$$M_{a,\text{aut}} = x^2 \cdot M_a \quad (\text{A.20})$$

- En el motor que se está estudiando la aplicación de las fórmulas anteriores proporciona los siguientes resultados:

$$\text{(A.18):} \quad x = \frac{200}{400} \Rightarrow \underline{x = 0,5}$$

$$\text{(A.19):} \quad I_{a,\text{autL}} = 0,5^2 \cdot 675 \Rightarrow \boxed{I_{a,\text{autL}} = 169 \text{ A}}$$

$$\text{(A.20):} \quad M_{a,\text{aut}} = 0,5^2 \cdot 668 \Rightarrow \boxed{M_{a,\text{aut}} = 167 \text{ Nm}}$$

- En este arranque por autotransformador la corriente de línea y el par en el arranque valen, respectivamente, 169 A y 167 Nm.

e) Arranque con un arrancador electrónico

- En este tipo de arranque el motor se arranca a una tensión reducida suministrada por un sistema electrónico y, posteriormente, se va subiendo paulatinamente la tensión a medida que aumenta la velocidad para, finalmente, dejarle conectado a su tensión asignada. En el arrancador electrónico las corrientes de línea demandada a la red y suministrada al motor son iguales.
- Al igual que con el autotransformador, se define el parámetro adimensional x , inferior a 1, como el cociente entre la tensión de línea que recibe el motor en el momento de iniciar el arranque y su tensión asignada de línea (relación (A.18)).

Se comprueba que con este sistema se cumple que en el arranque la corriente de línea que se demanda a la red $I_{a,\text{electL}}$ y el par $M_{a,\text{elect}}$ se pueden calcular así:

$$I_{a,\text{electL}} = x \cdot I_{aL} \quad (\text{A.21})$$

$$M_{a,\text{elect}} = x^2 \cdot M_a \quad (\text{A.22})$$

- En el motor que se está estudiando el enunciado indica que el parámetro x vale 0,6. Luego, la aplicación de las fórmulas anteriores proporciona los siguientes resultados:

$$\text{(A.21):} \quad I_{a,\text{electL}} = 0,6 \cdot 675 \Rightarrow \boxed{I_{a,\text{electL}} = 405 \text{ A}}$$

$$\text{(A.22):} \quad M_{a,\text{elect}} = 0,6^2 \cdot 668 \Rightarrow \boxed{M_{a,\text{elect}} = 240 \text{ Nm}}$$

- En este arranque mediante un arrancador electrónico la corriente de línea y el par en el arranque valen, respectivamente, 405 A y 240 Nm.

f) Arranque por introducción de una resistencia R_x en serie con cada fase del rotor

- En este sistema el motor se arranca a su tensión asignada, pero con una resistencia R_x conectada en serie con cada fase del rotor. A medida que el motor aumenta su velocidad se va reduciendo el valor de R_x para, finalmente, dejarle conectado en cortocircuito.

Si en el momento de arrancar se da a R_x un valor especial R_{adic} se consigue que el par en el arranque sea igual al par máximo del motor.

- La resistencia añadida en serie con el rotor reducida al estator se calcula así:

$$R'_x = m_i \cdot m_v \cdot R_x \quad (A.23)$$

Luego, se deduce que:

$$R'_{adic} = m_i \cdot m_v \cdot R_{adic} \quad (A.24)$$

- Es evidente que el motor con una resistencia R_x conectada en serie con cada fase del rotor equivale a que ahora tenga una resistencia del rotor cuyo valor está incrementado en R_x . Por lo tanto, partiendo de las relaciones (A.1), (A.7) y (A.8) se deduce que, con este método, la corriente de fase I_{aR} y el par M_{aR} en el arranque son así:

$$(A.1) \text{ y } (A.7): \quad I_{aR} \approx I'_{2aR} = \frac{V_{1N}}{\sqrt{(R_{cc} + R'_x)^2 + X_{cc}^2}} \quad (A.25)$$

$$(A.8): \quad M_{aR} = \frac{m_1 \cdot (R_{cc} + R'_x)}{\frac{2\pi}{60} n_1} \cdot \frac{V_{1N}^2}{(R_{cc} + R'_x)^2 + X_{cc}^2} = \frac{m_1 \cdot (R_{cc} + R'_x)}{\Omega_1} \cdot I_{2aR}^2 \quad (A.26)$$

- La resistencia R_{adic} que proporciona el par máximo en el arranque hace que el deslizamiento de par máximo valga 1. Luego, partiendo de la relación (A.6) se obtiene que su valor reducido al estator R'_{adic} se puede obtener mediante esta relación:

$$(A.6): \quad R'_{adic} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2 \quad (A.27)$$

El verdadero valor de R_{adic} se obtiene teniendo en cuenta la relación (A.24):

$$(A.24): \quad R_{adic} = \frac{R'_{adic}}{m_i \cdot m_v} \quad (A.28)$$

- En el motor que se está estudiando la aplicación de las fórmulas anteriores da los siguientes valores de R'_{adic} y R_{adic} :

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

$$(A.27): \quad R'_{\text{adic}} = \sqrt{0^2 + 1^2} - 0,23 \Rightarrow \underline{R'_{\text{adic}} = 0,77 \Omega}$$

$$(A.28): \quad R_{\text{adic}} = \frac{0,77}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{R_{\text{adic}} = 0,385 \Omega}$$

La corriente de fase I_{aR} durante este arranque se obtiene mediante la relación (A.25):

$$(A.25): \quad I_{aR} \approx I'_{2aR} = \frac{400}{\sqrt{(0,23 + 0,77)^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I_{aR} = 283 \text{ A}}$$

El estator de este motor está conectado en triángulo. Por consiguiente, con este método la corriente de arranque de línea I_{aRL} vale:

$$(A.2): \quad \text{Conexión triángulo} \Rightarrow I_{aRL} = \sqrt{3} I_{aR} = \sqrt{3} \cdot 283 \Rightarrow \boxed{I_{aRL} = 490 \text{ A}}$$

El par en este arranque se calcula mediante la relación (A.26):

$$(A.26): \quad M_{aR} = \frac{3 \cdot (0,23 + 0,77)}{157,1} \cdot 283^2 \Rightarrow \boxed{M_{aR} = 1528 \text{ Nm}}$$

- Dado que con una resistencia R_{adic} conectada en serie con cada fase del rotor se obtiene el par máximo en el arranque, en este caso también se puede calcular el par de arranque M_{aR} igualándolo al par máximo $M_{\text{máx}}$ del motor.

El deslizamiento para par máximo se calcula mediante la relación (A.6):

$$(A.6): \quad s_m = \frac{0,23}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{s_m = 0,23}$$

El par máximo $M_{\text{máx}}$ se puede calcular con la fórmula general del par (A.5) si en ella la tensión se hace igual a la asignada ($V_1 = V_{1N}$) y el deslizamiento se iguala al de par máximo ($s = s_m$):

$$(A.5): \quad M_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{0,23}{0,23}\right)}{157,1} \frac{400^2}{\left(0 + \frac{0,23}{0,23}\right)^2 + 1^2} \Rightarrow \underline{M_{\text{máx}} = 1528 \text{ Nm}}$$

- La resistencia R_{adic} que da lugar al par máximo en el arranque vale $0,385 \Omega$ y con este método la corriente de línea y el par en el arranque valen, respectivamente, 490 A y 1528 Nm .

g) Tiempo de arranque y energía disipada en el mismo

- La constante de tiempo electromecánica τ_{mec} se puede calcular mediante esta expresión:

$$\tau_{mec} = \frac{J \Omega_1}{M_{m\acute{a}x}} \quad (A.29)$$

si se desprecia la resistencia R_1 de las fases del estator se puede usar esta expresión aproximada, basada en la fórmula de Kloss, para obtener el tiempo que tarda en arrancar el motor en un arranque directo en vacío hasta alcanzar el deslizamiento s_B :

$$t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right] \quad (A.30)$$

Si, como indica el enunciado para este caso, se desea calcular el tiempo de arranque hasta que el motor alcanza un deslizamiento $s_B = 0,05$, la expresión (A.30) se transforma en:

$$(A.30): \quad t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4 s_m} + \frac{3}{2} s_m \right] \quad (A.31)$$

$(s_B = 0,05)$

- La fórmula (A.29) permite calcular la constante de tiempo electromagnética τ_{mec} de este motor:

$$(A.29): \quad \tau_{mec} = \frac{0,8 \cdot 157,1}{1528} \Rightarrow \underline{\tau_{mec} = 0,082 \text{ s}}$$

Luego, si el tiempo de arranque de este motor se calcula mediante la relación (A.31) se obtiene el siguiente valor:

$$(A.30): \quad t_a = 0,082 \left[\frac{1}{4 \cdot 0,23} + 1,5 \cdot 0,23 \right] \Rightarrow \boxed{t_A = 0,12 \text{ s}}$$

Este resultado solamente es una estimación del tiempo de arranque, ya que está obtenido utilizando unas expresiones que únicamente son válidas para el estudio de regímenes permanentes, pero el arranque es un fenómeno transitorio. Lo que se ha hecho es aproximar el arranque a una sucesión de regímenes permanentes. A pesar de todo lo anterior, este resultado permite tener una idea del tiempo de arranque, comparar la rapidez de la puesta en marcha de varios motores y analizar la influencia de diversas magnitudes sobre el tiempo de arranque.

- La expresión que permite calcular la energía perdida en un arranque en vacío es:

$$\Delta W_a = \frac{J \Omega_1^2}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) \quad (A.32)$$

Aplicando dicha expresión al motor que se está estudiando se obtiene este resultado:

$$(A.32): \quad \Delta W_a = \frac{0,8 \cdot 157,1^2}{2} \cdot (1 + 0) \Rightarrow \boxed{\Delta W_a = 9872 \text{ J}}$$

- En el motor estudiado, el tiempo de arranque directo en vacío hasta un deslizamiento de 0,05 se estima en unos 0,1 s y en él se disipa una energía de 9872 julios.

h) Tiempo de arranque y energía disipada en un arranque con autotransformador

- Según el enunciado a medida que el motor arranca la tensión va aumentando así:

	I	II	III
Deslizamiento	$1 \geq s > 0,7$	$0,7 \geq s > 0,3$	$0,3 \geq s$
Tensión de línea	$V_{1LI} = V_{1,motorL} = 200 \text{ V}$	$V_{1LII} = 300 \text{ V}$	$V_{1LIII} = V_{1NL} = 400 \text{ V}$

- La expresión que permite calcular el tiempo que tarda el motor en pasar de un deslizamiento s_A a un deslizamiento s_B durante el arranque en vacío es:

$$t = \tau_{mec} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{4 s_m} + \frac{s_m}{2} \ln \frac{s_A}{s_B} \right] \quad (A.33)$$

- Por otra parte, la constante de tiempo electromecánica τ_{mec} viene dada por la relación (A.29), la cual indica que esta magnitud es inversamente proporcional al par máximo $M_{m\acute{a}x}$ del motor. En este caso, en el que se va a variar la tensión que recibe el motor manteniendo siempre la misma frecuencia, sucede que el par máximo es proporcional al cuadrado de la tensión.

Por lo tanto, en los tres intervalos en los que se subdivide el arranque, las constantes de tiempo van a ser así:

- * En el intervalo III la tensión es la asignada, por lo que la constante de tiempo electromecánica tendrá el mismo valor que la obtenida en el apartado anterior:

$$(A.29): \quad \underline{\tau_{mecIII} = 0,082 \text{ s}}$$

- * En el intervalo II, la tensión es inferior a la asignada y sucederá que:

$$\frac{\tau_{mecII}}{\tau_{mecIII}} = \frac{M_{m\acute{a}xIII}}{M_{m\acute{a}xII}} = \left(\frac{V_{1LIII}}{V_{1LII}} \right)^2 \Rightarrow \tau_{mecII} = \left(\frac{V_{1LIII}}{V_{1LII}} \right)^2 \cdot \tau_{mecIII} \quad (A.34)$$

$$(A.34): \quad \tau_{mecII} = \left(\frac{400}{300} \right)^2 \cdot 0,082 \Rightarrow \underline{\tau_{mecII} = 0,146 \text{ s}}$$

- * Trabajando análogamente a como se ha hecho en el intervalo II, se deduce que en el intervalo I la constante de tiempo electromecánica vale:

$$(A.34): \quad \tau_{mecI} = \left(\frac{V_{1LIII}}{V_{1LI}} \right)^2 \cdot \tau_{mecIII} \quad (A.35)$$

$$(A.35): \quad \tau_{mecI} = \left(\frac{400}{200} \right)^2 \cdot 0,082 \Rightarrow \underline{\tau_{mecI} = 0,328 \text{ s}}$$

- Es sabido que el deslizamiento de par máximo s_m no varía con la tensión. Por otra parte, el enunciado de este problema pide que se calcule el tiempo de arranque hasta la velocidad cuyo deslizamiento es 0,05.

Por consiguiente, dividiendo el tiempo total de arranque en los tres intervalos I, II y III indicados en el enunciado y empleando la relación (A.33) se obtienen estos tiempos de arranque parciales:

$$(A.33): \quad t_I = 0,328 \cdot \left[\frac{1^2 - 0,7^2}{4 \cdot 0,23} + \frac{0,23}{2} \ln \frac{1}{0,7} \right] \Rightarrow \underline{t_I = 0,195 \text{ s}}$$

$$(A.33): \quad t_{II} = 0,146 \cdot \left[\frac{0,7^2 - 0,3^2}{4 \cdot 0,23} + \frac{0,23}{2} \ln \frac{0,7}{0,3} \right] \Rightarrow \underline{t_{II} = 0,078 \text{ s}}$$

$$(A.33): \quad t_{III} = 0,082 \cdot \left[\frac{0,3^2 - 0,05^2}{4 \cdot 0,23} + \frac{0,23}{2} \ln \frac{0,3}{0,05} \right] \Rightarrow \underline{t_{III} = 0,025 \text{ s}}$$

Luego, el tiempo total de arranque se calcula mediante la suma de los tres tiempos de arranque parciales:

$$t_a = t_I + t_{II} + t_{III} = 0,195 + 0,078 + 0,025 \Rightarrow \boxed{t_a = 0,298 \text{ s}}$$

- La energía perdida en un arranque en vacío viene dada por la relación (A.32) y no cambia con los diferentes sistemas de arranque, siempre que en ellos no se modifique la velocidad de sincronismo Ω_1 . Por lo tanto, la energía perdida en este arranque tiene el mismo valor que en el arranque del apartado f):

$$(A.32): \quad \boxed{\Delta W_a = 9872 \text{ J}}$$

- En este arranque en vacío a tensión reducida mediante un autotransformador, el tiempo de arranque hasta un deslizamiento de 0,05 se estima en unos 0,3 s (0,298 s) y en él se disipa una energía de 9872 julios.

i) Energía disipada en un arranque en dos etapas, cada una con diferente velocidad de sincronismo

- Se van a denominar I y II a las dos etapas en que se divide el arranque.

En la etapa I, el número de polos es $2p = 8$, luego la velocidad de sincronismo correspondiente vale:

$$\Omega_{1I} = \frac{2 \pi f_1}{p} = \frac{2 \pi \cdot 50}{4} \Rightarrow \underline{\Omega_{1I} = 78,6 \text{ rad / s}}$$

En la etapa II, el número de polos es $2p = 4$, luego la velocidad de sincronismo correspondiente es la misma que se ha utilizado en los apartados anteriores:

$$\underline{\Omega_{1II} = 157,1 \text{ rad / s}}$$

- La energía perdida en este arranque es la suma de las disipadas en sus dos etapas, las cuales se pueden obtener mediante la relación (A.32):

$$(A.32): \quad \Delta W_{aI} = \frac{0,8 \cdot 78,6^2}{2} \cdot (1 + 0) \Rightarrow \underline{\Delta W_{aI} = 2471 \text{ J}}$$

$$(A.32): \quad \Delta W_{aII} = \frac{0,8 \cdot (157,1 - 78,6)^2}{2} \cdot (1 + 0) \Rightarrow \underline{\Delta W_{aII} = 2465 \text{ J}}$$

Luego, la energía disipada total en este arranque vale:

$$\Delta W_a = \Delta W_{aI} + \Delta W_{aII} = 2471 + 2465 \Rightarrow \boxed{\Delta W_a = 4936 \text{ J}}$$

Comparando este resultado con el obtenido en el apartado f) se observa que con este sistema (*Conexión Dahlander*), en el que se utilizan dos números de polos distintos que están en la proporción 2:1, se reduce a la mitad la energía perdida durante el arranque.

- En este arranque en vacío, a la tensión asignada y en dos etapas con diferentes números de polos proporcionados por una conexión Dahlander, se pierde una energía de 49362 julios.

ANEXO B:
DINÁMICA DEL MOTOR ASÍNCRONO

Introducción

En este anexo se van a estudiar con más detalle que en el texto principal algunos aspectos de la dinámica de un motor asíncrono o de inducción durante su arranque.

El arranque es un proceso transitorio en el que la velocidad va aumentando desde un valor nulo hasta la velocidad de régimen permanente que corresponda a la carga mecánica que esté moviendo; lo que hace que ni la velocidad ni el par permanezcan constantes y que las corrientes no sean perfectamente sinusoidales durante esta maniobra. Por lo tanto, su estudio riguroso exige plantear y resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales que modelizan el sistema red eléctrica-motor-carga mecánica durante todo este fenómeno transitorio.

En un análisis simplificado se supone que el arranque se produce a una velocidad relativamente lenta, lo que permite considerarlo como una sucesión de distintos estados permanentes y, por lo tanto, se puede analizar empleando la curva y las expresiones del par en régimen permanente.

Este método de análisis es aproximado y tanto más erróneo cuanto más rápido sea el arranque. Aun así, será el que se utilice en los siguientes apartados de este anexo, ya que permite tener una visión de lo que sucede durante el proceso de arranque, hacer una estimación de algunas magnitudes, comparar el comportamiento de varios motores y analizar la influencia de diversas magnitudes sobre esta maniobra.

El análisis de todos los fenómenos que se van a estudiar en este anexo se basa en la **ecuación de equilibrio dinámico** del sistema motor-carga mecánica:

$$\Delta M = M - M_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (B.1)$$

En esta expresión M es el par motor y M_r es el par resistente de la carga mecánica, J es el momento de inercia (que se mide en Kgm^2 y que habitualmente se designa como I en los libros de mecánica) del conjunto motor-carga mecánica e incluye también la inercia del acoplamiento entre los ejes del motor y de la carga (naturalmente, este momento de inercia está referido al eje del motor) y Ω es la velocidad de giro del motor medida en rad/s .

El deslizamiento s de un motor asíncrono se define mediante la relación siguiente, donde Ω_1 es la velocidad de sincronismo en rad/s :

$$s = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \quad (B.2)$$

De la relación (B.2) se deduce que

$$\Omega = \Omega_1 (1 - s) \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = -\Omega_1 \frac{ds}{dt} \quad (B.3)$$

Lo cual permite reescribir la expresión (B.1) de esta manera:

$$\Delta M = M - M_r = -J \Omega_1 \frac{d s}{d t} \quad (B.4)$$

En este estudio la ecuación que se va a utilizar para el par M del motor va a ser la **fórmula de Kloss**, que relaciona el par de la máquina M para un deslizamiento s con el par máximo $M_{m\acute{a}x}$, que se produce cuando el deslizamiento es s_m :

$$\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2(1 + a s_m)}{\frac{s}{s_m} + 2 a s_m + \frac{s_m}{s}} \quad (B.5)$$

En la expresión anterior el parámetro a es:

$$a = \frac{R_1}{R'_2} \quad (B.6)$$

En motores grandes suele suceder que la resistencia del estator R_1 es muy inferior a la resistencia del rotor reducida al estator R'_2 , lo que hace que el coeficiente a sea prácticamente nulo y, en consecuencia, la fórmula de Kloss (B.5) se pueda simplificar así:

$$R_1 \lll R'_2 \Rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\frac{M}{M_{m\acute{a}x}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}}} \quad (B.7)$$

Tiempo de arranque de un motor asíncrono

Durante el proceso de arranque de un motor asíncrono se verifica la ecuación de equilibrio dinámico, tanto en su versión (B.1) como en la (B.4). El tiempo que durante el arranque tarda el motor en pasar de una velocidad Ω_A a una velocidad Ω_B -a las cuáles les corresponden los deslizamientos s_A y s_B , respectivamente- se puede calcular integrando la ecuación (B.1) o la (B.4):

$$t = J \int_{\Omega_A}^{\Omega_B} \frac{d \Omega}{\Delta M} \quad (B.8)$$

$$t = -J \Omega_1 \int_{s_A}^{s_B} \frac{d s}{\Delta M} = J \Omega_1 \int_{s_B}^{s_A} \frac{d s}{\Delta M} \quad (B.9)$$

Observando estas expresiones se advierte que, como es lógico, el tiempo de arranque disminuye si el momento de inercia total J es reducido y si durante el arranque se mantiene elevado el valor de ΔM ($\Delta M = M - M_r$). Esto último significa que los arranques serán rápidos si se consigue mantener un par motor M elevado (y, si es posible, si se logra reducir el par resistente M_r) durante toda la maniobra.

Usualmente la resolución analítica de las integrales que aparecen en las expresiones (B.8) y (B.9) es complicada, lo que exige realizarla por métodos numéricos. Otra posibilidad es usar un método gráfico, como el que se describe en el tomo V del libro de Cortes Cherta [3].

Si lo que se desea es obtener el valor del tiempo que transcurre desde que el motor inicia el arranque hasta que adquiere la velocidad Ω_B , habrá que dar los siguientes valores a Ω_A y a s_A en las fórmulas (B.8) y (B.9):

$$\text{Tiempo de arranque desde el principio: } \Omega_A = 0; \quad s_A = 1 \quad (\text{B.10})$$

$$t_a = J \int_0^{\Omega_B} \frac{d\Omega}{\Delta M} \quad (\text{B.11})$$

$$t_a = -J \Omega_1 \int_1^{s_B} \frac{ds}{\Delta M} = J \Omega_1 \int_{s_B}^1 \frac{ds}{\Delta M} = J \Omega_1 \int_{s_B}^1 \frac{ds}{M - M_r} \quad (\text{B.12})$$

El último tramo del arranque, cuando el motor ya tiene una velocidad muy próxima a la del equilibrio final, es muy lento porque entonces hay poca diferencia entre los pares motor y resistente; lo que hace que ΔM sea pequeño. Es decir, al final del arranque el motor demora un tiempo relativamente alto en apenas aumentar la velocidad hasta alcanzar la velocidad de equilibrio final. Este último tramo no es relevante porque en él el motor prácticamente ya está a la velocidad final. Por esta razón, el tiempo total de arranque t_a no se calcula dando a Ω_B (o a s_B) el valor correspondiente al equilibrio final, sino el correspondiente a una velocidad de giro algo menor, pero lo suficientemente cercana a la de equilibrio final. Es más, en el equilibrio final sucede que los pares motor M y resistente M_r se igualan y sucede que:

$$\text{Punto de equilibrio al final del arranque: } \Delta M = M - M_r = 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta M} = \infty$$

Por lo que las integrales (B.11) y (B.12) no se pueden resolver en el punto de equilibrio donde queda el motor al final del arranque. Esta es otra razón para no tomar este punto de equilibrio final como límite de las integrales. Unos valores habituales para Ω_B y s_B cuando se quiere calcular el tiempo de arranque son:

$$\text{Tiempo total de arranque: } \Omega_B = 0,95 \Omega_1; \quad s_B = 0,05 \quad (\text{B.13})$$

Tiempo de arranque en vacío

Si lo que se desea es calcular el tiempo de arranque cuando el motor funciona en vacío, es decir, con un par resistente M_r nulo, sucede que:

$$\text{Arranque en vacío: } M_r = 0 \Rightarrow \Delta M = M \quad (\text{B.14})$$

Si el par motor M se calcula mediante la fórmula de Kloss (B.5), de las relaciones (B.9) y (B.14) se obtiene que:

$$t = J \Omega_1 \int_{s_B}^{s_A} \frac{ds}{M} = \frac{J \Omega_1}{2(1 + a s_m) M_{\text{máx}}} \int_{s_B}^{s_A} \left[\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} + 2 a s_m \right] ds \quad (\text{B.15})$$

Realizando la integral que aparece en la relación (B.15) se llega a este resultado:

$$t = \frac{J \Omega_1}{2(1 + a s_m) M_{\text{máx}}} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{2 s_m} + s_m \ln \frac{s_A}{s_B} + 2 a s_m (s_A - s_B) \right] \quad (\text{B.16})$$

Se define el parámetro **constante de tiempo electromecánica** τ_{mec} como el tiempo de arranque del motor si este arranque fuese en vacío, el motor proporcionara el par máximo $M_{\text{máx}}$ permanentemente durante toda la maniobra y la velocidad final que se alcanzase fuese la velocidad de sincronismo Ω_1 . Luego, en estas condiciones (totalmente irreales, pero que permiten definir un parámetro útil para analizar el tiempo de arranque) la relación (B.11) indica que:

$$\tau_{\text{mec}} = J \int_0^{\Omega_1} \frac{d\Omega}{M_{\text{máx}}} \Rightarrow \boxed{\tau_{\text{mec}} = \frac{J \Omega_1}{M_{\text{máx}}}} \quad (\text{B.17})$$

Utilizando este parámetro la ecuación (B.16) se puede reescribir así:

$$\boxed{t = \frac{\tau_{\text{mec}}}{1 + a s_m} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{4 s_m} + \frac{s_m}{2} \ln \frac{s_A}{s_B} + a s_m (s_A - s_B) \right]} \quad (\text{B.18})$$

Si lo que se quiere es calcular el tiempo total de arranque, habrá que usar en la relación (B.18) el valor de s_A indicado en (B.10):

$$s_A = 1; s_B \lll 1 \Rightarrow s_A - s_B \approx 1; s_A^2 - s_B^2 \approx 1$$

$$t_a = \frac{\tau_{\text{mec}}}{1 + a s_m} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B + a s_m \right] \quad (\text{B.19})$$

En el caso de motores grandes suele suceder que la resistencia del estator R_1 es muy inferior a la resistencia del rotor reducida al estator R'_2 , lo que hace que el coeficiente a sea prácticamente nulo y, en consecuencia, las fórmulas anteriores se pueden simplificar así:

$$R_1 \lll R'_2 \Rightarrow a = \frac{R_1}{R'_2} \approx 0$$

$$\boxed{t = \tau_{\text{mec}} \left[\frac{s_A^2 - s_B^2}{4 s_m} + \frac{s_m}{2} \ln \frac{s_A}{s_B} \right]} \quad (\text{B.20})$$

$$\boxed{t_a = \tau_{\text{mec}} \left[\frac{1}{4 s_m} - \frac{s_m}{2} \ln s_B \right]} \quad (\text{B.21})$$

Usando en la relación (B.21) los valores indicados en (B.13) se deduce que:

$$s_B = 0,05 \Rightarrow t_a = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4s_m} + \frac{3}{2}s_m \right] \quad (B.22)$$

Se observa que el tiempo de arranque será tanto menor cuanto más pequeña sea la constante electromecánica τ_{mec} del motor. Por lo tanto, τ_{mec} sirve para comparar la rapidez en el arranque de distintos motores. Por otra parte, es fácil deducir que la expresión (B.22) da un tiempo de arranque mínimo cuando $s_m = 0,408$.

Como se ha indicado al principio de este anexo, estas expresiones -obtenidas partiendo de la ecuación del par en régimen permanente- proporcionan solamente resultados aproximados; pero permiten comparar la velocidad de arranque de varios motores y apreciar las magnitudes y los parámetros que influyen en el tiempo de arranque.

Pérdidas de energía en el arranque de un motor asíncrono

Balance de potencias

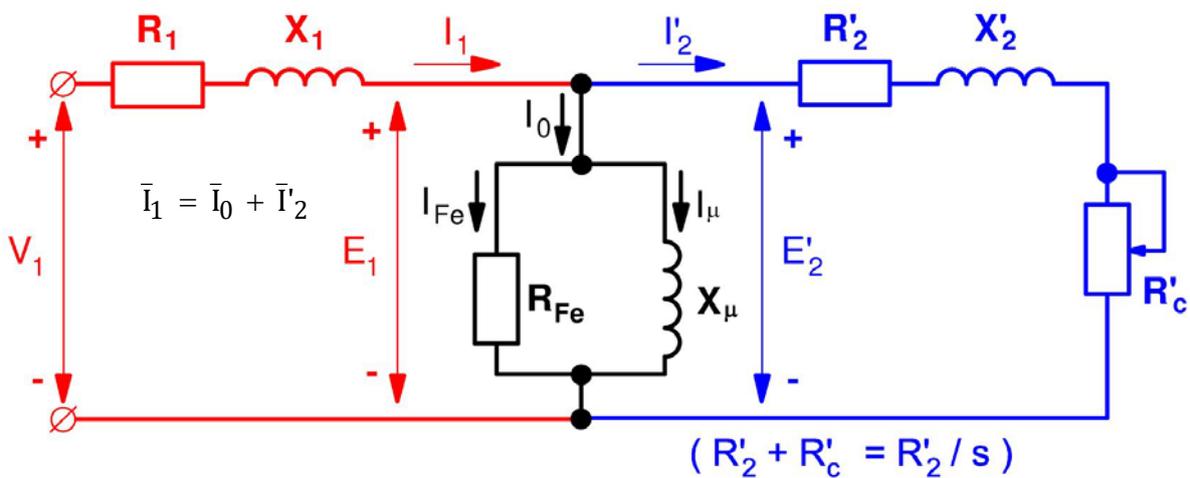


Fig. B1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona

En este apartado se va a hacer un repaso al balance de potencias de un motor asíncrono. Para profundizar más sobre este tema puede consultar mi texto [14].

La Fig. B1 muestra el circuito equivalente exacto y en la Fig. B2 aparece el balance de potencias de una máquina asíncrona trifásica actuando como motor.

En la Fig. B2 se observa que un motor asíncrono absorbe por el estator una potencia eléctrica (potencia activa) P_1 y suministra por el eje una potencia mecánica P_u , que es la potencia útil.

En la conversión de la potencia eléctrica P_1 en mecánica P_u se pierde algo de potencia que se disipa en forma de calor. Hay diferentes tipos de potencia perdida o *pérdidas*:

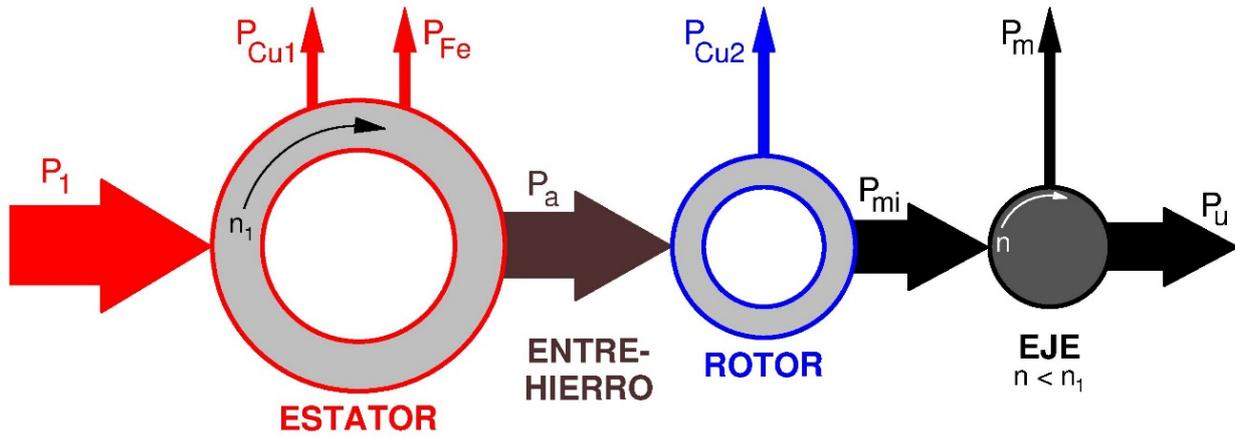


Fig. B2: Balance de potencias de un motor asíncrono

P_{Cu1} Pérdidas en el cobre del estator, debidas a la resistencia R_1 de las fases del devanado del estator:

$$P_{Cu1} = 3 \cdot R_1 \cdot I_1^2 \quad (B.23)$$

P_{Fe} Pérdidas magnéticas o en el hierro, debidas a las corrientes de Foucault y a la histéresis en los núcleos magnéticos. En el circuito equivalente de la Fig. B1 estas pérdidas son las que se disipan en la resistencia R_{Fe} .

P_{Cu2} Pérdidas en el cobre del rotor, debidas a la resistencia R_2 (o R'_2 si se usa el rotor reducido al estator) de las fases del devanado del rotor.

$$P_{Cu2} = 3 \cdot R'_2 \cdot I_2^2 \quad (B.24)$$

P_m Pérdidas mecánicas y de ventilación debidas a los rozamientos mecánicos de la máquina y a la potencia consumida por su sistema de refrigeración. Estas pérdidas no se reflejan en el circuito equivalente de la Fig. B1.

Además de estas pérdidas existen las *pérdidas adicionales* que engloban a pérdidas debidas a diferentes causas de difícil cuantificación y que no se tienen en cuenta en este estudio.

De lo anterior y de la Fig. B2 se deduce que las pérdidas totales P_p de la máquina valen:

$$P_p = P_{Cu1} + P_{Fe} + P_{Cu2} + P_m \quad (B.25)$$

La *potencia en el entrehierro* P_a (Fig. B2) es la potencia que fluye del estator hacia el rotor a través del entrehierro. En el circuito equivalente de la Fig. B1 esta potencia es la que se gasta en la totalidad de las resistencias del rotor. Luego, teniendo presente, además, la relación (B.24) se obtiene que:

$$P_a = 3 I_2^2 \frac{R'_2}{s} = \frac{P_{Cu2}}{s} \Rightarrow P_{Cu2} = s \cdot P_a \quad (B.26)$$

La potencia interna es la que la máquina transforma de potencia electromagnética en potencia mecánica. Vista desde el lado mecánico se trata de la *potencia mecánica interna* P_{mi} y es la que internamente se ejerce sobre el eje. En el circuito equivalente (Fig. B1) esta potencia es la que se gasta en la resistencia de carga R'_c :

$$P_{mi} = 3 I_2'^2 R'_c = 3 I_2'^2 R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = 3 I_2'^2 R'_2 \left(\frac{1-s}{s} \right) \Rightarrow P_{mi} = P_a (1-s) \quad (B.27)$$

El par interno M , que es prácticamente igual al par útil, se puede obtener así:

$$M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{P_a (1-s)}{\Omega} = \frac{P_a}{\Omega_1} \Rightarrow P_a = M \cdot \Omega_1 \quad (B.28)$$

En la fórmula anterior se han empleado las relaciones (B.27) y (B.3).

Pérdidas de energía en el arranque

Durante el arranque de un motor de inducción, la mayor parte del tiempo la corriente del estator I_1 es bastante más grande que la corriente asignada I_{1N} . Por lo tanto, es posible despreciar la corriente de vacío I_0 frente a I_1 e I'_2 (ver la Fig. B1) y las pérdidas en el cobre del estator y del rotor son muy grandes, por lo que se pueden despreciar el resto de las pérdidas en el arranque:

$$\text{Arranque: } I_1 \gg I_{1N} \Rightarrow \begin{cases} I_0 \ll I'_2 \Rightarrow I_1 \approx I'_2 \\ P_{Cu1} + P_{Cu2} \gg P_{Fe} + P_m \end{cases} \quad (B.29)$$

Luego, teniendo en cuenta (B.23), (B.25) y (B.29), durante el arranque sucede que:

$$\text{Arranque: } P_p \approx P_{Cu1} + P_{Cu2} \quad (B.30)$$

$$P_{Cu1} = 3 R_1 I_1^2 = 3 R_1 I_2'^2 \quad (B.31)$$

Luego, aplicando la relación (B.24) e introduciendo el parámetro a , definido en (B.6), se obtiene que:

$$\text{Arranque: } P_p = P_{Cu1} + P_{Cu2} = (1+a) \cdot P_{Cu2} \quad (B.32)$$

Aplicando las relaciones (B.26) y (B.28) sobre (B.32):

$$\text{Arranque: } P_p = (1+a) \cdot (s \cdot P_a) = (1+a) \cdot (s \cdot M \cdot \Omega_1) \quad (B.33)$$

La energía perdida durante todo el proceso de arranque ΔW_a se transforma en calor y aumenta la temperatura de la máquina. Esta energía se obtiene integrando la potencia perdida (B.33) a lo largo de todo el tiempo que dura el arranque:

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

$$\Delta W_a = \int_0^{t_a} P_p dt = (1 + a) \int_0^{t_a} (s \cdot M \cdot \Omega_1) dt \quad (\text{B.34})$$

Dado que se verifica la relación (B.2), la expresión (B.34) se puede reescribir así:

$$\Delta W_a = (1 + a) \int_0^{t_a} M (\Omega_1 - \Omega) dt \quad (\text{B.35})$$

Pérdidas de energía en el arranque en vacío

Si el arranque es en vacío se verifica la relación (B.14) y la ecuación de equilibrio dinámico (B.1) queda así:

$$M = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (\text{B.36})$$

Sustituyendo (B.36) en la expresión (B.35) queda que:

$$\begin{aligned} \Delta W_a &= (1 + a) J \int_0^{t_a} (\Omega_1 - \Omega) \frac{d\Omega}{dt} dt \\ \Delta W_a &= (1 + a) J \int_0^{\Omega_1} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

En la relación (B.37) se ha supuesto, por simplicidad, que al final del arranque el motor gira a una velocidad prácticamente igual a la de sincronismo Ω_1 . Calculando la integral que aparece en (B.37) se deduce que:

$$\Delta W_a = (1 + a) J \left[(\Omega_1 \cdot \Omega) - \frac{\Omega^2}{2} \right]_0^{\Omega_1}$$

$$\Delta W_a = \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) \frac{J \Omega_1^2}{2} = (1 + a) W_c$$

(B.38)

En la expresión anterior se ha introducido la magnitud W_c que es la energía cinética del sistema motor-carga cuando gira a la velocidad de sincronismo:

$$W_c = \frac{J \Omega_1^2}{2} \quad (\text{B.39})$$

Se observa en la relación (B.38) que la energía perdida ΔW_a es la suma de dos energías: la debida a las pérdidas en el cobre del rotor, que es igual a la energía cinética a velocidad de sincronismo W_c , y la debida a las pérdidas en el cobre del estator, que es igual a a veces W_c .

De todo lo anterior se deduce que cuanto mayor sea el momento de inercia total J del sistema motor-carga mecánica, más energía se perderá durante el arranque, la cual se disipará en forma de calor y aumentará la temperatura de la máquina asíncrona.

También se aprecia que, a diferencia de lo que más tarde se comprobará para los arranques en carga, en vacío todos los sistemas de arranque que no incluyan modificaciones en la velocidad de sincronismo Ω_1 dan lugar a la misma potencia perdida.

En consecuencia, en todos los arranques a tensión reducida se obtiene en vacío la misma energía perdida que en el arranque directo. Lo mismo sucede también cuando se arranca un motor de anillos introduciendo resistencias en serie con el rotor; pero en este caso existe la ventaja que gran parte de la energía perdida ΔW_a se disipa en el reóstato que se coloca en serie con el rotor y no en el motor, por lo que el calentamiento de la máquina es menor que con otros sistemas.

Dado que la energía cinética W_c depende cuadráticamente de la velocidad de sincronismo Ω_1 (ver la relación (B.39)), en los sistemas de arranque en los que se va aumentando la velocidad de sincronismo desde un valor pequeño hasta su valor en condiciones asignadas, bien de forma continua o bien por escalones, se consigue que la energía perdida sea menor que si el arranque se realiza desde el principio a la velocidad de sincronismo asignada.

Pérdidas de energía en el arranque con carga

La ecuación de equilibrio dinámico en carga es (B.1), luego:

$$M = J \frac{d\Omega}{dt} + M_r \quad (B.40)$$

Sustituyendo esta relación en la (B.35) se deduce lo siguiente:

$$\Delta W_a = (1 + a) \left[J \int_0^{t_a} (\Omega_1 - \Omega) \frac{d\Omega}{dt} dt + \int_0^{t_a} M_r (\Omega_1 - \Omega) dt \right] \quad (B.41)$$

Por otra parte, de la relación (B.1) también se llega a:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Delta M}{J} = \frac{M - M_r}{J} \Rightarrow \frac{dt}{d\Omega} = \frac{J}{M - M_r}$$

$$dt = \frac{d\Omega}{\frac{M - M_r}{J}} \Rightarrow dt = \frac{J}{M - M_r} d\Omega \quad (B.42)$$

Luego, operando como en el arranque en vacío, la expresión (B.41) se transforma en:

$$\Delta W_a = (1 + a) J \left[\int_0^{\Omega_1} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega + \int_0^{\Omega_B} \frac{M_r}{M - M_r} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega \right]$$

$$\text{Arranque en carga: } \Delta W_a = (1 + a) W_c + \left[(1 + a) J \int_0^{\Omega_B} \frac{M_r}{M - M_r} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega \right] \quad (\text{B.43})$$

El lector puede sorprenderse al observar que en las relaciones anteriores no se han puesto los mismos límites de integración en las dos integrales que aparecen. En rigor, las integrales son hasta la velocidad final de equilibrio, pero en el segundo sumando hay que tomar un límite de integración Ω_B algo menor (como el indicado en (B.13)) porque en el denominador aparece la diferencia $\Delta M = M - M_r$ y sucede lo mismo que se explicó en el cálculo del tiempo de arranque t_a mediante la fórmula (B.12). En el primer sumando, al igual que en el arranque en vacío, apenas hay diferencia si se usa Ω_1 en lugar de Ω_B como límite de integración; pero con Ω_1 sucede que al resolver la integral se obtiene un resultado más sencillo.

Al igual que en el arranque en vacío, la energía perdida en el arranque se divide en dos: las debidas a las pérdidas en el cobre del rotor y a las del estator. Ahora estas energías valen:

$$\Delta W_{aCu2} = W_c + J \int_0^{\Omega_B} \frac{M_r}{M - M_r} (\Omega_1 - \Omega) d\Omega; \quad \Delta W_{aCu1} = a \cdot \Delta W_{aCu2} \quad (\text{B.44})$$

Comparando las expresiones (B.38) y (B.43) se deduce que, en carga, la energía perdida en el arranque ΔW_a es igual a la que se pierde en vacío más un término adicional que depende del momento de inercia J y de los pares motor M y resistente M_r . Este término adicional hace que en el arranque en carga la energía perdida sea superior que en el arranque en vacío.

De la expresión (B.43) se infiere que en carga, la energía perdida en el arranque -que luego se disipa en forma de calor- depende de la energía cinética W_c (y, por lo tanto, del momento de inercia J), al igual que en el arranque en vacío. Pero ahora, esta energía perdida sí que también depende del método de arranque. La energía perdida será menor cuanto mayor sea el valor que va teniendo el par motor M durante el arranque. Por otra parte, la expresión (B.44) muestra que cuanto mayor sea el par resistente M_r más energía se va a perder en el arranque. Esto es, los arranques con mayor par motor M y menor par resistente M_r darán lugar a calentamientos menores.

El hecho de que la energía perdida ΔW_a en un arranque en carga sea menor cuanto mayor sea el par motor M y menores el par resistente M_r y el momento de inercia J significa, según la expresión (B.12), que cuanto menor sea el tiempo de arranque t_a (es decir, cuanto más rápidamente se realice el arranque) menos energía se pierde en él.

En resumen, en el arranque en carga la potencia perdida puede llegar a ser bastante mayor que en el arranque en vacío. Esto sucede sobre todo si la diferencia de pares motor y resistente (esto es, el par acelerador) es pequeña, como sucede en los arranques a tensión reducida. En estos casos sucede que también aumenta el tiempo de arranque t_a .

Se puede considerar que, para un motor de diseño normal, un arranque presenta una inercia demasiado elevada -lo que puede originar calentamientos peligrosos, en particular si se arranca frecuentemente- cuando el momento de inercia total J del sistema supera al doble del momento de inercia del motor solo.

Para reducir el calentamiento del motor en estos arranques se puede utilizar un motor de diseño especial para que su inercia sea baja, con lo que se disminuye la inercia total del sistema. Estos motores son más largos y tienen menos diámetro que los normales.

Otra forma de reducir la inercia es utilizar dos motores acoplados al mismo eje, cada uno de los cuáles tiene una potencia igual a la mitad de la total. La inercia del conjunto de estos dos motores es menor que la de un único motor de la potencia total.

También se puede reducir la energía perdida en el arranque utilizando algunos de los métodos de arranque en los que la velocidad de sincronismo en el arranque varía desde un valor reducido hasta el valor asignado. Esto se puede hacer mediante un convertidor de frecuencia o cuando el motor posee un devanado especial que le permite variar su número de polos.

Uno de los devanados que permiten que el motor funcione con diferentes valores del número de polos es el que tiene la **conexión Dahlander**. En este caso el motor tiene dos valores del número de polos en la proporción 2:1, lo que da lugar a que pueda funcionar con dos velocidades síncronas distintas en la proporción 1:2. El arranque que se inicia con la velocidad síncrona menor para luego conmutar a la mayor disipa la mitad de energía que el arranque directo a la velocidad síncrona mayor (ver el apartado i) del problema del anexo A).

Pérdidas de energía en el frenado a contracorriente y en la inversión del sentido de giro en vacío

Como complemento de lo visto hasta ahora se van a comparar las energías perdidas durante el arranque, el frenado a contracorriente y la inversión del sentido de giro cuando todas estas maniobras se realizan en vacío ($M_r = 0$).

El **frenado a contracorriente** se describe más extensamente en mi texto [15] y consiste en conmutar la corriente de dos fases del estator cuando la máquina asíncrona está funcionando como motor con deslizamiento pequeño; es decir, con una velocidad cercana a la de sincronismo. Esto hace que cambie el sentido de giro del campo magnético y la máquina empiece a funcionar como freno a contracorriente. Justo en el momento de la conmutación, por inercia la máquina sigue girando a la misma velocidad que cuando era motor, la cual, es prácticamente igual a la nueva velocidad de sincronismo, pero de signo opuesto. En estas condiciones la máquina empieza a reducir su velocidad y se la desconecta de la red cuando su velocidad se hace nula.

La energía disipada en esta maniobra se calcula mediante una expresión como la del arranque en vacío (B.37), pero ahora hay que cambiar los límites de la integral. En efecto, con respecto al campo giratorio que se tiene en la máquina tras la conmutación, la velocidad varía desde prácticamente $-\Omega_1$ hasta cero:

ARRANQUE DE MOTORES ASÍNCRONOS

$$\Delta W_f = (1 + a) J \int_{-\Omega_1}^0 (\Omega_1 - \Omega) d\Omega$$

$$\Delta W_f = (1 + a) J \left[(\Omega_1 \cdot \Omega) - \frac{\Omega^2}{2} \right]_{-\Omega_1}^0$$

$$\text{Frenado en vacío: } \boxed{\Delta W_f = \left(1 + \frac{R_1}{R'_2} \right) 3 \frac{J \Omega_1^2}{2} = 3(1 + a) W_c = 3 \Delta W_a} \quad (\text{B.45})$$

Luego, en el frenado a contracorriente en vacío hasta velocidad nula se pierde el triple de energía que en el arranque en vacío. Evidentemente esta maniobra calienta mucho más a la máquina que el arranque y sólo debe realizarse en casos excepcionales o con máquinas especialmente diseñadas.

Si la maniobra es la ***inversión del sentido de giro*** en vacío, se actúa de igual manera que en el frenado a contracorriente; pero la máquina no se desconecta de la red cuando llega a la velocidad nula, sino que se la deja funcionando hasta que adquiere una velocidad próxima a la nueva velocidad de sincronismo. Esta maniobra equivale, pues, a la de frenado a contracorriente seguida de un arranque. Por lo tanto, en este caso se pierde una energía igual a la suma de las debidas a estas dos maniobras. Es decir, la energía perdida en la inversión del sentido de giro en vacío es igual a cuatro veces la energía perdida en el arranque:

$$\text{Inversión en vacío: } \boxed{\Delta W_i = 4(1 + a) W_c = 4 \Delta W_a} \quad (\text{B.46})$$

Evidentemente esta maniobra es aún más dura que la de frenado a contracorriente y calienta más a la máquina asíncrona.