ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Laureano González Vega y Cecilia Valero Revenga
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria

Curso 2019–2020

Índice

Parte I

Lecciones

Lección 1

Espacios Vectoriales

1.1 Definición de Espacio Vectorial. Primeros ejemplos.

En todo lo que sigue $\mathbb{K}$ denotará uno de los cuerpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.1
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un conjunto no vacío. Se dice que V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial si existen dos operaciones

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

verificando las siguientes propiedades (siendo u, v, w elementos cualesquiera de V y a, b elementos cualesquiera de $\mathbb{K}$; 1 denota el elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$):

- $(u+v)+w = u+(v+w)$; $u+v = v+u$;
- *Existe un elemento* $\mathbf{0}$ *en* V *tal que* $u+\mathbf{0} = u$
- *Para cada* u *en* V *existe* w *en* V *tal que* $u+w = \mathbf{0}$;
- $a \cdot (u+v) = a\cdot u + a \cdot v$; $(a+b)\cdot u = a \cdot u + b \cdot u$;
- $a \cdot (b \cdot u) = (ab)\cdot u$; $1 \cdot u = u$.

Los elementos de V se denominan vectores y los elementos de $\mathbb{K}$ escalares.

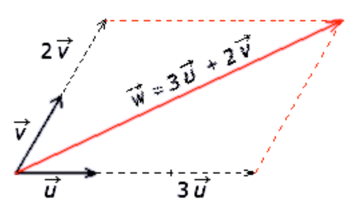

Figura 1.1: Operaciones con vectores

Proposición 1.1.1
Si V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial entonces se verifican las siguientes propiedades (siendo v un elemento cualquiera de V y a un elemento cualquiera de $\mathbb{K}$):

- $0 \cdot v = \mathbf{0}$; $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$; $(-a)\cdot v = a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$;
- *Si* $a \cdot v = \mathbf{0}$ *entonces* $a = 0$ *ó* $v = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1.1.1
En las lineas siguientes aparecen ejemplos de espacios vectoriales que serán utilizados con frecuencia.

- El conjunto $\mathbb{R}^2$ de las parejas de números reales con las operaciones:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad a \cdot (x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

  es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial.

- Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo cualquiera entonces el conjunto $\mathbb{K}^n$ (las n-uplas con coordenadas en $\mathbb{K}$) con las operaciones:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

  es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.

- Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo cualquiera entonces el conjunto $M_{n,m}(\mathbb{K})$ de las matrices con n filas y m columnas y entradas en $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.

- Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo cualquiera entonces el conjunto $\mathbb{K}[X]$ de los polinomios en la variable X y coeficientes en $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. También es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial el conjunto $\mathbb{K}_n[x]$ cuyos elementos son los polinomios en $\mathbb{K}[x]$ cuyo grado es menor o igual que n.

- Sea V el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si f y g son dos elementos cualesquiera de V y α un número real cualquiera, se definen $f + g$ y $\alpha \cdot f$ de la siguiente forma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

  donde x denota un número real arbitrario.

  El conjunto V con las operaciones suma y producto por escalares así definidas es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, llamado $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones reales de variable real.

1.1.1 Ejercicios

Ejercicio 1.1.1.1
Escribir cuatro ejemplos de espacios vectoriales, señalando el conjunto de elementos sobre el que se define la suma (V), el conjunto de números utilizado para definir el producto por escalares ($\mathbb{K}$), la operación suma ($+$) y la operación producto ($\cdot_{\mathbb{K}}$).

Ejercicio 1.1.1.2
En los distintos casos que se presentan a continuación, y sabiendo que se trabaja en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^6$, sustituir los $\cdots$ por los valores que permiten obtener las igualdades señaladas.

1. $(-1, 4, 2, 0, 0, 1) + 3(1, 0, 0, -2, -1, 1) + (-1)(0, 0, 0, 1, 0, 0) =$

   $(\cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots)$

2. $\cdots(-1, 4, 2, 0, 0, 0) + 3(1, 0, 0, \cdots, 4, 4) = (0, \cdots, \cdots, 15, \cdots, \cdots)$

3. $0(\cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

4. $(x, y, z, t, r, s) + (\cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots) = (x, y, z, t, r, s)$

Ejercicio 1.1.1.3
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ de las matrices de tamaño 2×3 (dos filas y tres columnas) con coeficientes reales se consideran los siguientes elementos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Señalar, justificando la respuesta, cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas.

1. La matriz B es la opuesta de la matriz A y $A + (-B) + 2C = 2D$.
2. Existen números reales α y β ambos no nulos tales que $\alpha A = \beta D$.
3. Si $\alpha B + \beta C = D$, entonces $\beta = -\alpha = 1$.

Determina el vector $v = 3A - B + \frac{1}{2}C + 2D$, así como un vector w tal que $v + 3w = A$.

1.2 Subespacios Vectoriales. Combinaciones lineales.

Definición 1.2.1
Se dice que un subconjunto no vacío U de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V es un subespacio vectorial si U con las operaciones de V es también un $\mathbb{K}$–espacio vectorial.

Los subespacios vectoriales admiten la siguiente caracterización.

Proposición 1.2.1
Un subconjunto no vacío U de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V es un subespacio vectorial si y sólo si para todo a_1 y a_2 en $\mathbb{K}$ y para todo u_1 y u_2 en U se tiene:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 \in U.$$

Ejemplo 1.2.1
Se muestran a continuación algunos ejemplos de subconjuntos de un espacio vectorial que son (o no) subespacios vectoriales.

- El conjunto de los vectores (x, y) en $\mathbb{R}^2$ verificando $x + 2y = -1$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$–espacio vectorial. Sí es subespacio vectorial el conjunto de los vectores (x, y) verificando $x + 2y = 0$.
- El conjunto de los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ verificando que $x + y + z = 1$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- El conjunto de los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ verificando que $x+y+z = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- El conjunto de las matrices diagonales con 5 filas y 5 columnas es un subespacio vectorial de $M_{5,5}(\mathbb{R})$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- El conjunto de los polinomios en $\mathbb{K}[x]$ de grado menor o igual que 3 es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

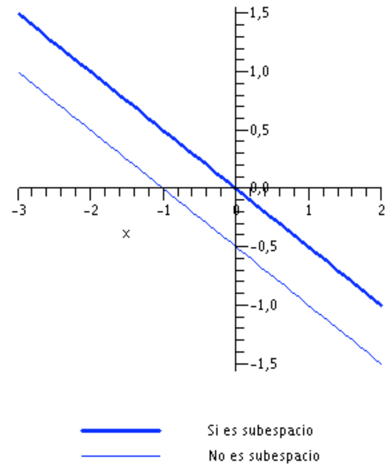

Figura 1.2: No todas los subconjuntos de R^2 son subespacios

- El conjunto de los polinomios en $\mathbb{K}[x]$ de grado igual a 3 no es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}[x]$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial.
- El conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x < 0\}$ no es un subespacio vectorial del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$.
- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es aplicación}\}$, el conjunto W formado por aquellas aplicaciones de V que verifican $2f(0) = f(1)$ es un subespacio vectorial de V.

Con el fin de construir de forma sencilla subespacios vectoriales se introduce a continuación la definición de combinación lineal. Esto permitirá establecer la definición de subespacio generado por una familia de vectores.

Definición 1.2.2
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $u, u_1, \ldots, u_m$ vectores de V. Se dice que u es una combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$ si existen $a_1, \ldots, a_m$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$u = a_1u_1 + a_1u_2 + \ldots + a_mu_m$$

Es inmediato que si u es combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$, y cada uno de éstos es combinación lineal de los vectores $w_1, \ldots, w_l$, entonces u es combinación linel de los vectores $w_1, \ldots, w_l$.

Definición 1.2.3
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ una familia de vectores de V. Se define $\langle S \rangle$ como el subconjunto de V formado por todos aquellos vectores de V que son combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$.

Observar que:

1. Puesto que la combinación lineal de dos elementos en $\langle S \rangle$ es también una combinación lineal de los vectores de $\langle S \rangle$, de acuerdo con la proposición 1.2.1, se tiene que $\langle S \rangle$ es un subespacio vectorial de V.
2. Se tiene asimismo que $\langle S \rangle$ coincide con la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S

3. $\langle S\rangle$ es el subespacio vectorial de V más pequeño de todos aquellos que contienen a S en el sentido siguiente. Si U es un subespacio de V tal que $S \subseteq U$ entonces $\langle S\rangle \subseteq U$.

Ejemplo 1.2.2
Se muestran a continuación dos ejemplos de subespacios generados por un conjunto de vectores.

1. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, si $S_1 = \{(1,-1)\}$, $\langle S_1\rangle$ representa la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Para $S_2 = \{(1,0)\}$, $\langle S_2\rangle$ representa el eje de abcisas; y si $S_3 = \{(1,-1),(1,0)\}$, entonces $\langle S_3\rangle = \mathbb{R}^2$.

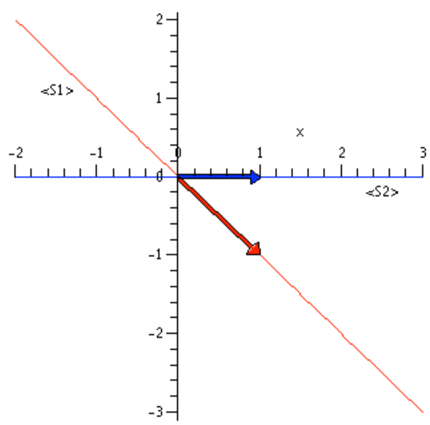

Figura 1.3: Combinaciones lineales de elementos de R^2

2. Si en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_3(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 3 se consideran los subconjuntos

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces $\langle S_1\rangle$ es el conjunto de matrices escalares (matrices diagonales con todos los elementos de la diagonal principal iguales) y $\langle S_2\rangle$ es el conjunto de matrices diagonales. ∎

Todos los espacios vectoriales que vamos a considerar a continuación van a tener en común la propiedad de estar generados por un número finito de vectores: diremos que $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es un **sistema de generadores** de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V si $V = \langle S\rangle$. A los espacios vectoriales que verifiquen esta propiedad se les denominará **espacios vectoriales de tipo finito**.

- Los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $\mathbb{K}^n$, $M_{n,m}(\mathbb{K})$ y $\mathbb{K}_n[x]$ son de tipo finito.
- $\mathbb{K}[x]$ como $\mathbb{K}$–espacio vectorial no es de tipo finito.
- No es de tipo finito el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es aplicación}\}$.

Salvo que se indique explícitamente lo contrario, en todo lo que sigue, espacio vectorial denotará espacio vectorial de tipo finito.

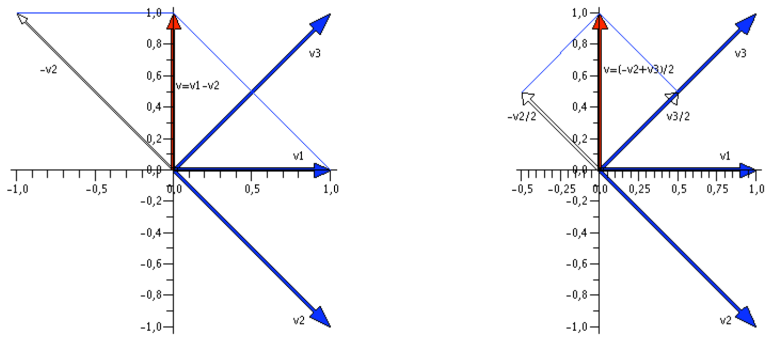

Figura 1.4: Dos formas diferentes de expresar v como combinación lineal de v_1, v_2, v_3

La noción de sistema generador sirve para motivar la introducción del concepto de vectores linealmente independientes, objeto de la siguiente sección.

Es fácil comprobar si consideramos $V = \mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$–espacio vectorial, la familia $S = \{v_1 = (1,0), v_2 = (1,-1), v_3 = (1,1)\}$ es un sistema de generadores de V. Por ejemplo, el vector $v = (0,1)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S de la siguiente forma:

$$v = (0,1) = 1 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (1,-1) + 0 \cdot (1,1) = v_1 - v_2$$

Pero también

$$v = (0,1) = 0 \cdot (1,0) + \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot (1,-1) + \frac{1}{2} \cdot (1,1) = \frac{1}{2}(-v_2 + v_3)$$

Las gráficas de la figura anterior ilustran este hecho.

La búsqueda de la unicidad, i.e. una única forma de representación, en la escritura de un vector como combinación lineal de aquellos que forman un sistema de generadores es lo que conduce, primero a la noción de vectores linealmente independientes y, segundo, al concepto de base.

1.2.1 Ejercicios

Ejercicio 1.2.1.1
Se consideran los siguientes vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,1,-1,0), v_2 = (1,2,0,1), v_3 = (1,0,1,2)$$

$$w_1 = (3,1,1,4), w_2 = (2,3,-4,-2), w_3 = (0,-1,-1,-1)$$

1. Escribir tres combinaciones lineales distintas de los vectores w_1, w_2, w_3 (que denotaremos por u_1, u_2 y u_3).

2. Expresar w_1, w_2 y w_3 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

3. Expresar los vectores u_1, u_2 y u_3 dados en el primer apartado como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

4. ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación?: "Si $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ es combinación lineal de w_1, w_2 y w_3, entonces v es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Ejercicio 1.2.1.2
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto

$$U = \{\alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, 1, -1, -1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Completa cada una de las frases siguientes.

1. U es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores ....
2. U es un subespacio porque si $u_1, u_2 \in U$, entonces ....
3. U es el subespacio generado por ....
4. El vector $u = (1, 1, 0, 0)$ pertenece a U porque ....
5. El vector $u = (1, 1, -1, 0)$ no pertenece a U porque ....

Responde a cada una de las cuestiones siguientes:

a) Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $(1, 1, 1, 1) \in S$ y $(1, 1, -1, -1) \in S$, ¿es cierto que $U \subset S$?

b) Si $W = \{\gamma(1, 1, 1, 1) + \delta(2, 2, 2, 2) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$, ¿es cierto que $W \subset U$?

c) Si $T = \{\gamma(1, 1, 0, 0) + \delta(0, 0, 1, 1) + \epsilon(-1, -1, 3, 3) : \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}\}$, ¿es cierto que $T = U$?

Ejercicio 1.2.1.3
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ define un subespacio U generado por tres vectores, tal que $W = \{\gamma(1, 1, 1, 1) + \delta(2, 2, 0, 0) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ sea un subespacio de U.

Ejercicio 1.2.1.4
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores y subespacios siguientes:

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), v_2 = (1, 1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 1, 1), v_4 = (0, 1, 1, 1),$$

$$S_1 = \langle\{v_1\}\rangle, \qquad S_2 = \langle\{v_1, v_2\}\rangle, \qquad S_3 = \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle, \qquad S_4 = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle.$$

1. Escribir tres vectores distintos de cada uno de los subespacios S_1, S_2, S_3, S_4.
2. Justificar la gráfica anterior.
3. Escribir dos vectores de S_2 que no estén en S_1, dos vectores de S_3 que no estén en S_2, y dos vectores de S_4 que no estén en S_3.
4. Si $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, se puede expresar cada e_i como combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4?
5. ¿Se puede afirmar que $\mathbb{R}^4 = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$

Ejercicio 1.2.1.5
Se consideran las siguientes familias de vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$C = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} \quad \text{y} \quad S = \langle\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}\rangle$$

1. Indicar la cantidad de vectores que hay en C y en S.
2. Comprobar que C no es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, y que S sí lo es.
3. Dar un vector de S que no pertenezca a C. ¿Hay algún vector de C que no esté en S?
4. ¿Se puede decir que C es un sistema generador de S?

Ejercicio 1.2.1.6
Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes conjuntos.

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - y \geq 0\}$$
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2,\ y \leq 0\}$$
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 2y = 0\}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $\alpha U = \{\alpha u : u \in U\}$; análogamente se define αW y αT. Además llamamos $U* = \{\alpha u : u \in U \ \alpha \in \mathbb{R}\}$; de forma similar $T*$, $W*$.

1. Representa gráficamente U, W, T, $(-1) \cdot U$, $3 \cdot W$ y $5 \cdot T$.
2. Representa gráficamente $U*$, $W*$, $T*$.
3. ¿Quiénes de los conjuntos U, W y T son subespacios de $\mathbb{R}^2$?

Ejercicio 1.2.1.7
Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales?

a) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 8y = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y = 2\}$.

c) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}^- \text{ ó } x \in \mathbb{R}^+\}$.

d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

Representa gráficamente los conjuntos definidos en los apartados anteriores. Ilustra también las respuestas dadas.

Ejercicio 1.2.1.8
Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. Define dos subconjuntos U y W del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^2$ tales que U sea subespacio de V y W no lo sea.

Ejercicio 1.2.1.9
Un productor de té comercializa cinco mezclas (M1, ..., M5) de tres tipos diferentes de té (T1, T2, T3). La composición de 50 grs. de cada mezcla está dada por la siguiente tabla.

$$\begin{array}{c} \\ M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T1 & T2 & T3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 \\ 15 & 10 & 25 \\ 12 & 16 & 22 \\ 5 & 30 & 15 \\ 20 & 12 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuáles de las mezclas M3,M4 y M5 pueden ser obtenidas de las mezclas M1 y M2?

Ejercicio 1.2.1.10
Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Determina en cada caso los valores de x y de y, si es posible, para que:

1. $(3, 2, x, y) \in \langle\{(1, 4, -5, 2), (1, 2, 3, 1)\}\rangle$.
2. $(x, x + 1, y, y + 1) \in \langle\{(1, 3, 0, 2)\}\rangle$.
3. $(x, x - 1, y, y + 1) \in \langle\{(1, 3, 0, 2)\}\rangle$.

Ejercicio 1.2.1.11
¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$?

1. $\{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] \ : \ p'(X) = 3\}$
2. $\{X^2 + 1, X\}$
3. $\{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] \ : \ p(0) = 0\}$
4. $\{\alpha X \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 1.2.1.12
Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.

$$U = \langle\{(1, 4, -5,), (1, 2, 3)\}\rangle$$

$$W = \{\alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 2, 3) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

1. Da un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $T \neq \{\vec{0}\}$, $T \subset U$ y $T \subset W$.
2. Da un subespacio S de $\mathbb{R}^3$ tal que $U \subset S$ y $W \subset S$.
3. Siendo S el subespacio dado en el apartado anterior, ¿es cierto que $S = \mathbb{R}^3$?

1.3 Independencia lineal. Bases.

Definición 1.3.1
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $u_1, \ldots, u_m$ vectores de V. Se dice que los vectores $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente independientes (o que la familia $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es libre) si se verifica la siguiente condición:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$$

En otras palabras, los vectores $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente independientes si y sólo si la única forma de escribir el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de los vectores $u_1, \ldots, u_m$ es aquélla en la que todos los escalares involucrados son iguales a 0.

Ejemplo 1.3.1

- Los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial son linealmente independientes puesto que:

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,-1)=(0,0) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1-\alpha_2=0\end{array} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1=0, \alpha_2=0$$

  En cambio, y dentro del mismo espacio vectorial, los vectores $(1,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$ no son linealmente independientes puesto que:

$$(0,0)=0(1,1)+0(1,-1)+0(1,0)=\frac{1}{2}(1,-1)+\frac{1}{2}(1,1)+(-1)(1,0)$$

- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 3, los vectores $1, X, X^3$ son linealmente independientes. También son linealmente independientes los vectores $1-X$ y X^2, y son linealmente dependientes los vectores $1-X, X+X^2, 2, 3X^2$. Esta última afirmación queda justificada mediante la siguiente igualdad.

$$3X^2-3(X^2+X)-3(1-X)-\frac{3}{2}2=0$$

- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f \text{ es aplicación}\}$ las funciones $f(x)=cos(x), g(x)=sen(x), h(x)=x$ son linealmente independientes.

  Supongamos que $\alpha f+\beta g+\gamma h$ es la aplicación nula. Por tanto,

$$\alpha cos(x)+\beta sen(x)+\gamma x=0 \quad \text{para todo número real} \quad x.$$

  En particular, si $x=0$, se deduce que $\alpha=0$ y se tiene

$$\beta sen(x)+\gamma x=0 \quad \text{para todo número real} \quad x.$$

  Si se hace $x=\pi$, se obtiene $\gamma=0$, y en consecuencia

$$\beta sen(x)=0 \quad \text{para todo número real} \quad x.$$

  Para $x=\dfrac{\pi}{2}$, es obligado que β sea 0.

- En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$ la familia $\{1,\sqrt{2}\}$ es libre. Si en la combinación $\alpha\cdot 1+\beta\cdot\sqrt{2}=0$ con $\alpha,\beta\in Q$ se tuviese $\beta\neq 0$, $\sqrt{2}$ podría escribirse como cociente de dos números racionales, y por tanto sería racional. Al ser falsa esta conclusión, debe ser $\beta=0$, y entonces $\alpha=0$.

  Si $\mathbb{R}$ se considera como $\mathbb{R}$–espacio vectorial, es inmediato que la familia $\{1,\sqrt{2}\}$ es ligada puesto que se puede escribir $(-\sqrt{2})\cdot 1+1\cdot\sqrt{2}=0$.

  Una situación análoga se tiene para la familia $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

Si los vectores $u_1,\ldots,u_m$ no son linealmente independientes diremos que son **linealmente dependientes** o que $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es una **familia ligada**.

La siguiente proposición recoge un conjunto de propiedades de la independencia lineal que seran muy útiles en todo lo que sigue.

Proposición 1.3.1
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{S}=\{u_1,\ldots,u_m\}$ una familia de vectores en V.

1. *Si* $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$ *entonces* $\mathcal{S}$ *es una familia ligada.*
2. *Si en* $\mathcal{S}$ *hay dos vectores repetidos entonces* $\mathcal{S}$ *es una familia ligada.*
3. *Si* $\mathcal{S}$ *es una familia libre entonces, para todo* i, $\mathcal{S} - \{u_i\}$ *es una familia libre.*
4. *Si* $\mathcal{S}$ *es una familia ligada y* w *es un vector cualquiera de* V *entonces* $\mathcal{S} \cup \{w\}$ *es una familia ligada.*
5. $\mathcal{S}$ *es una familia ligada si y sólo si existe un vector* u_i *en* $\mathcal{S}$ *que es combinación lineal de los vectores de* $\mathcal{S} - \{u_i\}$.
6. *Si* $\mathcal{S}$ *es una familia libre y* $w \notin \langle S \rangle$ *entonces* $\mathcal{S} \cup \{w\}$ *es una familia libre.*
7. u_1 *y* u_2 *son linealmente dependientes si y sólo si existe* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tal que* $u_1 = \alpha u_2$

El siguiente teorema muestra como, en los espacios vectoriales de tipo finito, las familias libres tienen a lo sumo tantos elementos como el número de vectores en cualquier sistema de generadores del espacio vectorial considerado.

Teorema 1.3.1
Sea V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial y* $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *una familia de vectores en* V *tal que* $V = \langle S \rangle$. *Si* $\mathcal{T} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *es una familia libre de vectores en* V *entonces* $m \leq n$.

Aplicando este teorema es inmediato deducir que:

- En $\mathbb{K}^n$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo n elementos.
- En $M_{n,m}(\mathbb{K})$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo nm elementos.
- En $\mathbb{K}_n[x]$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo $n+1$ elementos.
- En $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo 3 elementos.
- En $\{A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) : A \text{ es simétrica}\}$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, las familias libres de vectores tienen a lo sumo $n(n+1)/2$ elementos.

La noción fundamental de esta sección es el concepto de base. De acuerdo con lo ya reseñado al final de la sección anterior, el principal defecto de los sistemas generadores se encuentra en la falta de unicidad a la hora de representar un vector como combinación lineal de los vectores de los mismos. Este problema se resuelve exigiendo la independencia lineal a los vectores en el sistema generador.

Definición 1.3.2
Sea V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial y* $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *una familia de vectores en* V. *Se dice que* $\mathcal{S}$ *es una base de* V *si* $\mathcal{S}$ *es una familia libre y* $\mathcal{S}$ *es un sistema de generadores de* V.

Proposición 1.3.2
Sea V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial y* $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *una familia de vectores en* V. *La familia* $\mathcal{S}$ *es una base de* V *si y sólo si todo vector de* V *se escribe, de forma única, como combinación lineal de los vectores de* $\mathcal{S}$.

Sobre el concepto dado a continuación se insistirá en lecciones posteriores, pero lo visto en el resultado anterior permite introducirlo aquí:

Definición 1.3.3
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V. Por la proposición precedente, se sabe que la forma de escribir un vector cualquiera $v \in V$ como

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

es única. Tal unicidad permite establecer esta nueva definición.
La n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ recibe el nombre de coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}$.

A la vista de todo lo anterior se debe indicar aquí que, si bien la definición de base se ha realizado para un conjunto de vectores, a partir de ahora el orden en el que se escriben los vectores en una base es importante puesto que ese orden marca quienes han de ser las coordenadas de un vector respecto de una base. Asi, si $\{u_1, u_2\}$ es una base de un espacio vectorial V y las coordenadas de un vector v son (α_1, α_2) entonces $\{u_2, u_1\}$ también es una base de V y las coordenadas de v respecto de esta base son (α_2, α_1).

Para cada uno los ejemplos de espacios vectoriales que hemos estado manejando hasta ahora, existe una "base canónica", una base que es especialmente sencilla de describir y respecto de la cuál es fácil expresar cualquier vector:

- En $\mathbb{K}^n$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{donde} \quad e_i = \overbrace{(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)}^{\text{1 en lugar i)}} \qquad \forall\, i$$

- En $M_{n,m}(\mathbb{K})$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

$$\mathcal{B} = \{A_{11}, \ldots, A_{nm}\} \quad \text{donde} \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- En $\mathbb{K}_n[x]$, como $\mathbb{K}$-espacio vectorial:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$$

A continuación se muestran, entre otras propiedades, que todo espacio vectorial de tipo finito tiene, al menos, una base, que dos bases distintas de un mismo espacio vectorial tienen siempre el mismo número de elementos (lo cual conduce al concepto de dimensión) y que toda familia libre de vectores puede extenderse a una base.

Teorema 1.3.2
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de tipo finito y $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ un sistema de generadores de V. Entonces existe un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{T}$ es una base de V.

Corolario 1.3.1
Todo espacio vectorial de tipo finito tiene una base.

Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\mathcal{S}_1 = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V. Aplicando el teorema 1.3.1 a $\mathcal{S}_1$ como sistema generador de V y a $\mathcal{S}_2$ como familia libre se obtiene que $n \leq m$. Recíprocamente, intercambiando los papeles de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, obtenemos $m \leq n$. Con esto queda demostrado el siguiente teorema, que motiva la definición de dimensión de un espacio vectorial de tipo finito.

Teorema 1.3.3
En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de tipo finito V todas las bases poseen el mismo número de elementos. Se define, por ello, la **dimensión** *de V, $\dim(V)$, como el número de elementos en una base cualquiera de V.*

Así, como $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, se tiene que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(M_{n,m}(\mathbb{K})) = nm$ y $\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$.

La siguiente proposición, de nuevo consecuencia del teorema 1.3.1, muestra cómo el conocimiento de la dimensión de un espacio vectorial simplifica la caracterización de sus bases.

Proposición 1.3.3
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de tipo finito y $\dim(V) = n$.

1. *Si $V = \langle\{u_1, \ldots, u_m\}\rangle$ entonces $n \leq m$.*
2. *Si $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente independientes entonces $m \leq n$.*
3. *Si $V = \langle\{u_1, \ldots, u_n\}\rangle$ entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V.*
4. *Si $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente independientes entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V.*

De acuerdo con los apartados 2 y 3 de la proposición anterior si un conjunto de m vectores de V linealmente independientes no es una base de V entonces $m < \dim(V)$. El Teorema de la Base Incompleta muestra cómo esta familia de vectores puede extenderse a una base de V.

Teorema 1.3.4 *(Teorema de la Base Incompleta)*
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathbb{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si $w_1, \ldots, w_m$ son vectores de V linealmente independientes entonces existen $n - m$ vectores, $v_{i_1} \ldots, v_{i_{n-m}}$, en $\mathbb{B}$ tal que la familia $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_1} \ldots, v_{i_{n-m}}\}$ es una base de V.

Es una consecuencia obvia que los subespacio de un espacios vectorial de tipo finito también son de tipo finito. Además, como consecuencia inmediata del Teorema de la Base Incompleta (teorema 1.3.4) se tiene que la dimensión de un subespacio siempre es menor o igual que la dimensión del espacio vectorial en el que se encuentra. Todo esto se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.4
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V. Entonces U es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de tipo finito y, además, $\dim(U) \leq \dim(V)$. Si $\dim(U) = \dim(V)$, entonces $U = V$.

1.3.1 Ejercicios

Ejercicio 1.3.1.1
Sean $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ dos vectores de $\mathbb{R}^4$.

1. Demostrar que v_1 y v_2 son linealmente independientes.

2. Sea S el subespacio generado por v_1 y v_2, ¿es cierto que $S = \{(a, b, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$?

3. Dar un vector w que no esté en S y probar que $\{v_1, v_2, , w\}$ es una parte libre de $\mathbb{R}^4$.

4. Sea T el subespacio generado por el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, w\}$ del apartado anterior. Hallar un vector u no perteneciente a T y probar que $\mathbb{R}^4 = \langle\{v_1, v_2, w, u\}\rangle$.

Ejercicio 1.3.1.2
Sea G el siguiente conjunto de vectores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$G = \{v_1 = (1, -1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 2, 1), v_3 = (1, 0, 1, 1), v_4 = (4, 1, 5, 4)\}$$

1. Comprobar que G es ligada, y eliminar de G el menor número de vectores posible para llegar a una familia libre L.

2. ¿Es cierto que $\langle G\rangle = \langle L\rangle$?

3. ¿Cuál es el número máximo de vectores linealmente independientes que hay en $\langle L\rangle$?

4. Añade a L cuantos vectores sean necesarios para llegar a una familia libre F tal que $\mathbb{R}^4 = \langle F\rangle$

Ejercicio 1.3.1.3
Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y $\mathbb{R}$ el de los reales. Se consideran los espacios vectoriales siguientes:

$$(\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{C}}) \qquad (\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$$

1. Comprobar que $(1 - i)(1 + i, 2i) + (-2)(1, i + 1) = (0, 0)$

2. En $(\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{C}})$, ¿los vectores $(1 + i, 2i)$ y $(1, i + 1)$ son linealmente independientes? ¿Por qué?

3. En $(\mathbb{C}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$, ¿los vectores $(1 + i, 2i)$ y $(1, i + 1)$ son linealmente independientes? ¿Por qué?

Ejercicio 1.3.1.4
En $\mathbb{R}^2$ se consideran los conjuntos de vectores:

$$\mathcal{B} = \{(0, 1), (2, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(2, 2), (2, -1)\}$$

1. Probar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

2. Escribir, si es posible, cada vector de $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$.

3. ¿Si v es combinación lineal de $\mathcal{B}$, v es combinación lineal de $\mathcal{B}'$?

4. ¿Es $\mathcal{B}'$ sistema generador de $\mathbb{R}^2$? ¿Es $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^2$?

5. Dar una representación gráfica de $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{B}'$ y de la forma de expresar el vector $v = (3, -4)$ en función de cada una de esas familias de vectores.

Ejercicio 1.3.1.5
En $\mathbb{R}^2$ se considera el siguiente conjunto de vectores:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\, -3 \leq x \leq 1, y = 1\}$$

1. ¿Es G es subespacio de $\mathbb{R}^2$?

2. Demostrar que los vectores $v_1 = (-3, 1)$ y $v_2 = (1, 1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

3. Expresar cada vector de G en función de $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Representar gráficamente este resultado.

4. ¿Sería correcto decir que $\mathcal{B}$ es una base de G?

Ejercicio 1.3.1.6
En $\mathbb{R}^3$ se consideran los conjuntos de vectores:

$$\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 2, 1), (3, 2, 1)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(2, 1, 0), (0, 2, 1), (2, 0, 1)\}$$

1. Probar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

2. Escribir, si es posible, cada vector de $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$.

3. ¿Si v es combinación lineal de $\mathcal{B}$, v es combinación lineal de $\mathcal{B}'$?

4. ¿Es $\mathcal{B}'$ sistema generador de $\mathbb{R}^3$? ¿Es $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio 1.3.1.7
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ de las matrices de tamaño 2×3 con coeficientes reales, y sea U el siguiente subespacio de V

$$U = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : a_{11} + a_{12} = 0, a_{21} + a_{22} - a_{23} = 0, a_{13} = 0\}.$$

1. Escribir tres elementos (concretos) M_1, M_2, M_3 de U que sean linealmente independientes.

2. ¿Todo vector de U se puede expresar de la forma
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

3. ¿Es posible añadir a las matrices M_1, M_2, M_3 dadas en el primer apartado un cuarto elemento $M_4 \in U$ tal que la familia $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ sea libre? Dar dos bases distintas de U.

4. ¿Es posible añadir a las matrices M_1, M_2, M_3 dadas en el primer apartado un cuarto elemento $M_4 \in V$ tal que la familia $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ sea libre (en V)?

5. Hallar vectores M_4, M_5, M_6 de V tales que $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ sea base de V.

Ejercicio 1.3.1.8
Sea $V = \mathbb{R}_3[X]$ es conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Dar dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ diferentes de V y expresar cada vector de $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}'$ y recíprocamente.

Ejercicio 1.3.1.9
¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1.v_2, v_3, v_4\}$ siendo $v_1 = (4, 3, 2, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)$, $v_3 = (2, 1, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

Ejercicio 1.3.1.10
Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $L = \{v_1, v_2, \cdots, v_{40}\}$ una parte libre de V. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

1. dim(V)≥ 40
2. Si L es sistema generador, entonces dim(V)$= 40$
3. dim(V)$= 40$
4. Existe $S \subset L$ tal que S es sistema generador de V

Ejercicio 1.3.1.11
Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$ un sistema generador de V. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

1. dim(V)≤ 6
2. Si S parte libre, entonces dim(V)$= 6$
3. dim(V)> 6

Ejercicio 1.3.1.12
Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$. ¿Cuáles de los siguientes subespacios de V tienen dimensión 2?

1. $T_1 = \langle\{(1, 1, 1, 0), (-1, 2, 3, -1)\}\rangle$
2. $T_2 = \langle\{(1, 1, 0, 1), (-1, 2, 3, 0), (0, -3, -3, -1)\}\rangle$
3. $T_3 = \{(x, y, z, t) \in V \ : \ 2x - y = 0, \ z + 2t = 0\}$
4. $T_4 = \{(x, y, z, t) \in V \ : \ 2x - y + z + 2t = 0\}$

1.4 Suma e intersección de subespacios. Suma directa

Si V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V es muy fácil demostrar, usando la proposición 1.2.1, que la intersección de U_1 y U_2, es decir $U_1 \cap U_2$, es un subespacio vectorial de V. Análogamente se obtiene el mismo resultado para la intersección de una familia cualquiera de subespacios de V.

Sin embargo para la unión de subespacios no es posible asegurar un resultado análogo, como muestra el siguiente ejemplo en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \langle\{u_1 = (1, 1)\}\rangle, \qquad U_2 = \langle\{u_2 = (1, -1)\}\rangle$$

$$u_1 = (1, 1) \in U_1 \cup U_2 \ , \quad u_2 = (1, -1) \in U_1 \cup U_2 \ , \quad u_1 + u_2 = (2, 0) \notin U_1 \cup U_2$$

Este comportamiento de la unión de subespacios es lo que motiva la definición del subespacio suma de U_1 y U_2 como

$$U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2\rangle$$

esto es, como el más pequeño de los subespacios de V que contienen a $U_1 \cup U_2$. Si U_1 y U_2 son de tipo finito se tiene, de acuerdo con la definición de subespacio suma, que:

$$U_1 = \langle\{w_1, \dots, w_s\}\rangle, \, U_2 = \langle\{v_1, \dots, v_t\}\rangle \implies U_1 + U_2 = \langle\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_t\}\rangle$$

A continuación se muestra la razón por la que a este nuevo subespacio se le denomina subespacio suma: todo vector en $U_1 + U_2$ es suma de un vector en U_1 y de otro vector en U_2.

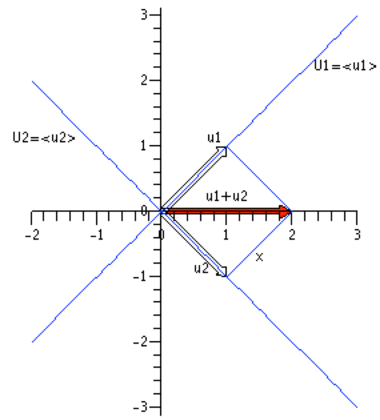

Figura 1.5: Combinación lineal de vectores de $U_1 \cup U_2$ que no está en $U_1 \cup U_2$

Proposición 1.4.1
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Entonces:

$$U_1 + U_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$$

Análogamente para s subespacios de V se tiene:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_s = \langle U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_s \rangle$$

y es muy sencillo demostrar:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_s = \{v_1 + v_2 + \ldots + v_s : v_1 \in U_1, v_2 \in U_2 \ldots, v_s \in U_s\}$$

De la definición de $U_1 + U_2$ se deduce claramente que siempre se verifica la siguiente desigualdad

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

ya que la unión de dos bases $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ de U_1 y U_2 nos proporciona, a lo sumo, un sistema de generadores de $U_1 + U_2$. No es difícil probar la siguiente equivalencia

$$\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \text{ base de } U_1 + U_2 \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$$

que también puede expresarse como

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$$

equivalencia que motiva la definición de suma directa de dos subespacios y la introducción de la fórmula de Grasmann que proporciona la relación existente entre las dimensiones de los subespacios U_1, U_2, $U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2$.

Definición 1.4.1
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Se dice que la suma de U_1 y U_2, $U_1 + U_2$, es directa si $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$. En tal caso escribiremos $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$

Teorema 1.4.1 *(Fórmula de Grasmann)*
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Entonces:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Ya hemos mostrado que la suma de dos subespacios es directa si y sólo si la unión de las bases de los subespacios es una base del subespacio. La siguiente proposición muestra como refinar el resultado de la proposición 1.4.1 que describía de forma precisa los elementos del subespacio $U_1 + U_2$.

Proposición 1.4.2
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y U_1 y U_2 subespacios vectoriales de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *La suma de U_1 y U_2 es directa.*
2. *La unión de dos bases cualesquiera de U_1 y U_2 es una base de $U_1 + U_2$.*
3. *Todo vector de $U_1 + U_2$ se escribe,* **de forma única**, *como suma de un vector en U_1 y de un vector en U_2.*

Se finaliza el capítulo generalizando todo lo anterior al caso de la suma de más de dos subespacios. Para ello se nota en primer lugar que si se quieren mantener las propiedades 2 y 3 de la proposición anterior no se puede definir la suma directa de s subespacios mediante condiciones sobre sus intersecciones. Si en $\mathbb{R}^3$, como $\mathbb{R}$–espacio vectorial, se consideran los subespacios

$$U_1 = \langle\{(1,0,0),(0,0,1)\}\rangle,\ U_2 = \langle\{(0,1,0)\}\rangle,\ U_3 = \langle\{(1,1,0)\}\rangle,$$

se tiene

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$$

pero ni la unión de sus bases no es una base de $U_1 + U_2 + U_3$, ni todo vector de $U_1 + U_2 + U_3$ se escribe de forma única como suma de un vector en U_1, de un vector en U_2 y de un vector en U_3:

$$(0,0,0) = (0,0,0) + (0,0,0) + (0,0,0) = (1,0,0) + (0,1,0) + (-1,-1,0)$$

Definición 1.4.2
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U_1, \ldots, U_s$ subespacios vectoriales de V. Se dice que la suma de $U_1, \ldots, U_s$ es directa, y escribiremos $U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$, si todo vector de $U_1 + \ldots + U_s$ se escribe, **de forma única**, *como suma de un vector en U_1, de un vector en U_2, ..., y de un vector en U_s.*

Proposición 1.4.3
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U_1, \ldots, U_s$ subespacios vectoriales de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *La suma de $U_1, \ldots, U_s$ es directa.*
2. *La unión de s bases cualesquiera de $U_1, \ldots, U_s$ es una base de $U_1 + \ldots + U_s$.*

Notar finalmente que si la suma $U_1 + \ldots + U_s$ es directa entonces la intersección de cualquier número de subespacios en $\{U_1, \ldots, U_s\}$ es igual a $\{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo 1.4.1

- Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices 2×3 con coeficientes reales, y U y W los subespacios siguientes.

$$U = \{M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M} : 2a_{11} + a_{22} = a_{23}\}$$

$$W = \{M \in \mathcal{M} : M \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

Es fácil deducir que una base de U es

$$\mathcal{B}_U = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\}$$

y una base de W es

$$\mathcal{B}_W = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Utilizando las bases obtenidas uno puede comprobar que

$$U \cap W =< \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} >$$

De la fórmula de las dimensiones, se deduce que $U + W = \mathcal{M}$.

- Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^6$, y los siguientes subespacios de V:

$$U = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{R}^6 : x + y + z = 0, r + s + t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, r, s, t) \in \mathbb{R}^6 : x - y = 0, x - z = 0, r - s = 0, r - t = 0\}$$

Puesto que un vector $v = (x, y, z, r, s, t) \in U \cap W$ si y sólo si

$$x + y + z = 0, r + s + t = 0, x - y = 0, x - z = 0, r - s = 0, r - t = 0$$

podemos deducir que el único vetor que está en $U \cap W$ es el vector nulo.
Una base de U es

$$\mathcal{B}_U = \{(1, -1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1, 0, -1)\}$$

Una base de W es

$$\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1)\}$$

La fórmula de Grasmann nos asegura que la dimensión de $U + W$ es 6, y que dicho subespacio es por tanto todo $\mathbb{R}^6$. Como $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^6 = U \oplus W$.

- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, t = 0\}$$

$$U = \{(2a, -a + b, -a + 3b, 0) : a, b \in R\}$$

Un vector v que esté tanto en U como en W, verificará $2a + (-a + b) + (-a + 3b) = 0$, y se tendrá que

$$v \in U \cap W \iff v = a(2, -1, -1, 0)$$

esto es, $U \cap W =< \{(2, -1, -1)\} >$. Para hallar una base de $U + W$ consideramos una de $U \cap W$ y la ampliamos sucesivamente a una de U y a una de W. Así una base de $U + W$ es $\mathcal{B} = \{((2, -1, -1), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 3)\}$.

1.4.1 Ejercicios

Ejercicio 1.4.1.1
Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ siguientes $v_1 = (2,4,6)$, $v_2 = (-1,2,1)$, $v_3 = (-8,-8,-16)$ y $v_4 = (6,4,10)$.

1. ¿Es la familia de vectores anterior libre? ¿Es base de $\mathbb{R}^3$?
2. ¿Se puede obtener una base de $\mathbb{R}^3$ eliminando alguno de los vectores v_i? ¿Es el vector $(1,0,0)$ combinación lineal de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4)?
3. Sea $S = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$. Determina un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

Ejercicio 1.4.1.2
Sean U y W los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z = 0, 3y + 2z + t = 0\}$$

$$W = \langle\{(-4,1,1,0), (-1,0,0,-5)\}\rangle$$

1. Demostrar que $\mathcal{B}_U = \{(-2,1,0,-3), (-3,0,1,-2)\}$ es una base de U.
2. Hallar una base de W.
3. Sea v un vector de $\mathbb{R}^4$ de la forma $(-4\alpha - \beta, \alpha, \alpha, -5\beta)$ tal que $\alpha - \beta = 0$. ¿Puede decirse que $v \in U \cap W$?
4. Deducir que $U \cap W = \langle\{(-5,1,1,-5)\}\rangle$.
5. Hallar una base de $U + W$, pero antes de obtenerla determinar $\dim(U + W)$.

Ejercicio 1.4.1.3
Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ y los siguientes subespacios

$$U = \langle\{(1,1,2), (3,4,0)\}\rangle,\ W = \{(x,y,z) \in V\ :\ x = 0,\ 6y + z = 0\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $U \cap W = \{\vec{0}\}$
2. $W \subset U$
3. $U + W = \mathbb{R}^3$
4. $U = W$

Ejercicio 1.4.1.4
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^5$

1. Dar una base de $\mathbb{R}^5$ distinta de la base canónica.
2. Dar dos subespacios U y W de $\mathbb{R}^5$ tales que $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 3$ y $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$.
3. Hallar una base de $U + W$.
4. Hallar un subespacio T de $\mathbb{R}^5$ tal que $(U + W) \oplus T = \mathbb{R}^5$.

Ejercicio 1.4.1.5
Sea U el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x + y + z = 0, t + u = 0\}.$$

¿Cuáles de los subespacios W_i siguientes satisfacen la condición

$$U \oplus W_i = \mathbb{R}^5?$$

1. $W_1 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x + y + z + t + u = 0\}$.
2. $W_2 = \langle\{(1, 0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 3, -4)\}\rangle$.
3. $W_3 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x + 2y = 0, z = u = 0\}$.

Ejercicio 1.4.1.6
Sea U el siguiente subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y = 0, 3z - t = 0\}.$$

¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas?

1. Si $W_1 = \langle\{(1, 1, 1, 1)\}\rangle$, entonces la suma de U y W_1 es directa: $U \oplus W_1$.
2. Si $W_2 = \langle\{(-2, 1, 1, 3)\}\rangle$, entonces W_2 está contenido en U: $W_2 \subset U$.
3. $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y = 0\}$, entonces $U \cap W_3 = U$.
4. $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z = 0, t = 0\}$, entonces $U \oplus W_4 = \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 1.4.1.7
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^5$ se consideran los siguientes subespacios

$$U = \langle\{(1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\}\rangle$$

$$W = \{(x, y, z, t, u) \in V : \ x + 2y - 3u = 0, \ 2y - t - u = 0, \ x + y - z - t = 0\}$$

1. Determinar bases de $U \cap W$ y $U + W$.
2. ¿Es $U + W = V$? En caso negativo, dar un subespacio T de V tal que $V = (U + W) \oplus T$
3. Sea $v = (x, y, z, t, u)$ un vector cualquiera de V. Determinar las coordenadas de v respecto de la siguiente base de V.

$$B_V = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1), (3, 0, 4, -1, 1), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

Ejercicio 1.4.1.8
Sea U y W los siguientes subespacios del espacio vectorial real $\mathbb{R}^{454}$:

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{454}) \in \mathbb{R}^{454} : x_1 + x_2 + \ldots + x_{454} = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{454}) \in \mathbb{R}^{454} : x_1 = x_2 = \ldots = x_{454}\}$$

$$T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{454}) \in \mathbb{R}^{454} : x_1 + x_2 = 0, \quad x_i = 0 \quad i = 3, 4, \ldots, 454\}$$

1. Halla bases de U, W y T.
2. Comprueba que $\dim U + \dim W = 454 = \dim \mathbb{R}^{454}$. ¿Es cierto que $\mathbb{R}^{454} = U \oplus W$?
3. Comprueba que $\dim U + \dim T = 454 = \dim \mathbb{R}^{454}$. ¿Puede decirse que $\mathbb{R}^{454} = U \oplus T$? ¿Quién es $U \cap T$?
4. Expresa todo vector de $\mathbb{R}^{454}$ como suma de un vector de U y de un vector de W.

Ejercicio 1.4.1.9
Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$, y sea U el siguiente subespacio de V:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x + y - 3z = 0\}$$

¿Cuáles de las afirmaciones dadas a a continuación son verdaderas?

1. $\langle\{(1, -2, 0, 0), (0, 3, 1.0)\}\rangle$ es base de U.
2. U tiene dimensión 3.
3. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y - z = 0, \, x - 2z = 0\}$ es un subespacio de U.
4. No existe un subespacio T de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

1.5 Problemas de Espacios Vectoriales

Problema 1.5.1
Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales. ¿Cúales de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$ son subespacios vectoriales?

a) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : 3x - 8y = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : 3x - 8y = 4\}$.

c) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x \in \mathbb{Z}^+ \text{ ó } x \in \mathbb{Q}^-\}$.

Problema 1.5.2
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial no nulo, donde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

a) Demuestra que V posee un nº infinito de vectores.

b) Sea $\{u, v\}$ una familia libre de vectores de V y $a, b \in \mathbb{K}$ con $b \neq 0$. Prueba que la familia $\{bu, au + v\}$ es también libre.

c) Sean u, v, w vectores de V linealmente independientes Prueba que también $u+v$, $u-v$, $u-2v+w$ son linealmente independientes.

d) Para $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, estudia si cada uno de los conjuntos de vectores siguientes es un sistema libre o un sistema dependiente:

$$S = \{(3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3)\}$$

$$T = \{(3, 2, 1), (1, -3, 2), (-1, -2, 3)\}$$

e) Para $V = \mathbb{C}^3$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, estudia si cada uno de los conjuntos de vectores siguientes es linealmente dependiente o independiente:

$$S = \{(1, 0, -i), (0, i, -1), (i, 1, 1 + i)\}$$

$$T = \{(1, i, -i), (0, 1, 1 + 2i), (1, 1 + i, -1)\}$$

Problema 1.5.3
Prueba que la familia $\{1 + X, X + X^2, 1 + X^2\}$ es un sistema generador libre de

$$\mathbb{Q}_2[X] = \{p(X) \in \mathbb{Q}[X] : \text{grado}(p(X)) \leq 2\}$$

Escribe $3 + 2X + 5X^2$ como combinación lineal de la familia anterior.

Problema 1.5.4
Decir, razonadamente, si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes.

1. Se considera el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$
$$S = \{(1,1,1),(1,a^2+1,a+1),(1,a^2+1,2a)\} \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \quad .$$
Entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica que la dimensión del subespacio generado por S es mayor que 1.
2. En el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ el conjunto de vectores $\{(1,i),(i,1)\}$ es base.
3. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ existen vectores v_1, v_2, v_3 linealmente dependientes tal que v_1, v_2 son linealmente independientes, v_1, v_3 son linealmente independientes, así como también lo son v_2, v_3.

Problema 1.5.5
Dí razonadamente si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:
En un espacio vectorial

a) Todo vector es combinación lineal, de forma única, de un sistema generador.

b) Todo vector es combinación lineal, de forma única, de una familia libre.

c) Si un vector es combinación lineal de una familia libre, los coeficientes son únicos.

Problema 1.5.6
Demuestra que en el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ ninguno de los vectores $v_1 = (-1,-1,1)$, $v_2(0,0,1)$ depende linealmente de $S = \{w = (1,1,0)\}$. ¿Es w combinación lineal de los vectores v_1 y v_2?
Dí si es verdadera o falsa la afirmación siguiente:

> *Aunque ninguno de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ dependa linealmente de un sistema $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_q\}$, puede ocurrir que alguna combinación lineal de aquellos dependa linealmente de S.*

Problema 1.5.7
Sean u y v dos vectores distintos de un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial V. Analiza si algunos de los vectores $(2+\alpha)u+(3-\alpha)v$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ pueden ser iguales. ¿ Es $S = \{(2+\alpha)u+(3-\alpha)v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ un subespacio vectorial de V?

Problema 1.5.8
En el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $\mathbb{R}_4[X]$ se consideran los conjuntos de vectores siguientes: $S = \{2-X, 1+X^2, X+X^3\}$ y $T = \{1, X^2\}$.

- Prueba que S y T son libres y que todo vector de T es linealmente independiente de S.

- Establece una combinación lineal nula de los vectores $\{2 - X, 1 + X^2, X + X^3, 1, X^2\}$ en la que no todos los escalares de la misma sean cero.
- Dí si es verdadera o falsa la afirmación siguiente:

  Si en un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial V, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ y $T = \{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ son sistemas libres y todo vector de T es linealmente independiente de S entonces el conjunto $S \cup T$ es un sistema libre.

Problema 1.5.9
Considera los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$

$$S = \{(5, -2, 3, 4), (1, 0, -1, 0), (7, -3, 5, 6)\}$$

$$T_1 = \{(1, 0, 0, 0), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$$

$$T_2 = \{(6, \frac{-5}{2}, 4, 5), (11, -3, 1, 6), (\frac{13}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{7}{2}, 5), (-3, 1, -1, -2)\}$$

1. Determina una base $\mathcal{B}$ del subespacio generado por S.
2. Extiende el conjunto $\mathcal{B}$ hallado anteriormente a una base de $\mathbb{R}^4$ añadiendo, si es posible, vectores de T_1.
3. Realiza el mismo ejercicio que en el apartado anterior pero teniendo en cuenta T_2.

Problema 1.5.10
Sea V el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. En V se consideran los siguientes subconjuntos:

$$W = \{p(X) \in V : p'(0) = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{p(X) \in V : p''(1) = 0\}$$

donde $p'(X)$ y $p''(X)$ representan, respectivamente, la derivada primera y la derivada segunda del polinomio $p(X)$.

a) Demuestra que W y T son subespacios vectoriales de V.

b) Determina bases de W y T, así como del subespacio $W \cap T$.

c) Determina, si existe, una base de un subespacio U tal que $U \oplus (W \cap T) = V$.

Problema 1.5.11
Se considera el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $V = \mathbb{R}^5$.

a) Da un subespacio vectorial U de V de dimensión 2.

b) Da dos subespacios distintos W y W' de V tales que $V = W \oplus U$ y $V = W' \oplus U$.

c) Para los subespacios que hayas dado en b), determina $W \cap W'$.

d) ¿En algún caso hubieras podido encontrar subespacios W y W' con las condiciones de b) y $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$?

Problema 1.5.12
En $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, y los subespacios $W = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, $W' = \langle\{e_3\}\rangle$ y $W'' = \langle\{e_2 + e_3\}\rangle$.

a) Prueba que $\mathbb{R}^3 = W + W' + W''$ y $W \cap W' = W \cap W'' = W' \cap W'' = \{\mathbf{0}\}$.

b) ¿Es $\mathbb{R}^3 = W \oplus W' \oplus W''$?

Problema 1.5.13
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran dos subespacios U y W tales que $\dim U = r \geq 1$ y $\dim W = s \geq 1$. Determinar todos los posibles valores de r y de s para que la suma $U + W$ pueda ser directa.

Problema 1.5.14
Considera los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes.

$$S = \langle\{(1, 1, 2), (1, -1, 3)\}\rangle \;\text{ y }\; T = \{(a, 3a - 2b, a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Determina bases de S, T, $S \cap T$ y $S + T$. ¿Es $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$?

Problema 1.5.15
18 Sea V un espacio vectorial n-dimensional y W y W' dos subespacios de V.

- Supuesto que $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$
  1. Demuestra que existe un subespacio U tal que $V = U + W$. Dicho subespacio U, ¿es único?
  2. ¿Existe un subespacio U tal que $V = W \oplus U$ y $W' \subset U$?
  3. ¿Existe un subespacio W'' tal que $V = W \oplus W' \oplus W''$?
- Si $V = W + W'$. Prueba que $V = W \oplus W'$ si y sólo si $\dim V = \dim W + \dim W'$.

Problema 1.5.16
Sea $M_n(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de matrices $n \times n$ con coeficientes reales.

a) Demuestra que el conjunto W formado por todas las matrices (a_{ij}) tales que $a_{ij} = 0$ para $i > j$ es un subespacio de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Admitiendo que $W' = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : aij = 0 \quad si \quad i < j\}$ es un subespacio, describe el subespacio $W \cap W'$, y determina bases y dimensión de W, W' y $W \cap W''$.

Problema 1.5.17
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_n[X]$ (conjunto de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual a n) se considera el subconjunto

$$B = \{p_0(X), p_1(X), p_2(X), \ldots, p_n(X)\}$$

donde el grado de $p_i(X)$ es i para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Demuestra que B es una base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problema 1.5.18
En $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0, z + 3t = 0\}$$

$$W = \{(2a, a + 4b, 0, c + b) \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Determina bases y dimensión de los mismos. ¿Es $\mathbb{R}^4 = U + W$?

Problema 1.5.19
Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Dí si es verdadera o falsa cada de las afirmaciones siguientes.

a) Si $V = U \oplus W \oplus T$, $v \notin U \oplus W$, entonces $v \in T$.

b) Si $\dim V = 2n$, entonces es posible encontrar subespacios U y W de V, ambos de dimensión n y tales que $V = U \oplus W$.

c) Si $\dim V = 6$, y U y W son ambos de dimensión 3, entonces $V = U \oplus W$.

d) Si U y W son subespacios de V tales que $\dim U + \dim W > \dim V$, entonces $U \cap W \neq 0$.

Problema 1.5.20
Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente, dados por las condiciones:

$$(A) \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \qquad (B) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ 5x + 6y - z + t = 0 \end{cases}$$

Determina las bases de dichos subespacios.

Problema 1.5.21
Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ siguientes $v_1 = (2, 4, 6)$, $v_2 = (-1, 2, 1)$, $v_3 = (-8, -8, -16)$ y $v_4 = (6, 4, 10)$.

a) ¿Es la familia de vectores anterior libre? ¿Es base de $\mathbb{R}^3$?

b) ¿Se puede obtener una base de $\mathbb{R}^3$ eliminando alguno de los vectores v_i? ¿Es el vector $(1,0,0)$ combinación lineal de la familia (v_1, v_2, v_3, v_4)?

c) Sea $S = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$. Determina un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

Problema 1.5.22
Una matriz 3×3 con coeficientes reales

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

se dice que es un cuadrado mágico si la suma de todos los términos de cada una de las filas y de cada una de las columnas es un mismo número s.

1. Reescribe las condiciones para un cuadrado mágico como un sistema de ocho ecuaciones en función de s, a_i, b_i, c_i con $1 \leq i \leq 3$, y aplica el algoritmo de Gauss a dicho sistema.

2. Prueba que $3b_2 = s$.

3. Reemplaza las estrellas por números para convertir la siguiente matriz en un cuadrado mágico.

$$\begin{pmatrix} \star & 1 & \star \\ \star & \star & \star \\ 2 & \star & 4 \end{pmatrix}$$

4. Demuestra que los cuadrados mágicos forman un subespacio del $\mathbb{R}$–espacio vectorial de las matrices reales 3×3. Prueba que una base de dicho subespacio está dada por las matrices siguientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Probar que toda matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

puede convertirse en un cuadrado mágico. ¿Hay una única forma de hacer ésto?

Lección 2

Aplicaciones Lineales y Matrices

En la lección anterior se han introducido los términos y propiedades relativas al concepto de espacio vectorial. En ésta se estudian las aplicaciones ligadas a ellos: las aplicaciones lineales, también llamadas homomorfismos de espacios vectoriales. El significado del término homomorfismo proporciona una primera idea de lo que se pretende con este estudio: ¿qué se puede decir de aquellas aplicaciones en las que la suma de dos vectores se transforma en la suma de sus transformados, y el doble, la mitad, ... de un vector se transforma en el doble, la mitad, ... de su transformado?; ¿qué fenomenos, en principio al menos, se manifiestan de forma lineal?, ¿reconoce alguno de ellos el lector?

2.1 Definición de Aplicación Lineal. Ejemplos

Definición 2.1.1
Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, y $f : V \to W$ una aplicación. Se dice que f es un homomorfismo de espacios vectoriales o una aplicación lineal si se verifica la siguiente condición cualesquiera que sean los elementos a_1, a_2 de $\mathbb{K}$ y v_1, v_2 de V:

$$f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2).$$

Es fácil probar que la condición de la definición anterior equivale a que se verifiquen simultáneamente:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad y \qquad f(av) = af(v)$$

cualesquiera que sean v_1, v_2, y v en V y a en $\mathbb{K}$.

Cuando $V = W$, la aplicación lineal recibe el nombre de endomorfismo de V.

Ejemplo 2.1.1
A continuación se muestran una serie de aplicaciones entre espacios vectoriales, de las cuáles unas son lineales y otras no.

- La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x, 3x - z)$ es una aplicación lineal. Las líneas siguiente muestran la prueba de esta afirmación.
  Sean $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y a_1, a_2 números reales cualesquiera.

$$\begin{aligned} f(a_1v_1 + a_2v_2) &= f(a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2, a_1z_1 + a_2z_2) = \\ &= (2(a_1x_1 + a_2x_2), 3(a_1x_1 + a_2x_2) - (a_1z_1 + a_2z_2)) = \\ &= (2a_1x_1 + 2a_2x_2, 3a_1x_1 - a_1z_1 + 3a_2x_2 - a_2z_2) = \\ &= (2a_1x_1, a_1(3x_1 - z_1)) + (2a_2x_2, a_2(3x_2 - z_2)) = \\ &= a_1(2x_1, 3x_1 - z_1) + a_2(2x_2, 3x_2 - z_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) \end{aligned}$$

- La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por
$$f(x, y, z) = (2x, 3x - z, 2y + z, x + y + z)$$
es una aplicación lineal.

- La aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$ donde
$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$
para $i = 1, \ldots, m$ es una aplicación lineal.

- La aplicación $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ que a cada polinomio le asocia su derivada es una aplicación lineal.

- La aplicación $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_6[X]$ que a cada polinomio le asocia su cuadrado no es una aplicación lineal. Para justificar esta afirmación basta comprobar que $f(X+1) \neq f(X)+f(1)$: $X^2+2X+1 \neq x^2 + 1$

- Si U y W son subespacios de V tales que $V = U \oplus W$ entonces la aplicación de V en U que a cada vector $v = u+w$ con $u \in U$ y $w \in W$, le asocia el vector u es una aplicación lineal, llamada proyección de V sobre U (en la dirección de W). A lo largo de este texto, dicha aplicación se denotará habitualmente por $p_{U,W}$.
Un ejemplo de esta situación se muestra a continuación. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $U = \langle\{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -1, 0)\}\rangle$ y $W = \langle\{w = (0, 1, 4)\}\rangle$. En este caso, cada vector $v = (x, y, z) \in V$ se escribe como combinación lineal de u_1, u_2 y w en la forma
$$v = (x, y, z) = \underbrace{\frac{2x + 4y - z}{5} u_1 + \frac{3x - 4y + z}{10} u_2}_{\text{en } U} + \frac{(-x - 2y + 3z)}{10} w$$
de donde se deduce que $p_{U,W} : \mathbb{R}^3 \to U$ está definida por
$$p_{U,W}(v) = p_{U,W}(x, y, z) = \frac{2x + 4y - z}{5} u_1 + \frac{3x - 4y + z}{10} u_2 =$$
$$= \Big(\frac{2x + 4y - z}{5} + 2\frac{3x - 4y + z}{10}, \frac{2x + 4y - z}{5} - \frac{3x - 4y + z}{10}, \frac{2x + 4y - z}{5}\Big)$$
¿Quién será $p_{W,U}(v)$?
La figura siguiente muestra el significado de la proyección desde un punto de vista gráfico. Se muestra el efecto de $p_{U,W}$ sobre el vector $v = \Big(2, \frac{1}{2}, \frac{8}{3}\Big)$.

- Si M es el espacio vectorial de las matrices cuadradas 3×3 con coeficientes reales, la aplicación de M en $\mathbb{R}$ que a cada matriz le asocia el producto de los elementos de su diagonal principal no es lineal.

- Si M es el espacio vectorial de las matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes reales, la aplicación de M en $\mathbb{R}$ que a cada matriz le asocia la suma de los elementos de su diagonal principal (su traza) es lineal.

Proposición 2.1.1
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se tiene entonces:

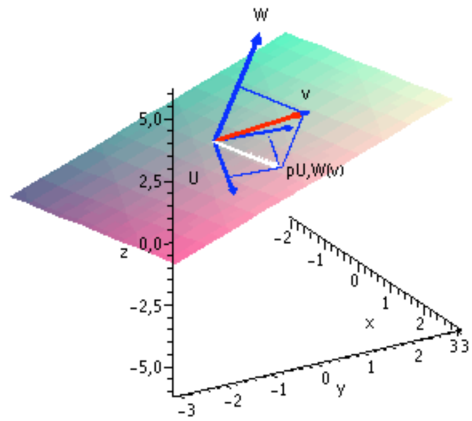

Figura 2.1: Proyección del vector v sobre U en la dirección de W

1. *$f(0) = 0$ y $f(-v) = -f(v)$ cualquiera que sea $v \in V$.*

2. $f\Big(\sum_{k=1}^{r} a_k v_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} a_k f(v_k)$.

3. *Toda familia de vectores de V linealmente dependiente se transforma en una familia de vectores de W linealmente dependiente.*

4. *Si $g : W \to U$ es una aplicación lineal entonces la aplicación $g \circ f : V \to U$ también es una aplicación lineal.*

Demostración.

1. Puesto que $0 + 0 = 0$ y f es homomorfismo, se tiene la expresión $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, de la que se deduce la primera igualdad.
   Por otro lado
   $$f(v + (-v)) = \left\{ \begin{array}{c} f(v) + f(-v) \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f(-v) = -f(v)$$

4. $(g \circ f)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = g(f(a_1 v_1 + a_2 v_2)) = g(a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)) =$
   $= a_1 g(f(v_1)) + a_2 g(f(v_2)) = a_1 (g \circ f)(v_1) + a_2 (g \circ f)(v_2)$

La prueba del resto de las propiedades se deja como ejercicio para el lector. ∎

2.1.1 Ejercicios

Ejercicio 2.1.1.1
Define tres aplicaciones f, g, h de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tales que f y g sean lineales y h no lo sea.

Ejercicio 2.1.1.2
Se considera la base de $\mathbb{R}^3$ siguiente

$$B = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (-2, 0, 3)\}$$

y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación que a cada vector v de $\mathbb{R}^3$ le asigna el vector $w = f(v) = (a, b)$ donde a y b son la primera y la segunda coordenada de v respecto de la base B

1. Determinar la imagen por f del vector $v = (1, 3, -5) \in \mathbb{R}^3$
2. Demostrar que f es lineal
3. Determinar el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es el vector $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.
4. Completar la siguiente expresión

$$f(x, y, z) = (......, ...)$$

Ejercicio 2.1.1.3
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación. Señalar qué condiciones de las siguientes (consideradas una a una, por separado) bastarían para afirmar que f `no` es lineal.

1. $f(0, 0, 0) = (1, 0)$
2. $f(1, 2, 1) = (1, 2), f(1, 0, 1) = (0, 0), f(2, 2, 2) = (2, 2)$
3. $f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$
4. $f(4, 2, 0) = (1, 1) = f(2, 1, 0)$.

2.2 Núcleo e imagen. Fórmula de las dimensiones

Del concepto de aplicación lineal surgen dos subespacios de especial relevancia, cuyo estudio es el objeto de esta sección.

Proposición 2.2.1
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Los conjuntos

1. *Núcleo de f:*
$$\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$$
2. *Imagen de f:*
$$\mathrm{im}(f) = \{f(v) : v \in V\}$$

son subespacios vectoriales de V y de W respectivamente.

La demostración de cada uno de los apartados de la proposición anterior no entraña ninguna dificultad por lo que se deja como ejercicio para el lector.

Los siguientes ejemplos ilustran los conceptos anteriores. Sólo en el primero de ellos se justifica la afirmación realizada, se pide al lector que trate de justificar el resto.

Ejemplo 2.2.1

- Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (2x, 3x - z)$ entonces $\ker(f) = \langle\{(0, 1, 0)\}\rangle$ y $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$. Justifiquemos esa afirmación:

$$\begin{gathered}\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(x, y, z) = (0, 0)\} = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (2x, 3x - z) = (0, 0)\} = \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x = 0 \,\wedge\, 3x - z = 0\} \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,: x = 0 \,\wedge z = 0\} = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(0, 1, 0)\}\rangle\end{gathered}$$

  Para todo elemento $w = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ es posible hallar un elemento $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(v) = w$, de lo que se deduce que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$: basta hacer $x = \dfrac{1}{2}\alpha, y = 0, z = \dfrac{3}{2}\alpha - \beta$.

- Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación definida por $f(x, y, z) = (2x, 3x - z, 2y + z, x + y + z)$ entonces $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ y $\mathrm{im}(f) = \langle\{(2, 3, 0, 1), (0, 0, 2, 1), (0, -1, 1, 1)\}\rangle$.

- Si $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ es la aplicación lineal que a cada polinomio le asocia su derivada entonces $\ker(f) = \langle\{1\}\rangle$ y $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

- Si U y W son subespacios de V tales que $V = U \oplus W$, y f es la aplicación lineal de V en U que a cada vector $v = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$, le asocia el vector u entonces $\ker(f) = W$ y $\mathrm{im}(f) = U$.

- Si M es el espacio vectorial de las matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes reales, y f la aplicación de M en $\mathbb{R}$ que a cada matriz le asocia su traza entonces $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. Si A_{ij} denota la matriz de M que tiene un 1 en el lugar ij, y 0 en todos los demós lugares entonces $\ker(f) = \langle\{A_{ij} : i, j = 1, \ldots, n; i \neq j\} \cup \{A_{11} - A_{ii} : i = 2, \ldots, n\}\rangle$. ¿Qué dimensión tiene $\ker(f)$?

Definición 2.2.1
Sea $f\colon V \to W$ una aplicación lineal. La dimensión de $\mathrm{im}(f)$ *se denomina* **rango de la aplicación lineal** f.

¿Cuál es el rango de cada una de las aplicaciones lineales en los ejemplos anteriores?

La siguiente proposición afirma que para calcular la imagen y el rango de una aplicación lineal $f : V \to W$ es suficiente determinar las imágenes de los vectores de un sistema generador de V.

Proposición 2.2.2
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un sistema generador de V entonces el conjunto $S = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{im}(f)$.

La demostración de lo anterior se apoya en el hecho de que cualquier vector $f(v)$ de $\mathrm{im}(f)$ se puede expresar, por ser f lineal, como combinación lineal de los vectores de S

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_r f(v_r).$$

Utilizando los ejemplos anteriores se puede comprobar que se verifica que la suma de las dimensiones de los espacio núcleo e imagen coincide con la dimensión del espacio inicial. Este hecho no es una mera coincidencia, corresponde a un resultado que se conoce como *Fórmula de las dimensiones* y que se recoge en el siguiente enunciado.

Teorema 2.2.1
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = \dim V$$

El resultado anterior puede probarse viendo que

- Si $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es base de $\operatorname{im}(f)$ cuando $\{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n\}$ es una base de V.
  Teniendo en cuenta la proposición 2.2.2 sólo falta probar que los vectores señalados son linealmente independientes.

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \ldots + \alpha_r f(v_r) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r) = \mathbf{0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r \in \ker(f) = \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r = \mathbf{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$$

- Si $\ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$, y $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V donde $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es una base de $\ker(f)$, entonces $\{f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es una base de $\operatorname{im}(f)$.
  Por razones análogas a las anteriores no es necesario probar que el conjunto referido es sistema generador de $\operatorname{im}(f)$, y para probar la independencia se tiene en cuenta que $\ker(f) \cap \langle\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}\rangle = \{\mathbf{0}\}$.

2.2.1 Ejercicios

Ejercicio 2.2.1.1
Determina el núcleo y la imagen de la aplicación del ejercicio 2.1.1.2

Ejercicio 2.2.1.2
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$ son vectores que están en $\ker(f)$. Justificar cada una de las afirmaciones siguientes.

1. El vector $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1)$ pertenece a $\ker(f)$ cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Si $f(1, 1, -1) = (0, 0)$, entonces $f(v) = (0, 0) \;\; \forall v \in \mathbb{R}^3$.
3. Si $w = (1, 1, 3) + \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1)$, entonces $f(w) = f(1, 1, 3)$, cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Si $\dim(\ker(f)) = 2$ y v_1, v_2 son vectores tales que $f(v_1) = f(v_2)$, entonces $v_1 - v_2 = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1)$ para algún α y algún β en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.2.1.3
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $\operatorname{im}(f) = \langle\{(1, 1)\}\rangle$ y $\ker(f) = \langle\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}\rangle$. Probar cada una de las condiciones siguientes.

1. Si v es un vector de $\mathbb{R}^3$ que no pertenece a $\ker(f)$, entonces $f(v) = (\alpha, \alpha)$ para algún número real $\alpha \neq 0$.
2. Si v_1, v_2 son vectores de $\mathbb{R}^3$ que no pertenecen a $\ker(f)$, entonces existen números reales a, b tales que $av_1 + bv_2 \in \ker(f)$.

Ejercicio 2.2.1.4
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, x - z).$$

Sean $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B'}_c = \{e'_1, e'_2\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

1. Sea $v \in \mathbb{R}^3$. ¿Es $f(v)$ combinación lineal de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$? ¿El conjunto $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ es un sistema generador de $\mathrm{im}(f)$?
2. Comprobar que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ es una base de $\mathrm{im}(f)$ y determinar una base de $\ker(f)$,
3. ¿Existe algún vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(v) = (1, 5)$?
4. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $g(x, y) = (x + y, x + y)$. Demostrar que $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $(g \circ f)(x, y, z) = (2x + y - z, 2x + y - z)$ y deducir que $\dim(\ker(g \circ f)) = 2$. ¿Es cierto que $\mathrm{im}(g \circ f) \subset \mathrm{im}(f)$?
5. Hallar una base de $\ker(g \circ f)$ y comprobar que $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$
6. ¿Existe algún vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $(g \circ f)(v) = (1, 5)$?

Ejercicio 2.2.1.5
Realiza cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Demuestra que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ siendo

$$U =< \{(1, 2, 1)\} > \quad \text{y} \quad W =< \{(1, 0, -1), (1, -1, 0)\} >$$

2. Expresa el vector $v = (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $(1, 2, 1)$, $(1, 0, -1)$, y $(1, -1, 0)$. Determina vectores $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.
3. Expresa el vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $(1, 2, 1)$, $(1, 0, -1)$, y $(1, -1, 0)$. Determina vectores $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.
4. Expresa en función de x, y, z la imagen de un vector $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ por la aplicación $p_{U,W} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde $p_{U,W}$ es la proyección sobre U en dirección W.
5. Demuestra que la aplicación

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad f(x, y, z, t) = (2x + 2y, x + y, z)$$

es lineal.
6. Determina $im(f)$ y $ker(f)$ donde f es la aplicación del apartado anterior.
7. Completa: La aplicación

$$p_{U,W} \circ f : \quad .... \quad \longrightarrow \quad ....$$

está definida por $(p_{U,W} \circ f)(..............) = (..............)$

Ejercicio 2.2.1.6
Sean f_1, f_2, f_3 y f_4 los endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ definidos por

- $f_1(x, y, z, t) = (z + t, 0, y, -y)$

- $f_2(x, y, z, t) = (x - y + t, x - y + t, x - y + t, 0)$
- $f_3(x, y, z, t) = (x + y + 2t, 2x + z + 3t, x + y + 2t, 2x - z + t)$
- $f_4(x, y, z, t) = (z + t, z + t, x + y, x + y)$

1. Determina los subespacios núcleo e imagen para cada una de las aplicaciones anteriores.
2. Usa algunos de los símbolos $\in$, $\subset$, $\supset$, $\cap$, $\cup$, $\neq$ y $=$ para completar las expresiones siguientes, con el objetivo de establecer la relación que existe entre el subespacio núcleo y el subespacio imagen de cada uno de los endomorfismos anteriores.

$$ker(f_1) \cdots im(f_1) \cdots \{\vec{0}\} \qquad ker(f_2) \cdots im(f_2)$$

$$ker(f_3) \cdots im(f_3) \qquad ker(f_4) \cdots im(f_4) \cdots \{\vec{0}\}$$

3. Define un endomorfismo f_5 de $\mathbb{R}^4$ tal que dim($ker(f_5)$)=1, dim($im(f_5)$)=3 y $ker(f_5) \cap im(f) = \{\vec{0}\}$.

Ejercicio 2.2.1.7
Decir, razonadamente, si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes.

1. Si f es endomorfismo de V tal que $\ker(f) = \mathrm{im}(f)$, entonces $\dim(V)$ es número par.
2. Ninguna aplicación lineal de $\mathbb{R}_2[X]$ en $\mathbb{R}^4$ tiene rango 4.
3. Si existe una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}_n[X]$ tal que $ker(f) = \{\vec{0}\}$, entonces $n \geq 3$.

Ejercicio 2.2.1.8
Sea f un endomorfismo del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ del que se sabe

- Im $(f) \subset$ Ker(f)
- $f(1, -1, 2) = (1, 1, 0)$
- $f(-1, 3, 0) = f(2, 0, 2)$

1. Determinar bases de Im (f) y Ker(f) respectivamente.
2. Demostrar que $B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-3, 3, -2), v_3 = (1, -1, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. ¿Hay alguna peculiaridad en los vectores que forman la base anterior?
3. Determinar las coordenadas de un vector $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ respecto de la base B. Completar $f(x, y, z) = (..., ..., ...)$.

2.3 Tipos de Aplicaciones Lineales. Isomorfismos.

Entre las aplicaciones lineales que se pueden establecer de un espacio vectorial en otro, desempeñan un papel destacado áquellas que son inyectivas, por ser las que "transportan la forma" del espacio inicial al espacio imagen. Si además el espacio imagen coincide con el espacio final, el espacio inicial y el final son "idénticos desde el punto de vista estructural, como espacios vectoriales.

Definición 2.3.1
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

1. *Se dice que f es inyectiva si* $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
2. *Se dice que f es sobreyectiva si* $\mathrm{im}(f) = W$.
3. *Se dice que f es un isomorfismo si es biyectiva, es decir, si es simultaneamente inyectiva y sobreyectiva.*

De acuerdo con la Fórmula de las Dimensiones y las pautas dadas para su demostración, se pueden establecer las siguientes equivalencias.

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva } &\Longleftrightarrow \dim V = \dim \mathrm{im}(f) = \mathrm{rango}(f) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow f \text{ transforma una base de } V \text{ en una base de } \mathrm{im}(f) \end{aligned}$$

La serie anterior de equivalencias permite abordar el estudio de la inyectividad o no inyectividad de una aplicación lineal por distintas vías como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.1

- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, y, y - z, x + z)$. Dicha aplicación es inyectiva puesto que las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son

  $$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1),\ f(0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0),\ f(0, 0, 1) = (0, 0, -1, 1)$$

  vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^4$.

- También se puede mostrar que la aplicación anterior es inyectiva resolviendo el sistema lineal homogóneo

  $$\begin{array}{ll} x + y = 0, & y = 0 \\ y - z = 0, & x + z = 0 \end{array}$$

  que es el que determina $\ker(f)$.

- Sea $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ la aplicación lineal definida por $f(p(X)) = p(0) + p(1)X + p(2)X^2$.

  $$\ker(f) = \{p(X) \in \mathbb{R}_2[X] : p(0) = 0, p(1) = 0, p(2) = 0\}$$

  Así pues, $\ker(f)$ está formado por aquellos polinomios de grado menor o igual a 2 que tienen por raíces a los números 0, 1 y 2. El único polinomio de $\mathbb{R}_2[X]$ con tres raíces es el polinomio nulo. Por tanto $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ y f es inyectiva. La fórmula de las dimensiones nos permite deducir que f es sobreyectiva, y por tanto un isomorfismo.

- Sea $\mathcal{M}$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de las matrices reales $n \times n$ con todos los elementos de la diagonal principal nulos. Se considera la aplicación lineal $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^2$ con $f(M) = (a, b)$ donde a es la suma de los elementos de M que están por debajo de la diagonal principal y b la suma de los elementos de M que están por encima de la diagonal principal. Esta aplicación lineal es sobreyectiva, y es inyectiva si y sólo si $n = 2$.

En uno de los ejemplos anteriores se establece una aplicación inyectiva entre espacios vectoriales de igual dimensión, y esto ha permitido concluir que dicha aplicación es también sobreyectiva. Este hecho es general y se recoge en una de las afirmaciones de la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1
Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales.

1. *La composición de dos aplicaciones inyectivas es inyectiva. La composición de dos aplicaciones sobreyectivas es sobreyectiva. La composición de dos isomorfismos es isomorfismo.*

2. *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal inyectiva o sobreyectiva y $\dim V = \dim W$, f es un isomorfismo.*

3. *Si $f : V \to W$ es un isomorfismo entonces $\dim V = \dim W$.*

4. *Si $f : V \to W$ es isomorfismo entonces $f^{-1} : W \to V$ es un isomorfismo.*

5. *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Cada vector $v \in V$ se expresa de forma única en función de $\mathcal{B}$: $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, y el elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$ recibe el nombre de coordenadas de v respecto $\mathcal{B}$. Si $f : V \to \mathbb{K}^n$ es la aplicación que a cada vector de V le asigna sus coordenadas respecto $\mathcal{B}$ entonces f es un isomorfismo, llamado isomorfismo coordenado respecto de $\mathcal{B}$.*

6. *Si V y W tienen la misma dimensión entonces se puede establecer entre ellos un isomorfismo, esto es, son isomorfos.*

Ejemplo 2.3.2
En los tres ejemplos que siguen se muestran algunos de los aspectos señalados en la proposición anterior.

- En el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}_2[X]$ el polinonio $3 + 2X$ tiene coordenadas $(3, 2, 0)$ respecto de la base canónica $\mathcal{B}_\mathcal{C} = \{1, X, X^2\}$, tiene coordenadas $(2, 0, 3)$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{X, X^2, 1\}$, y $(6, -4, 4)$ son las coordenadas del polinomio respecto de la base $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{2} + X, X + X^2, X^2\}$

- Ninguna aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}_n[X]$ es biyectiva puesto que las dimensiones de tales espacios son n y $n + 1$ respectivamente.

- Sea $\mathcal{M}$ el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Los $\mathbb{R}$–espacios vectoriales $\mathbb{R}_2[X]$ y $\mathcal{M}$ son isomorfos pues ambos son de dimensión 3. La aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathcal{M} \\ & a + bX + cX^2 & \mapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \end{array}$$

  es un isomorfismo. Se puede comprobar que $f = \mathcal{C}_1^{-1} \circ \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es la aplicación coordenada de $\mathbb{R}_2[X]$ cuando se considera la base $\{1, X, X^2\}$ y $\mathcal{C}_1^{-1}$ es la inversa de la aplicación coordenada de $\mathcal{M}$ cuando se considera la base

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

2.3.1 Ejercicios

Ejercicio 2.3.1.1
Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 con coeficientes reales, y $\mathbb{R}_2[X]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2.

1. Decir las dimensiones de ambos espacios vectoriales. ¿Son dichos espacios isomorfos?

2. Sea $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la aplicación lineal que a cada polinomio $p(X) = a + bX + cX^2$ le asocia la matriz $M = f(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que f es inyectiva.

3. Siendo f la aplicación del apartado anterior, ¿es posible encontrar dos polinomios $p_1(X)$ y $p_2(X)$ tales que sus imágenes pertenezcan a un mismo subespacio generado por una matriz A?

4. ¿Sería posible definir una aplicación $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que fuera sobreyectiva?

Ejercicio 2.3.1.2
Definir, si es posible, una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}_2[X]$ que sea isomorfismo.

Ejercicio 2.3.1.3
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

1. Demostrar que si f es inyectiva, las imágenes de cualesquiera dos elementos distintos de V son distintas.

2. Demostrar que si las imágenes de cualesquiera dos elementos distintos de V son distintas, entonces f es inyectiva.

3. Sea el caso $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}_2[X]$ y f la aplicación que a cada vector $v = (a, b, c, d)$ de $V = \mathbb{R}^4$ le asigna el polinomio $f(a, b, c, d) = (a + b)X^2 + (c + d)$ de $W = \mathbb{R}_2[X]$.

   (a) Utilizando la fórmula de las dimensiones, probar que f no es inyectiva.

   (b) Determinar $ker(f)$.

   (c) Dar un conjunto infinito C de vectores de V tal que si $v \in C$, entonces $f(v) = f(1, 2, 3, 4)$

Ejercicio 2.3.1.4
Sean $f : V \to W$ y $g : W \to U$ dos aplicaciones lineales.

1. Demostrar que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$, y deducir que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

2. Demostrar que $\mathrm{im}(g\circ f) \subset \mathrm{im}(g)$, y deducir que si $g\circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

3. Sean $\phi : V \to W$ y $\delta_i : W \to V$ con $i = 1, 2$ tres aplicaciones lineales tales que $\phi \circ \delta_1 = I_W$ y $\delta_2 \circ \phi = I_V$. Demostrar que las dmensiones de V y W son iguales y que las tres aplicaciones son isomorfismos.

Ejercicio 2.3.1.5
Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ aplicaciones lineales y se sabe que

- $(g \circ f)(1, 1, 2, 2) = (g \circ f)(-1, 0, 1, 1)$

- $dim(\ker(g \circ f))$=1

Determinar una base de $\ker(f)$ y el rango de f.

2.4 Matriz asociada a una aplicación lineal

En esta sección, se estudian esencialmente las relaciones existentes entre las coordenadas de un vector y las coordenadas de su imagen por una aplicación lineal, una vez que se han fijado sendas bases en los espacios inicial y final de la aplicación considerada. Esto permitirá asociar, de forma natural, una matriz a la aplicación lineal.

Antes de establecer las relaciones antes indicadas, se muestra bajo qué condiciones queda determinada (de forma única) una aplicación lineal. Se ha visto anteriormente que si $f : V \to W$ es una aplicación lineal y $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un sistema generador de V, en cuanto se conocen los vectores $f(v_i)$ con $i = 1, \ldots, r$, se puede conocer la imagen de cualquier vector de V. En la siguiente proposición se muestra bajo qué condiciones el recíproco también es cierto: en el caso de asociar elementos de W a una base de V, **queda determinada unívocamente una aplicación lineal** $f : V \to W$ que verifica las condiciones impuestas.

Proposición 2.4.1
Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una familia cualquiera de vectores de W (donde eventualmente algunos vectores pueden coincidir). Entonces existe una y sólo una aplicación lineal $f : V \to W$ tal que

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \ldots, f(v_n) = w_n$$

Si se desea que la aplicación a construir sea lineal y $f(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, es obligado que $f(v)$ sea $a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_nw_n$ si $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ (de ahí también la unicidad). Es inmediato ver que la aplicación f así definida es lineal.

Ejemplo 2.4.1
¿Cuál es la imagen de un vector cualquiera de $\mathbb{R}_3[X]$ por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1) = (0, 0)$, $f(X) = (1, 0)$, $f(X^2) = (2, 2)$ y $f(X^3) = (3, 6)$?
Si $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal definida por $g(p(X)) = (p'(1), p''(1))$, ¿podemos afirmar que f y g son iguales?

Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente, y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}_V$, y $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ las coordenadas de $f(v) \in W$ respecto de la base $\mathcal{B}_W$. La relación existente entre $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ se obtiene mediante los siguientes argumentos:

- Por un lado se tiene $f(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots + y_mw_m$.
- Por otro lado $f(v) = f(x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + \ldots + x_nf(v_n)$. Si $f(v_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, se escribe en función de $\mathcal{B}_W$ se tendrá

$$f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \ldots + a_{mi}w_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j$$

- Tras llevar ésto a la igualdad anterior, agrupar términos en los que aparece el mismo vector w_j y utilizar la unicidad de expresión de un vector en función de una base, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array}$$

conocidas como **ecuaciones de f respecto de las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$**.

El sistema de ecuaciones anterior puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación matricial de f respecto de las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$** y la matriz (a_{ij}) de dicha ecuación se denomina **matriz de la aplicación lineal respecto de las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$** y la denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$.

Los siguientes ejemplos muestran el cálculo explícito de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto un par de bases.

Ejemplo 2.4.2

- Si $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,1,-1), v_3 = (1,1,-1,-1), v_4 = (1,-1,-1,-1)$ y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal definida por

  $$f(v_1) = (1,1,1), \qquad f(v_2) = (1,1,-1)$$

  $$f(v_3) = (1,-1,-1), \qquad f(v_4) = (-1,-1,-1)$$

  entonces

  $$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  considerando en $\mathbb{R}^4$ la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y en $\mathbb{R}^3$ la base canónica $\mathcal{B}_\mathcal{C}$. Si en $\mathbb{R}^4$ y en $\mathbb{R}^3$ consideramos las bases canónicas, teniendo en cuenta que

  - la base canónica de $\mathbb{R}^4$ en función de $\mathcal{B}$ se expresa

    $$e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_4),\ e_2 = \frac{1}{2}(v_3 - v_4),\ e_3 = \frac{1}{2}(v_2 - v_3),\ e_4 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$$

  - cada $f(v_i)$ está expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$
  - f es lineal

  entonces la matriz asociada a f respecto dichas bases es

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Sea $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $g(p(X)) = (p'(1), p''(1))$. Es inmediato que g es lineal; la matriz asociada a g respecto de las bases canónicas de ambos espacios es

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- Sea $\mathcal{M}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathcal{M}$ la aplicación lineal definida por $f(a + bX + cX^2) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la matriz asociada a esta aplicación cuando en ambos subespacios se considera la base canónica?

Todo este proceso nos permite, una vez fijadas bases de los espacios inicial y final, asociar a cada aplicación lineal una matriz, que por otra parte, como muestra la siguiente proposición, la determina puesto que el proceso es reversible.

Proposición 2.4.2
Dados $\mathbb{K}$–espacios vectoriales V y W en los que se consideran bases $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ respectivamente, y una matriz $M = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$, existe una aplicación lineal (y sólo una) $f : V \to W$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}(f) = M$.

Para definir la aplicación lineal cuya existencia asegura la proposición anterior sólo hay que considerar como aplicación f la definida por:

$$f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \ldots + a_{mi}w_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j$$

De este hecho resulta que habitualmente se identifique aplicación lineal y matriz, y que enunciados como el siguiente sean habituales.

> Sea A la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}_3[X]$ definida por
>
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> ¿Cuáles son las imágenes de los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 2, 3)$ por esta aplicación?

Ese mismo enunciado se podría haber expresado así:

> Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[X]$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas está definida por la matriz
>
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> ¿Quién es $f(0, 1, 0)$? ¿Y $f(1, 2, 3)$?

El proceso realizado hasta aquí nos permite identificar el conjunto de las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales con el espacio vectorial de las matrices (con las dimensiones apropiadas) como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1
Sean V y W $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ bases de V y W respectivamente. Denotemos por $\mathcal{L}$ el conjunto de las aplicaciones lineales de V en W, y por $\mathcal{M}$ el $\mathbb{K}$–espacio vectorial de las matrices $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, donde $m = \dim W$ y $n = \dim V$. Se tiene entonces que:

1. *$\mathcal{L}$ tiene estructura de $\mathbb{K}$–espacio vectorial con las operaciones siguientes*

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad y \quad (af)(v) = af(v)$$

donde f y g son elementos cualesquiera de $\mathcal{L}$, y $a \in \mathbb{K}$

2. *Si $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ es la aplicación que asocia a cada aplicación lineal f la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$ entonces Φ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–espacios vectoriales.*

Al comienzo de este capítulo se ha definido rango de una aplicación lineal, y ahora se ha visto la identificación de aplicación lineal y matriz, por tanto la pregunta siguiente es obvia: ¿qué relación existe entre el rango de una aplicación lineal y el rango de cualquiera de sus matrices asociadas?

Si V y W son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente, y $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$, se tiene que el vector $f(v_i)$ está identificado, vía el isomorfismo coordenado de W respecto $\mathcal{B}_W$, con la columna i-ésima de la matriz A, por tanto

$$\text{rango}(f) = \dim(\text{im}(f)) = \text{rango}\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\} =$$

$$= \text{rango}\{(a_{11}, \ldots, a_{m1}), (a_{12}, \ldots, a_{m2}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn})\} =$$

$$= \text{rango por columnas de } \ A$$

Consideremos ahora el subespacio S de $\mathbb{K}^n$ generado por las filas de la matriz A. La dimensión de dicho subespacio es el rango por filas de tal matriz, aunque en lo sucesivo no distinguiremos el rango por filas del rango por columnas puesto que ambos coinciden como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.4.3
En la matriz A el rango por filas y el rango por columnas es el mismo, lo que permite definir rango de una matriz como cualquiera de ellos.

Demostración.
La demostración de la afirmación anterior pasa por probar que $r \leq r'$ y $r' \leq r$, donde r es el rango por filas de A y r' su rango por columnas. Es suficiente ver que $r' \leq r$ pues a la otra desigualdad se llega de forma análoga (o bien considerando la matriz traspuesta de A).

No se pierde generalidad si se supone que son las r primeras filas de A las linealmente independientes, y las restantes por tanto combinación lineal de ellas:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik}(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$$

con $i = r+1, r+2, \ldots, m$. De esta última igualdad se deduce:

$$a_{ij} = \alpha_{i1}a_{1j} + \alpha_{i2}a_{2j} + \ldots \alpha_{ir}a_{rj} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik}a_{kj}$$

con $r+1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Para $j = 1, 2, \ldots, n$, sea c_j la columna j–ésima de A:

$$\begin{aligned} c_j &= (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}, a_{r+1j}, \ldots, a_{mj}) = \\ &= (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}, \sum_{k=1}^{r} \alpha_{r+1k} a_{kj}, \ldots, \sum_{k=1}^{r} \alpha_{mk} a_{kj}) = \\ &= a_{1j}(1, 0, \ldots, 0, \alpha_{r+11}, \ldots, \alpha_{m1}) + \\ &\quad + a_{2j}(0, 1, 0, \ldots, 0, \alpha_{r+12}, \ldots, \alpha_{m2}) + \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &\quad + a_{rj}(0, \ldots, 0, 1, \alpha_{r+1r}, \ldots, \alpha_{mr}) \end{aligned}$$

de donde se deduce que cada vector columna de A depende linealmente de los r vectores que aparecen en la combinación lineal anterior. Por tanto el número de vectores columna linealmente independientes no puede ser mayor que el número de los vectores que los generan, es decir, $r' \leq r$. ■

La proposición que se acaba de probar permite realizar el cálculo del rango de una aplicación lineal por las filas o por las columnas, indistintamente, de la matriz asociada.

2.4.1 Ejercicios

Ejercicio 2.4.1.1
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = 3e'_1 - e'_2, f(e_2) = e'_1 - e'_2, f(e_3) = 3e'_1 + 2e'_2$$

donde $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B'}_c = \{e'_1, e'_2\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

1. Completar: $f(x, y, z) = (\cdots, \cdots)$.

2. Comprobar que el resultado obtenido en el apartado anterior coincide (escrito en columna) con el obtenido al realizar la siguiente multipicación matricial.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. ¿Es cierto que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B'}_c}(f)$ es la matrix 2×3 del apartado anterior?

Ejercicio 2.4.1.2
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = e'_1 - e'_2 + e'_3, f(e_2) = -e'_1 - e'_2 + e'_3 + e'_4, f(e_3) = 2e'_1 - e'_4$$

donde $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B'}_c = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

1. Sea $v = (x, y, z)$ un vector de $\mathbb{R}^3$, y sea $f(v) = (x', y', z', t')$. Determina la matriz M tal que $(x', y', z', t')^t = M(x, y, z)^t$ (el superíndice t denota "traspuesta de").

2. Siendo M la matriz determinada en el apartado anterior, expresar la igualdad $M(x, y, z)^t = (1, 2, 3, 4)^t$ como un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. ¿Tiene solución el sistema anterior? ¿Por qué?

3. A las preguntas del segundo apartado una persona responde "No, porque el vector $(1, 2, 3, 4) \notin \mathrm{im}(f)$". ¿Coincide con tu respuesta? ¿Es correcta su respuesta?

Ejercicio 2.4.1.3
Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ definidas por:

$$f(x,y,z) = (2x-y, 3x+z, x+y+z, x-2y+z)$$

$$g(x,y,z) = (x-y-z, 3x-y+z, x+2y+3z, 2x-2y+z)$$

1. Hallar las matrices $M(f)$ y $M(g)$ asociadas a las aplicaciones f y g respectivamente cuando en el espacio inicial y en el espacio final se consideran las bases canónicas.

2. En general, si f_1 y f_2 son aplicaciones lineales del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial W, y v es un vector cualquiera de V, se define la aplicación

$$f_1 + f_2 : V \to W$$

$$v \to (f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v).$$

   Teniendo en cuenta lo anterior, y siendo f y g las aplicaciones antes definidas, completar:

$$(f+g)(x,y,z) = (\cdots, \cdots, \cdots, \cdots)$$

3. Determinar la matriz $M(f+g)$ asociada a las aplicación lineal $f+g$ cuando se consideran las bases canónicas en el espacio inicial y en el espacio final.

4. Hallar una relación entre $M(f)$, $M(g)$ y $M(f+g)$

Ejercicio 2.4.1.4
Se consideran los siguientes endomorfismos de $V = \mathbb{R}^2$.

- $f(x,y) = (-2x, -2y)$
- $g(x,y) = ((cos\frac{\pi}{6})x - (sen\frac{\pi}{6})y, (sen\frac{\pi}{6})x + (cos\frac{\pi}{6})y)$
- $h(x,y) = (y,x)$

1. Determina la matriz asociada a cada una de las aplicaciones anteriores respecto de las bases canónicas en el espacio inicial y en el espacio final.

2. Sea $T = \{(x,y) \in V \quad \text{tal que} \quad 0 \le x, 0 \le y, x+y \le 1\}$.
   (a) Demuestra que T no es un subespacio vectorial de V.
   (b) Representa gráficamente el conjunto T, y el transformado de T por cada una de las aplicaciones anteriores.
   (c) ¿Conoces el nombre de las transformaciones anteriores?

Ejercicio 2.4.1.5
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por su matriz asociada respecto de las bases canónicas en el espacio inicial y final.

$$M_{\mathcal{B}_\rfloor, \mathcal{B}'_\rfloor}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

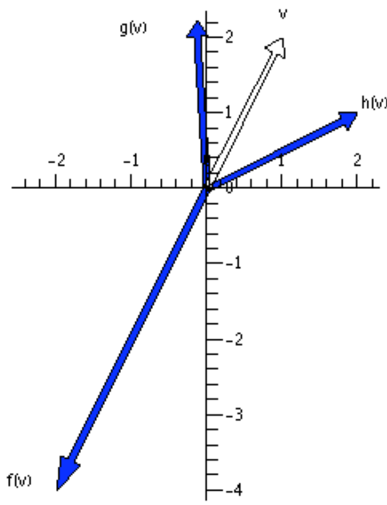

Figura 2.2: Vector $v = (1, 2)$ y transformados de v por f, g y h

1. $f(\alpha e_1 + \beta e_4) = (\alpha + 3\beta, \alpha + 4\beta, \alpha + 5\beta)$
2. El rango de la aplicación lineal es 4.
3. f es inyectiva.
4. La dimensión del núcleo de f es 1.

Ejercicio 2.4.1.6
Sea $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por su matriz asociada respecto de las bases canónicas en el espacio inicial y final.

$$M_{\mathcal{B}_\rfloor,\mathcal{B}'_\rfloor}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. f es sobreyectiva.
2. La dimensión del núcleo de f es 4.
3. $\ker(f) = \langle\{e_1 - e_5, e_1 - e_9, e_2 - e_6, e_2 - e_{10}, e_3 - e_7, e_3 - e_{11}, e_4 - e_8, e_4 - e_{12}\}\rangle$
4. $(1, 1, 1, 1) \notin \operatorname{im}(f)$.

2.5 Cambios de base y matrices equivalentes

En la sección precedente se ha mostrado cómo, fijadas bases en los espacios inicial y final, cada aplicación lineal queda caracterizada por una matriz (que depende de esas bases). En lo que sigue, se estudia la relación que existe entre dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal pero referidas a distintas bases. Para ello, y previamente, se estudia la matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales (que tambien es una aplicación lineal).

Proposición 2.5.1
Sean V, W y U $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, y $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_W$ y $\mathcal{B}_U$ bases de V, W, y U respectivamente. Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son aplicaciones lineales tales que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f) = A$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_U}(g) = B$, entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_U}(g \circ f) = BA$

Una primera aplicación de la proposición anterior aparece en la siguiente afirmación:

> Sea A una matriz $m \times n$, B una matriz $p \times m$ y BA la matriz producto. Se tiene entonces que rango$(BA) \leq$ rango(A). **¿Puedes demostrarlo?**

El siguiente ejemplo motiva la consideración de los cambios de base: el estudio de la relación entre las coordenadas de un mismo vector respecto de distintas bases.

Ejemplo 2.5.1
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z, x - y - 2z, x + 2y, x + z)$. La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas en ambos espacios es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si en $\mathbb{R}^3$ consideramos la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

y en $\mathbb{R}^4$ la base

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\},$$

la matriz asociada a f respecto dichas bases es

$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{21}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

El estudio de la relación que existe entre estas dos matrices que representan la misma aplicación lineal pero respecto de distintas bases es el objeto del resto de esta sección. La clave se encontrará en la relación que existe entre las coordenadas de un mismo vector respecto de distintas bases.

2.5.1 Cambios de Base

Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ bases de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente, ¿qué relación hay entre dichas coordenadas? Si $I_V : V \to V$ es la aplicación identidad y $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(I_V)$, teniendo en cuenta la ecuación matricial de una aplicación lineal, se verifica que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

La matriz P recibe el nombre de **matriz del cambio de base** de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ (sus columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ expresados en función de $\mathcal{B}$). Además se tiene que la matriz P es inversible:

> Sea $P^* = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(I_V)$ e I_n la matriz identidad de orden n. Es claro que $I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(I_V) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(I_V)$, pero también se tiene $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(I_V) = PP^*$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(I_V) = P^*P$ (la composición de aplicaciones tiene como matriz asociada la matriz producto e $I_V \circ I_V = I_V$). Por tanto $I_n = P^*P = PP^*$ y $P^* = P^{-1}$.

Se ha visto entonces que todo cambio de base tiene asociada una matriz regular. El proceso es recíproco: si $P = (p_{ij})$ es una matriz regular $n \times n$ y V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial donde $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una de sus bases, existe una base $\mathcal{B}'$ de V tal que $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(I_V)$. Basta considerar $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ donde

$$v_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} v_j.$$

Ejemplo 2.5.2
En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (0,-1,1), (0,1,0)\}$. Si uno desea saber cuáles son las coordenadas del vector $v = (3,2,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$, puede actuar

- bien resolviendo el sistema que resulta de la igualdad

$$(3,2,1) = a(1,-1,1) + b(0,-1,1) + c(0,1,0)$$

- o bien determinando la matriz del cambio de base P que da las coordenadas de los vectores de la base canónica en función de $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

  y obtener las coordenadas (a,b,c) de $v = (3,2,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dado un vector $v = (x,y,z)$, las coordenadas (x',y',z') de v respecto $\mathcal{B}$ son las que se obtienen como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.5.3
En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (0,-1,1), (0,1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,0,1)\}.$$

Si un vector v tiene coordenadas (x,y,z) respecto de $\mathcal{B}$ y (x',y',z') respecto de $\mathcal{B}'$, se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde P es la matriz del cambio de base cuyas columnas dan las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto de $\mathcal{B}$. ¿Puedes escribir P como producto de dos matrices de cambios de base donde intervenga la base canónica de $\mathbb{R}^3$?

2.5.2 $M' = QMP$

Todo lo visto anteriormente nos conduce de forma inmediata a la relación existente entre dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal pero referidas a bases distintas.

Teorema 2.5.1
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}'_V$ bases de V y $\mathcal{B}_W$ y $\mathcal{B}'_W$ bases de W. Si $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$ y $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W}(f)$ entonces $M' = QMP$ donde P y Q son matrices regulares de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente ($P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}_V}(I_V)$ y $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}'_W}(I_W)$).

La relación anterior da pie a establecer la definición de matrices equivalentes.

Definición 2.5.1
Dos matrices M y M' se dice que son equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal, o lo que es lo mismo, si ambas tienen el mismo tamaño, $m \times n$, y existen matrices regulares P y Q, de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente, verificando $M' = QMP$.

Desde un punto de vista práctico la definición anterior de matrices equivalentes es poco "manejable". El siguiente resultado (y su contrapartida vectorial) permitira caracterizar las matrices equivalentes en función de su rango (y de su tamaño).

Teorema 2.5.2
Si M es una matriz $m \times n$ y de rango r, entonces es equivalente a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix}$$

donde por I_r se denota la matriz identidad $r \times r$, por 0_1 la matriz nula de tamaño $r \times (n-r)$, por 0_2 la matriz nula $(m-r) \times r$ y por 0_3 la matriz nula $(n-r) \times (n-r)$.

Teorema 2.5.3
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal de rango r con $n = \dim V$ y $m = \dim W$. Entonces existe $\mathcal{B}_V$ base de V y $\mathcal{B}_W$ base de W tal que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix}$$

donde por I_r se denota la matriz identidad $r \times r$, por 0_1 la matriz nula de tamaño $r \times (n-r)$, por 0_2 la matriz nula $(m-r) \times r$ y por 0_3 la matriz nula $(n-r) \times (n-r)$.

Para demostrar el primer teorema (y el segundo) basta interpretar M como la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ (respecto algunas bases) donde V y W son $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente, y realizar ciertos cambios de base. Si $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V, donde $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de $\ker(f)$, y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$ es una base de W donde $w_i = f(v_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, r$ (comprueba que bajo estas condiciones los vectores $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ son linealmente independientes), entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f)$ es de la forma descrita en el/los enunciado/s.

Ejemplo 2.5.4
Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas tiene como matriz asociada M. Como el rango de M es 2, existen bases en $\mathbb{R}^4$ y en $\mathbb{R}^3$ respecto de las cuáles la matriz asociada a f es de la forma

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que $\ker(f) = \langle\{(1,1,-1,0),(1,-1,0,-1)\}\rangle$, podemos considerar

$$\mathcal{B}_V = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,-1,0),(1,-1,0,-1)\} \quad \text{como base de} \quad \mathbb{R}^4 \quad \text{y}$$

$$\mathcal{B}_W = \{(1,1,1),(1,-1,1),(1,0,0)\} \quad \text{como base de} \quad \mathbb{R}^3$$

$(f(1,0,0,0) = (1,1,1)$ y $f(0,1,0,0) = (1,-1,1))$. Así $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(f) = M'$.

Proposición 2.5.2
Sean M y M' dos matrices. Entonces M y M' son equivalentes si y sólo si tienen el mismo tamaño y el mismo rango.

De la definición de matrices equivalentes se deduce, de forma inmediata, que dos matrices que sean equivalentes tienen igual tamaño e igual rango. Si M y M' tienen igual tamaño $(m \times n)$ e igual rango (r), ambas son equivalentes a una matriz de la forma

$$C = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix}$$

es decir, $C = QMP = Q'M'P'$ donde Q, P, Q' y P' son matrices regulares. Esto permite escribir $M' = Q''MP''$ siendo $Q'' = Q'^{-1}Q$ y $P'' = PP'^{-1}$ (ambas regulares). ∎

Si por $\mathcal{M}$ denotamos el conjunto de matrices $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, la relación de equivalencia "ser matrices equivalentes" definida en $\mathcal{M}$ particiona el conjunto $\mathcal{M}$ en $t+1$ clases de equivalencia donde $t = \text{mínimo}\{m,n\}$. Cada clase de equivalencia está representada canónicamente por una matriz del tipo $C = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix}$ con $r = 0,1,2,\ldots,t$.

Ejemplo 2.5.5
Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 2 & a \\ b & b \end{pmatrix}$ son equivalentes si y sólo si $b \neq 0$ y $a \neq 2$. ¿Cuál es el representante canónico de la clase de equivalencia a la que pertenecen?

2.5.3 Ejercicios

Ejercicio 2.5.3.1
Sea $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\}$ la base canónica de $V = \mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,2,1,1), v_3 = (0,0,0,1), v_4 = (1,0,0,-1)\}$

1. Demuestra que $\mathcal{B}$ es base de V.
2. Sea $v = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$. Determina las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}_c$ y respecto $\mathcal{B}$.
3. Sea $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Determina las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}_c$ y respecto $\mathcal{B}$.

4. Si un vector $v \in \mathbb{R}^4$ cualquiera tiene coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ respecto $\mathcal{B}_c$ y coordenadas $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ respecto $\mathcal{B}$. Determina una matriz M tal que

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

¿Qué nombre recibe esa matriz M?

5. Sea $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2, v_3', v_4'\}$ con

$$v_1' = (0,0,0,1), v_2' = (0,0,2,1), v_3' = (0,1,-1,-1), v_4' = (-1,1,1,-1)$$

(a) Demuestra que $\mathcal{B}'$ es una base de $V = \mathbb{R}^4$

(b) Sea $v = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$. Determina las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}'$.

(c) Sea $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Determina las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}'$.

(d) Si un vector $v \in \mathbb{R}^4$ cualquiera tiene coordenadas $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ respecto $\mathcal{B}$ y coordenadas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ respecto $\mathcal{B}'$. Determina una matriz N tal que

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$$

¿Qué nombre recibe esa matriz N?

Ejercicio 2.5.3.2
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z) = (2x - y, 3x + z, x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Se considera la siguiente base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,-1), (1,-1,-1), (2,0,0)\}.$$

Determinar la matriz P cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ expresados en función de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (matriz de cambio de base).

2. Sea R la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ expresados en función de la base $\mathcal{B}$. ¿Qué relación existe entre las matrices P y R?

3. Sea M la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, y N la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^3$ y canónica en $\mathbb{R}^4$. Señalar una igualdad que relacione las matrices M, N y P, y obtener M y N.

Ejercicio 2.5.3.3
Sea $V = \mathbb{R}^4$ y U el subespacio de V definido por

$$U = \{(x,y,z,t) \in V \quad \text{tal que} \quad x - 2y = 0, x + y + z - t = 0\}$$

1. Demostrar que $\mathcal{B}_U = \{(2,1,0,3), (0,0,1,1)\}$ es base de U.

2. Sea $v = (4, 2, -1, 2)$. Probar que $v \in U$ y determinar las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}_U$.

3. Sea $v = (2\alpha, \alpha, \beta, 3\alpha + \beta)$. Probar que $v \in U$ y determinar las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}_U$.

4. Demostrar que $\mathcal{B}'_U = \{(0, 0, -1, -1), (2, 1, -3, 0)\}$ es base de U.

5. Si un vector $v \in U$ cualquiera tiene coordenadas (α_1, α_2) respecto $\mathcal{B}_U$ y coordenadas (β_1, β_2) respecto $\mathcal{B}'_U$. Determinar una matriz M tal que

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

¿Qué nombre recibe esa matriz M?

Ejercicio 2.5.3.4
Se consideran las siguientes matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 2, 1), v_2 = (-1, 1, 3), v_3 = (1, 0, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$ y la base canónica $\mathcal{B}'_c$ en $\mathbb{R}^4$ es M, $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'_c}(f)$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = MP$

2. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = MP^{-1}$

3. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = PM$

4. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = P^{-1}M$

Ejercicio 2.5.3.5
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica la matriz

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_4, e_2, e_3\}$, entonces la matriz asociada a f respecto de $\mathcal{B}$ es

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Existen bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$ tales que $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = I_4$.

3. No existen matrices inversibles P y Q tales que $QMP = I_4$.

4. No es posible hablar de f^{-1}

Ejercicio 2.5.3.6
Se considera la siguiente matriz real:

$$a = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ a & a & b & 1 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a una matriz de la forma

$$C = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix},$$

siendo I_r la matriz identidad de orden r, y los $0_i's$ matrices nulas de tamaños adecuados.

1. Determinar el valor de r según los valores de a, b, c.
2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ referida a las bases canónicas, hallar bases de tales espacios respecto de las cuales la matriz asociada a f sea la matriz C correspondiente.
3. Determinar matrices P (4×4) y Q (3×3) tales que $C = QAP$ (donde A y C son las matrices del apartado anterior).

Ejercicio 2.5.3.7
Se consieran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Hallar matrices B_1 y B_2 (distintas) tales que $AB_1 = AB_2 = I_2$
2. Hallar matrices D_1 y D_2 (distintas) tales que $D_1C = D_2C = I_3$
3. ¿Será posible encontrar una matriz B tal que $BA = I_3$?
4. ¿Será posible encontrar una matriz D tal que $CD = I_4$?

(I_r denota la matriz identidad de orden r)

2.6 Problemas de Aplicaciones Lineales

Problema 2.6.1
Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, y se definen las siguientes aplicaciones f_i de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuáles de ellas son lineales?

a) $f_1(x,y,z,t) = (x,y,z) + (1,2,3)$

b) $f_2(x,y,z,t) = (1,2,3)$

c) $f_3(x,y,z,t) = (x,2y,3z) + (1,2,3)$

d) $f_4(x,y,z,t) = (\operatorname{sen} x, \cos y, z+t)$

e) $f_5(x,y,z,t) = (2x-y, 2y-z, 0)$

f) $f_6(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t)$

Determinar el núcleo y la imagen de aquellas aplicaciones que hayan resultado ser lineales.

Problema 2.6.2
Consideremos el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, y la aplicación $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que a cada número complejo le asigna su conjugado. Se pide, averiguar si f es lineal considerando:

a) $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial

b) $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial

En los casos en que f sea lineal, hallar su núcleo y su imagen.

Problema 2.6.3
Determinar bases de los núcleos y las imágenes de las siguientes aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$:

a) $f_1(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y, x+y+z)$

b) $f_2(x,y,z) = (x-y, x+y, z, 0)$

c) $f_3(x,y,z) = (2x, 3y, x-y, x+y+z)$

d) $f_4(x,y,z) = (0, x-y-z, y-x-z, z-x-y)$

Problema 2.6.4
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to V$ tal que (para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$):

$$f(1,1,1) = 2b + aX \qquad f(0,-1,1) = aX + bX^3 \qquad f(0,0,1) = b + (a-1)X$$

a) Halla a y b para que f no sea inyectiva

b) Halla bases de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$, en función de a y b.

c) Determina el subespacio $f(U)$, según a y b, siendo $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y + z = 0\}$.

Problema 2.6.5
Dí, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas ó no.

a) Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Si f no es inyectiva, $\mathrm{Im}(f)$ no es $\mathbb{R}^n$.

b) Existe alguna aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que no siendo inyectiva tiene como imagen todo $\mathbb{R}^2$.

c) Existe una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que tiene como imagen todo $\mathbb{R}^3$.

d) Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es aplicación lineal, entonces $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ o $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

e) Si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $dim(Ker(f)) = n - 1$ o f es la aplicación nula.

f) Si f es un endomorfismo de V tal que $Ker(f) = Im(f)$, $dim(V)$ es un número par.

Problema 2.6.6
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial no nulo de dimensión n y f un endomorfismo de V verificando:

$$f^2 = 0 \quad \text{y} \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq \dim(\ker(f))$$

¿Cúales de las siguientes afirmaciones son ciertas?:

a) $\dim(\mathrm{Im}(f)) > \dim(\ker(f))$

b) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$

c) $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{\mathbf{0}\}$

d) n es un nº par

Problema 2.6.7
Sea V un espacio vectorial de dimensión 3, $\{v, w, u\}$ una base de V y f un endomorfismo de V tal que

$$f(v) = v + w, \qquad f(u) = u, \qquad \ker(f) =< \{v + w\} > .$$

Se pide calcular $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(f^2)$ y $\ker(f^3)$.

Problema 2.6.8
Construye, si es posible, una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los casos siguientes:

a) una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$.

b) una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$.

c) una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$ tal que su rango sea 5.

d) una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim \ker(f) = 3$.

Problema 2.6.9
Da un ejemplo, en cada uno de los casos siguientes, de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando:

a) $Ker(f) \cap Im(f) \neq \{\vec{0}\}$

b) $Ker(f) \subset Im(f)$

c) $Im(f) \subset Ker(f)$

Problema 2.6.10
Sean U y W dos subespacios no nulos de $\mathbb{R}^5$ tales que $U \oplus W = \mathbb{R}^5$.

a) Determina todos los posibles valores de $\dim U$ para que pueda existir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(f) = U$.

b) Determina todos los posibles valores de $\dim U$ para que pueda existir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ tal que $Im(f) = U$.

Problema 2.6.11
Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dos aplicaciones lineales.

a) Demuestra que $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.

b) Demuestra que si g es sobreyectiva, entonces $Im(f) \subset Im(f \circ g)$.

c) Supongamos que f y g verifican las siguientes condiciones:

   i) $\dim Ker(g \circ f) = 1$
   ii) $\dim Im(f \circ g) = 2$
   iii) g es sobreyectiva.

   Deduce que en ese caso

   · f no es inyectiva y $Ker(f) = Ker(g \circ f)$.
   · $Im(f) = Im(f \circ g)$.

Problema 2.6.12
Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z,t) = (x+y+2z, 2x-t, 0)$.

a) Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

b) Determina bases de $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobre?

Problema 2.6.13
Se consideran de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ las siguientes aplicaciones lineales:

i) $f(x,y) = ((-1/2)x, (-1/2)y)$

ii) $g(x,y) = (x', y')$ siendo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\mathrm{sen}\ \pi/4 \\ \mathrm{sen}\ \pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

iii) $h(x,y) = (y,x)$

iv) $j(x,y) = (3x, 3y)$

v) $k(x,y) = (2x, 5y)$

vi) $l(x,y) = (x+3y, 2x+y)$

a) Da la matriz asociada a cada una de las aplicaciones anteriores respecto las bases canónicas. ¿Son todas automorfismos de $\mathbb{R}^2$?

b) Sea $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Representa gráficamente dicho conjunto y su imagen por cada una de las aplicaciones definidas en este ejercicio.

c) ¿Darías un nombre especial a alguna de las aplicaciones anteriores?

Problema 2.6.14
Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que respecto las bases canónicas tiene por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla bases de $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ y obtén las coordenadas del vector $(1,0,2)$ respecto a una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base del $Kerf$ obtenida.

b) Sean $B = \{(-1,0,0), (1,0,2), (-1,2,0)\}$, y $B' = \{(-1,1), (-1,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determina la matriz asociada a f respecto de estas nuevas bases.

c) Halla la matriz de f respecto a las bases $C = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $C' = \{f(1,1,1), f(0,1,0)\}$.

d) Halla matrices inversibles P y Q con $P \in M_2(\mathbb{R})$ y $Q \in M_3(\mathbb{R})$ tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

donde $r = \dim(\mathrm{Im} f)$.

Problema 2.6.15
Sea B' la base de $\mathbb{R}^3$ dada por los vectores $\{(1,0,1),(2,1,1),(0,1,2)\}$. Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f\colon & V=\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & W=\mathbb{R}^3 \\ & (1,0,1) & \longmapsto & (4,-2,1) \\ & (2,1,1) & \longmapsto & (11,2,-1) \\ & (0,1,2) & \longmapsto & (1,2,-1) \end{array}$$

donde todos los vectores están expresados en las bases canónicas.

a) Halla la matriz M de la aplicación f respecto de la base B' en V y de la base canónica B en W.

b) Halla la matriz N de la aplicación f respecto de las bases canónicas en V y W, así como las matrices que relacionan N y M.

c) Halla las dimensiones del núcleo y de la imagen de f, y utiliza lo obtenido para justificar que f no es isomorfismo.

Problema 2.6.16
Considerar la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la matriz

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Encontrar la matriz que representa dicha aplicación respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,1)\}$. ¿Cuál es el significado geométrico de dicha aplicación?

Problema 2.6.17
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices reales de tamaño 3×3, y sea $\sigma : V \to V$ la aplicación que a cada matriz le asocia su traspuesta.

a) Halla la matriz A que representa a σ respecto las base canónica de V, esto es respecto de la base $\mathcal{B}_c = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$ donde E_{ij} es la matriz de V que en el lugar (i,j) tiene un 1, y el resto de los términos son 0.

b) Halla la matriz A' que representa a σ respecto la base $\mathcal{B}$ de V siendo

$$\mathcal{B} = \{E'_{11}, E'_{12}, E'_{13}, E'_{21}, E'_{22}, E'_{23}, E'_{31}, E'_{32}, E'_{33}\}$$

donde E'_{ij} es la matriz traspuesta de E_{ij}.

c) Halla una matriz inversible P tal que $A' = P^{-1}AP$.

Problema 2.6.18
Se considera un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz M que representa a f respecto la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (0,2,1), v_2 = (2,1,0), v_3 = (1,0,2)\}$.

b) Halla las potencias A^n para $n \in \mathbb{N}$.

c) ¿Existe un subespacio U de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $f(u) = u$ $\forall u \in U$?

Problema 2.6.19
Sea $\Re$ el conjunto formado por las matrices reales de tamaño 5×5 que son de la forma

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

$(\Re, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

a) Sean $I = A(1,0,0,0,0)$, $M = A(0,1,0,0,0)$ y $\mathcal{B} = \{I, M, M^2, M^3, M^4\}$. Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de $\Re$ y que M^k es la matriz nula 5×5 si $k \geq 5$.

b) Sea $N = A(1,2,3,4,5)$. Escribe N en función de la base $\mathcal{B}$, y calcula N^{-1} sabiendo que N^{-1} está en $\Re$.

c) Sea $t : \Re \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal que a cada matriz le asocia la suma de los elementos de su diagonal principal.

- Determina la matriz asociada a t cuando en el espacio inicial se considera la base $\mathcal{B}$ y en el espacio final se considera la base $\mathcal{B}_1 = \{1/5\}$.

- Determina $Im(t)$ y $Ker(t)$.

Problema 2.6.20
Halla los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el sistema de ecuaciones (A) es indeterminado. Discute y halla la solución general según el parámetro $a \in \mathbb{R}$ del sistema (B)

$$(A)\left\{\begin{array}{rcc} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n+1} & = & 0 \\ x_1+ax_2+x_3+\ldots+x_{n+1} & = & x_2 \\ x_1+x_2+ax_3+\ldots+x_{n+1} & = & 2x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+ax_{n+1} & = & nx_{n+1} \end{array}\right. \qquad (B)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+z+2t & = & 3 \\ 4x+6y+3z+4t & = & 5 \\ 6x+9y+5z+6t & = & 7 \\ 8x+12y+7z+at & = & 9 \end{array}\right.$$

Problema 2.6.21
Sea $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$f(x,y,z,t) = (3x+z, z, x+y-z+t)$$

1. Determina un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = U \oplus Ker(f)$.
2. ¿Es posible hallar un subespacio no nulo W de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = W \oplus Im(f)$?
3. Sea (a,b,c) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Sin intentar resolver el sistema responde justificadamente la siguiente cuestión. ¿Es verdadero o falso que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+z & = & a \\ z & = & b \\ x+y-z+t & = & c \end{array}\right.$$

siempre tiene solución?

Problema 2.6.22
Construye, si existe, una aplicación lineal suprayectiva $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. En caso de haberla construido, ¿es alguna de las siguientes matrices una matriz asociada a f? ¿Por qué?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2.6.23
Sea $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que respecto de las bases canónicas tiene por matriz, la matriz A siguiente. ¿Existen matrices inversibles $P(5\times 5)$ y $Q(3\times 3)$ tal que QAP sea la que a continuación se indica? En caso afirmativo calcúlalas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2.6.24
Sea A una matriz 55×44 y B una matriz 44×55. Demuestra que el determinante de AB es igual a 0.

Problema 2.6.25
Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(1,0,0) = (1,1,0,1) \qquad f(0,1,0) = (-1,2,0,0) \qquad f(0,0,1) = (0,3,0,1).$$

Halla la matriz asociada a f respecto las bases

$$B = \{(1,2,1),(0,1,2),(0,0,1)\}$$

y

$$B' = \{(2,1,0,1),(0,2,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,3)\}\ .$$

Problema 2.6.26
En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios siguientes:

$$U = \{(x,y,z,t)/x+y+z+t=0\}, \quad W = \{(x,y,z,t)/x-y=0, z-t=0\}$$

y sea $f : U \to W$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z,t) = (x-3y+z, x-3y+z, y+2z-t, y+2z-t).$$

a) Determina bases de U y de W.

b) Determina la matriz M asociada a f respecto de las bases halladas en el apartado anterior. ¿De qué tamaño es dicha matriz?

c) Halla bases de $Ker(f)$ y de $Im(f)$.

d) Determina matrices P y Q regulares tales que

$$QMP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y r es el rango de f.

Problema 2.6.27
Sea $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación identidad en $\mathbb{R}^3$ y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide

a) Hallar una base B_1 de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a I sea A cuando en el espacio inicial se considera la base B_1 y en el final la base canónica.

b) Hallar una base B_2 de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a I sea A cuando en el espacio inicial se considera la base canónica y en el final la base B_2.

Problema 2.6.28
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Sean $A(X) = 1+X+X^2$, $B(X) = 1+2X^2$, $C(X) = X+X^2$, $v = (2,0,1)$, $w = (3,1,0)$, $u = (1,-2,3)$. Se considera la aplicación $f\colon V \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(A(X)) = v \qquad f(B(X)) = w \qquad f(C(X)) = u$$

a) Halla la matriz de f respecto de las bases $\{A(X), B(X), C(X)\}$ de V y $\{v, w, u\}$ de $\mathbb{R}^3$. ¿Qué rango tiene la aplicación f? ¿Cualquier matriz asociada a f es equivalente a la matriz identidad 3×3?

b) Halla la matriz de f respecto de las bases $\{1, X, X^2\}$ de V y la canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 2.6.29
Sea $f\colon \mathbb{R}^{444} \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal y M la matriz asociada a f cuando en $\mathbb{R}^{444}$ y $\mathbb{R}^4$ se consideran las bases canónicas.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 44 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 44 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 44 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 44 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que $\mathrm{Im}(f) = \langle\{(1,1,1,1)\}\rangle$ y que

$$\ker(f) = \langle\{2e_1 - e_2, 3e_1 - e_3, \dots, 44e_1 - e_{44}, e_{45}, e_{46}, \dots, e_{444}\}\rangle\ .$$

b) ¿Respecto de qué bases de $\mathbb{R}^{444}$ y $\mathbb{R}^4$ la matriz asociada a f es la matriz N 4×444 siguiente?

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2.6.30
Sea $f\colon \mathbb{R}^{1000} \to \mathbb{R}^{999}$ una aplicación lineal y A la matriz asociada a f cuando en $\mathbb{R}^{1000}$ y $\mathbb{R}^{999}$ se consideran las bases canónicas. Se sabe que:

1. La primera y la quinta columnas de A son iguales.

2. El determinante de la matriz B es distinto de cero, siendo B la matriz que se obtiene de suprimir en A la primera columna.

Demuestra que $\ker(f) = \langle \{e_1 - e_5\} \rangle$.

Problema 2.6.31
Sea $f\colon \mathbb{R}^{16} \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal y M la matriz asociada a f cuando en $\mathbb{R}^{16}$ y $\mathbb{R}^4$ se consideran las bases canónicas. La matriz M 4×16 es de la forma $M = (AAAA)$ siendo A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Determina dimensiones y bases de $\ker(f)$ y $\mathrm{Im}(f)$.

Problema 2.6.32
Sean $f, g, h, j\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales definidas por (considerando $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales):

$$f(x, y, z) = (-2x, z - y), \quad g(x, y, z) = (x + y + z, x + y),$$
$$h(x, y, z) = (y, x + z), \quad j(x, y, z) = (-3x + 2y + z, 2x + 2z).$$

Se pide, si V denota el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$:

- Demostrar que f, g y h son vectores linealmente independientes en V. ¿Pertenece el vector j al subespacio de V engendrado por f, g y h?
- Resuelve matricialmente el apartado anterior (para ello tendrás que fijar una base en $\mathbb{R}^2$ y otra en $\mathbb{R}^3$).
- ¿Qué dimensión tiene V? Construye una base de V que sea ampliación de la familia libre $\{f, g, h\}$.
- ¿Qué base de V se puede considerar como "base canónica"?

Problema 2.6.33
Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por (considerando $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial):

$$f(x, y, z) = (y, z, 0).$$

Si V denota el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ determina el mayor n posible para que los vectores de V

$$I_{\mathbb{R}^3}, f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, \ldots, f^n = f \circ \ldots \circ f$$

sean linealmente independientes, donde $I_{\mathbb{R}^3}$ denota la aplicación identidad de $\mathbb{R}^3$.

Problema 2.6.34
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y W el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Se pide:

- Calcular bases y dimensión de V y W.

- Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal definida por (considerando $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales):
$$f(x,y,z) = (-2x+y-z, x-2z-y)$$
y se define la aplicación:
$$\begin{array}{rccc} F\colon & W & \longrightarrow & V \\ & g & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$
entonces demostrar que F es una aplicación lineal. Respecto las bases de V y W calculadas en el apartado inicial, calcula la matriz asociada a F. ¿Que nombre le darías a la aplicación lineal F?

- Determina bases de V y W tal que la matriz asociada a F respecto dichas bases sea lo más sencilla posible.

Problema 2.6.35
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres y W el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos. Se consideran las aplicaciones lineales:
$$\begin{array}{rccc} g\colon & V & \longrightarrow & W \\ & p(x) & \longmapsto & g(p(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h\colon & W & \longrightarrow & W \\ & q(x) & \longmapsto & h(q(x)) \end{array}$$
con $g(p(x)) = p(0)x^2 + p(1)x + p(-1)$ y
$$h(q(x)) = q'(x) + x^2\left(\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x\right).$$
Se pide:

- Determinar las matrices de g, h y $h\circ g$ respecto de las bases canónicas de V y W.

- Determinar bases de V y W de forma que las matrices asociadas a las aplicaciones lineales g, h y $h\circ g$ respecto dichas bases sean lo más sencillas posibles.

Problema 2.6.36
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio
$$U = \{(x,y,z,t) : x+y-z-t = 0,\ x+y+z+t = 0\}$$
y sea W un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = U\oplus W$. Si $\Pi\colon \mathbb{R}^4 \to U$ es la aplicación lineal que a cada v en $\mathbb{R}^4$ le asocia el único elemento $u\in U$ tal que $v = u+w$ con $w\in W$. Se pide:

- Determinar una base de U y la matriz de Π respecto la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base de U que has calculado.

- Si $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal definida por (considerando $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial):
$$f(x, y, z, t) = (x + y, y, z - t),$$
determinar bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ de forma que la matriz asociada a la aplicación lineal $f \circ \Pi$ respecto dichas bases sea lo más sencilla posible.

- Determinar una base y la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en U. ¿Cuales son las coordenadas de Π respecto la base que has calculado?

- Si H es el subespacio de V engendrado por la familia $\{\Pi\}$, determina un subespacio Q de V tal que $V = H \oplus Q$.

- Determinar una base y la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial M de las aplicaciones lineales de W en U.

Problema 2.6.37
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices 3×3 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y W el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en $\mathbb{R}$. Se pide:

- Determinar una base y la dimensión de W.

- Si Φ denota la aplicacion lineal "traza de una matriz"
$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \longmapsto & a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{array}$$
calcular las coordenadas de Φ respecto de la base de W que has calculado en el apartado anterior.

Problema 2.6.38
La matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ -11 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
es usada para codificar mensajes como sigue. Por identificación de las letras $A, B, C, \cdots, Y, Z$ con los números $1, 2, 3, \cdots, 25, 26$, un mensaje con k letras es considerado una k-upla de números. Esta k–upla es dividida en 5–uplas; si k no es divisible por 5 uno añade ceros al final. Después cada una de esas 5–uplas es multiplicada por la matriz dada. Teniendo en cuenta todo lo anterior, decodifica el siguiente mensaje (escrito en inglés).
$$-3, -38, 52, 7, 23; 38, 145, -200, 15, 59; 5, 3, -5, 35, 119.$$

Problema 2.6.39
Supongamos que

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ 30 \\ 7 \\ 251 \\ 540 \\ 377 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

donde uno de los coeficientes del lado derecho puede ser erróneo. Esto significa que $A\underline{x} = \underline{b} + \alpha\underline{e}_i$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector columna $\underline{e}_i$ son desconocidos.
Este problema consiste en determinar x_1, x_2 y x_3, y da idea de cómo corregir errores en problemas de codificación. La versión codificada de un mensaje contiene información redundante que puede ser usada si se producen errores durante la transmisión. En nuestro problema el mensaje está constituido por tres números (x_1, x_2 y x_3), mientras que la versión codificada del mensaje consta de seis números. Para resolver el problema sigue los siguientes pasos.

1. Halla una matriz real B de tamaño 3×6 tal que BA sea la matriz nula, y que ninguna columna de B sea múltiplo de alguna otra columna de B.

2. Determina α y $\underline{e}_i$ resolviendo la ecuación matricial $(O) = BA\underline{x} = B\underline{b} + \alpha B\underline{e}_i$.

3. Halla x_1, x_2 y x_3 resolviendo la ecuación matricial de partida, habiendo corregido previamente el miembro de la derecha tras resolver el apartado anterior.

Lección 3

La Teoría del Endomorfismo

La noción de autovalor y autovector de una matriz cuadrada es una de las herramientas más potentes que el Algebra Lineal proporciona para la resolución de gran cantidad de problemas que aparecen en Ciencía y Tecnología. Para ilustrar lo que decimos, consideramos el siguiente ejemplo de carácter económico.

Un conocido empresario comenta en una entrevista la forma en que logró hacer, honradamente, su fortuna. Inició su andadura en los negocios con un capital de 200 euros, producto de sus ahorros. Tras un año de trabajo como repartidor de pizzas tenía en su haber 1300 euros. A partir de ese momento, decide comprar cada año bienes por un importe igual a seis veces el valor de su capital a principios del año anterior, y venderlos por cuatro veces el valor de su capital al inicio del año en curso. Con esta estrategia el empresario conocía que en sólo 6 años conseguiría un capital superior al medio millón de euros.

Si u_n representa las ganancias a principios del año n-ésimo, la información dada puede expresarse mediante la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

donde $n \geq 0$.
Mediante técnicas que aprenderemos en este capítulo, podrá comprobarse que

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Esta igualdad permite operar más cómodamente y afirmar que la expresión 3.1 puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

A partir de la cual es inmediato deducir que

$$u_{n+2} = 900 \cdot 3^{n+2} - 700 \cdot 2^{n+2}$$

Esta expresión era a la que habíia llegado el empresario cuando decidió la estrategia a seguir.

Observar que en el ejemplo anterior, la igualdad 3.2 muestra una relación del tipo $M = Q^{-1}DQ$ donde M representa la matriz de partida y D una matriz diagonal: Los valores de la diagonal principal de D son los 'autovalores' de M, concepto, entre otros que forma parte del tema que estamos iniciando.

Pero antes de comenzar con los aspectos propios de esta lección, vamos a realizar una serie de puntualizaciones.

Como el nombre de la lección indica, nos vamos a centrar en el estudio de determinadas cuestiones relativas a aplicaciones lineales en las que el espacio inicial y el espacio final coinciden, pudiendo, obviamente, fijar igual base en ambos puntos (el de partida y el de llegada). Así pues, a lo largo del tema si $f\colon V \to V$ es una aplicación lineal, y en V consideramos fijada la base $\mathcal{B}$, se hablará de la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$, que denotaremos por $M_{\mathcal{B}}(f)$.
Observemos además que si M y N son dos matrices asociadas a f (en las condiciones señaladas), entonces $N = P^{-1}MP$, donde P es una matriz de cambio de base. Este hecho motiva la definición siguiente: *Dos matrices M y N se dice que son semejantes si se puede establecer entre ellas una relación del tipo $N = P^{-1}MP$.* Es trivial que "matrices semejantes" es un caso particular de "matrices equivalentes".

3.1 Autovalores y autovectores

Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $f\colon V \to V$ una aplicación lineal, esto es, un endomorfismo de V. Las nociones de autovalor y autovector juegan un papel fundamental en la búsqueda de la forma canónica de un endormorfismo de V.

Definición 3.1.1 *Un elemento α en $\mathbb{K}$ es un autovalor de f si existe un vector v distinto de cero verificando*

$$f(v) = \alpha v$$

El vector v se denomina autovector de f asociado al autovalor α.

La razón por la que estas nociones son fundamentales en el estudio de los endomorfismos se encuentra en que si se dispone de una base de V cuyos elementos son autovectores de f entonces la representación matricial de f respecto de esta base sería una matriz diagonal, en cuya diagonal se encontrarían los autovalores de f. En el caso de que sea posible tal representación diagonal para f se dice que f es diagonalizable. Para comprender mejor esto, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.1
Consideremos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ definido por la matriz M siguiente referida a la base canónica.

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En la figura siguiente se muestra la acción de f sobre la base canónica y sobre los vectores $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,-1)$. Es fácil comprobar que f transforma los subespacios $U = \langle\{v_1\}\rangle$ y $W = \langle\{v_2\}\rangle$ en sí mismos. A la vista de lo anterior, es sencillo confirmar que $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,-1)$ son autovectores asociados a los autovalores 2 y -2 respectivamente. Además v_1 y v_2 constituyen una base; llamando $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ se tiene que

$$M' = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es diagonal. ■

Para justificar la validez de la estrategia anterior en situaciones generales (búsqueda de autovectores) se demuestra en primer lugar la independencia lineal de los autovectores asociados a autovalores distintos.

Proposición 3.1.1 *Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo, α_1 y α_2 autovalores distintos de f y u_1 y u_2 autovectores de f asociados a α_1 y α_2 respectivamente. Entonces u_1 y u_2 son linealmente independientes.*

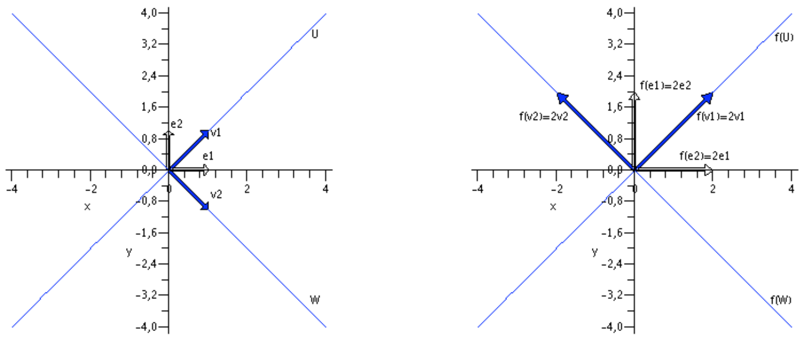

Figura 3.1: Acción del endomorfismo f sobre algunos vectores de $\mathbb{R}^2$

Demostración.
Si u_1 y u_2 son linealmente dependientes entonces $u_1 = \beta u_2$ con $\beta \neq 0$ puesto que u_1 y u_2 son autovectores. Se tiene asi

$$\alpha_1 u_1 = f(u_1) = f(\beta u_2) = \beta f(u_2) = \beta \alpha_2 u_2 = \alpha_2 u_1$$

y por ello $\alpha_1 = \alpha_2$, lo cual constituye una clara contradicción. ■

El resultado anterior se generaliza de forma sencilla al caso de s autovectores procedentes de s autovalores distintos. A continuación se muestra cómo calcular los autovalores (y los autovectores) asociados a un endomorfismo, lo que conducirá de forma natural a la definición de polinomio característico de un endomorfismo y de una matriz.

Proposición 3.1.2 *Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo, $\mathbb{B}$ una base de V y $A = \mathrm{M}_{\mathbb{B}}(f)$. Un elemento α en $\mathbb{K}$ es un autovalor de f si y sólo si*

$$\det(\alpha \mathbb{I}_n - A) = 0$$

donde $\mathbb{I}_n$ denota la matriz identidad de dimensión n y $n = \dim(V)$.

Definición 3.1.2 *Sea A una matriz cuadrada de dimensión n y coeficientes en $\mathbb{K}$. Se define el polinomio característico de A como:*

$$P_A(X) = \det(X\mathbb{I}_n - A)$$

donde $\mathbb{I}_n$ denota la matriz identidad de dimensión n.

- La manipulación de algunas matrices concretas (que pueden ser elegidas por el propio lector) permite observar el siguiente resultado cuya prueba se deja como ejercicio.

  Si $p_A(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ es el polinomio característico de una matriz A, entonces $a_n = 1, a_{n-1} = -traza(A), a_0 = (-1)^n det(A)$.

Definición 3.1.3 *Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo, $\mathbb{B}$ una base de V y $A = \mathrm{M}_{\mathbb{B}}(f)$. Se define el polinomio característico de f como:*

$$P_f(X) = P_A(X)$$

La definición de polinomio característico de un endomorfismo $f\colon V \to V$, tal y como se ha introducido, depende de la base escogida en V. Sin embargo esta ambigüedad desaparece notando que si dos matrices son semejantes entonces sus polinomios característicos coinciden. En particular, dos matrices semejantes tienen igual determinante, igual traza y los mismos autovalores, veámoslo. De la relación $B = P^{-1}AP$ puede obtenerse la siguientes cadena de igualdades:

$$P_B(X) = \det(X\mathbb{I}_n - B) = \det(XP^{-1}P - P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}(X\mathbb{I}_n - A)P) = \det(P^{-1})\det(X\mathbb{I}_n - A)\det(P) =$$

$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(X\mathbb{I}_n - A) = P_A(X)$$

La siguiente proposición muestra un primer criterio de diagonalización, esto es, una condición cuya verificación implica la existencia de una base respecto la cual la representación matricial del endomorfismo considerado es diagonal.

Proposición 3.1.3
Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Si f posee n autovalores distintos en $\mathbb{K}$ (o lo que es lo mismo $P_f(X)$ posee n raíces distintas en $\mathbb{K}$) entonces f es diagonalizable.

Ejemplo 3.1.2
Es fácil comprobar que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representado por la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (respecto de la base canónica) es diagonizable puesto que su polinomio característico es $X^2 - 1$ y una base de vectores propios es $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$. ■

Sin embargo existen endomorfismos diagonalizables para los que no se verifica la condición que muestra la proposición anterior, es decir, un endomorfismo de un espacio n-dimensional puede ser diagonalizable sin que su polinomio característico tenga n raíces distintas. El endomorfismo identidad, cuyo polinomio característico es $(X-1)^n$ es un ejemplo de ello, otro es el siguiente.

Ejemplo 3.1.3
El endomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ que tiene asociada respecto la base canónica la matriz B es diagonalizable. Su polinomio característico es $(X-1)^3(X+1)^2$. Calculando directamente vectores propios asociados a 1 y -1, o bien reordenando la base canónica ($\{e_1, e_5, e_3, e_2, e_4\}$) para reducir este problema, por cajas, a matrices iguales a la matriz A del ejemplo anterior, se puede ver que $\{e_1 + e_5, e_1 - e_5, e_3, e_2 + e_4, e_2 - e_4\}$ es una base de vectores propios.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

El siguiente criterio permite caracterizar los endomorfismos diagonalizables en términos de los subespacios propios que se definen a continuación.

Definición 3.1.4 *Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se define:*

$$V_f(\alpha) = \{u \in V : f(u) = \alpha u\}$$

y se tiene que $V_f(\alpha)$ es un subespacio vectorial de V y que $V_f(\alpha)$ es no trivial si y sólo si α es un autovalor de f. Se dice que $V_f(\alpha)$ es un subespacio propio de f.

Proposición 3.1.4 *Sea $f: V \to V$ un endomorfismo y $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ los distintos autovalores de f (esto es, las distintas raíces en $\mathbb{K}$ de $P_f(X)$). Se tiene entonces que f es diagonalizable si y sólo si se verifica*

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{s} \dim(V_f(\alpha_i))$$

Puesto que existen endomorfismos que no se pueden diagonalizar, incluso aunque se aumente el cuerpo de escalares, el siguiente teorema muestra cuando un endomorfismo se puede triangularizar, ésto es, cuando existe una base tal que la matriz del endomorfismo considerado respecto dicha base es triangular superior.

Teorema 3.1.1 *Sea $f: V \to V$ un endomorfismo verificando que $P_f(X)$ posee todas sus raíces en $\mathbb{K}$. Entonces existe una base $\mathbb{B}$ de V tal que*

$$\mathrm{M}_{\mathbb{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \star & \ldots & \ldots & \star \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & \ldots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

donde los α_i son los autovalores de f (que no tienen por qué ser todos distintos).

Una forma de demostrar el teorema anterior es aplicando inducción sobre la dimensión del espacio, o lo que es equivalente, sobre el orden de la matriz, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.4
Consideremos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ que respecto de la base canónica tiene como matriz asociada la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz A es triangulable puesto que su polinomio característico tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$:

$$P_A(X) = (X+1)^2(X-2)^2.$$

Si lo que se trata es de buscar una base $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cuál la matriz asociada a f es triangular, el primero de los vectores de $\mathbb{B}$ ha de ser un vector propio de f. Como

$$V_f(-1) = \langle \{e_2 = (0,1,0,0)\} \rangle$$

es el subespacio propio, respecto de f, asociado al valor propio -1, consideramos un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = V_f(-1) \oplus U$. Sea

$$U = \langle \{e_1 = (1,0,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)\} \rangle$$

y $\mathbb{B}' = \{e_2, e_1, e_3, e_4\}$. La matriz asociada a f respecto de $\mathbb{B}'$ es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Sea $g = p_U \circ f_U$ el endormorfismo de U donde $f_U : U \to \mathbb{R}^4$ es la restricción de f a U, y $p_U : \mathbb{R}^4 \to U$ es la proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre U. Si extraemos de A' la caja

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces se verifica que C es la matriz asociada al endomorfismo g de U respecto de la base $\mathbb{B}_U = \{e_1, e_3, e_4\}$ de U.

El polinomio característico de g es

$$P_g(X) = P_C(X) = (X+1)(X-2)^2,$$

y el subespacio

$$V_g(-1) = \langle \{-e_1 + e_3 + e_4\} \rangle.$$

Si en $U = V_g(-1) \oplus W$, con $W = \langle \{e_1, e_3\} \rangle$, consideramos la base $\mathbb{B}'_U = \{-e_1 + e_3 + e_4, e_1, e_3\}$, se tiene:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{B}'_U}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Reiterando el proceso, si de $\mathrm{M}_{\mathbb{B}'_U}(g)$ extraemos la caja

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

D es la matriz asociada a un endomorfismo h de W respecto de la base $\mathbb{B}_W = \{e_1, e_3\}$: $h = p_W \circ g_W$ donde $g_W : W \to U$ es la restricción de g a W, y $p_W : U \to W$ es la proyección de U sobre W.

El polinomio característico de h es

$$P_h(X) = P_D(X) = (X-2)^2,$$

y el subespacio

$$V_h(2) = \langle \{-2e_1 + e_3\} \rangle.$$

Si en W fijamos la base $\mathbb{B}'_W = \{-2e_1 + e_3, e_1\}$, se tiene que

$$\mathrm{M}_{\mathbb{B}'_W}(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea, finalmente, $\mathbb{B}^* = \{e_2, -e_1 + e_3 + e_4, -2e_1 + e_3, e_1\}$ la base de $\mathbb{R}^4$ que hemos obtenido a lo largo de todo el proceso anterior. Respecto de dicha base la matriz asociada a f es triangular:

$$\mathrm{M}_{\mathbb{B}^*}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

donde P es la matriz que tiene por columnas las respectivas coordenadas de los vectores de la base $\mathbb{B}^*$ expresados en función de la base canónica.

■

En las lineas siguientes vamos a realizar una serie de puntualizaciones que nos serán de utilidad, no sólo para introducir algunas aplicaciones del resultado anterior sobre triangularización, sino también, para abordar distintos aspectos contenidos en la sección inmediatamente posterior.

Sea f un endomorfismo del $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional V, y sea

$$p(X) = a_r X^r + a_{r-1} X^{r-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

un polinomio cualquiera con coeficientes en $\mathbb{K}$. Por $p(f)$ se denota el endomorfismo de V siguiente:

$$p(f) = a_r f^r + a_{r-1} f^{r-1} + \ldots + a_1 f + a_0 \mathbb{I}_V$$

donde

$$f^k = \overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{k \text{ veces}}.$$

Análogamente, si A es una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, $p(A)$ es la matriz

$$p(A) = a_r A^r + a_{r-1} A^{r-1} + \ldots + a_1 A + a_0 \mathbb{I}_n.$$

Distintos resultados vistos en el capítulo precedente nos permiten afirmar que si $\mathbb{B}$ es una base de V y $M = \mathrm{M}_{\mathbb{B}}(f)$ entonces

$$\mathrm{M}_{\mathbb{B}}(p(f)) = a_r M^r + a_{r-1} M^{r-1} + \ldots + a_1 M + a_0 \mathbb{I}_n = p(M).$$

También es inmediato comprobar que si $q(X)$ es otro polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ entonces:

$$(p+q)(f) = p(f) + q(f) \qquad (p \cdot q)(f) = (q \cdot p)(f)$$

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) \qquad (p \cdot q)(A) = (q \cdot p)(A) = p(A) \cdot q(A) = q(A) \cdot p(A)$$

Una vez establecida la notación y algunos resultados elementales relativos a expresiones polinómicas de matrices vamos a ver algunos resultados sencillos, a modo de ejemplo, en los que la triangulación de una matriz juega un papel importante.

Ejemplo 3.1.5

- Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ cuyos valores propios son $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ (no necesariamente distintos), entonces $traza(A) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $det(A) = \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_n$.
- Si p(X) es un polinomio cualquiera y A es una matriz $n \times n$, entonces los valores propios de la matriz $B = p(A)$ son exactamente los números $p(\alpha_1), \cdots, p(\alpha_n)$ donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son los valores propios de A.

  Para probar ambos resultados basta considerar una matriz triangular T semejante a A y aplicar las propiedades relativas a polinomios característicos de matrices semejantes. En el caso de B, debemos observar además que si $A = P^{-1}TP$ entonces $B = p(A) = p(P^{-1}TP) = P^{-1}p(T)P$ donde $p(T)$ es una matriz triangular en cuya diagonal principal aparecen $p(\alpha_1), \cdots, p(\alpha_n)$.

Aplicaciones interesantes de la última de las consecuencias son las siguientes.

- Si A_1 es una matriz 5×5 con valores propios distintos $1, -1, 0$ y A_2 es una matriz 8×8 de valores propios distintos $0, -1, 3, -6, -4$, entonces la matriz $B_1 = A_1^3 - A_1^2 - 4A_1 + 4\mathbb{I}$ no es inversible, pero sí lo es la matriz $B_2 = A_2^3 - A_2^2 - 4A_2 + 4\mathbb{I}$. La explicación puede darse de la siguiente manera. Las matrices B_1 y B_2 son $p(A_1)$ y $p(A_2)$ respectivamente, con $p(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4$. Teniendo en cuenta que $p(X) = (X-1)(X+2)(X-2)$, el $0 = p(1)$ es valor propio de B_1, lo que significa que dicha matriz no es inversible. No sucede lo mismo con B_2, cuyos valores propios son todos no nulos, pues ningún valor propio de A_2 es raiz de $p(X)$.

- Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $1/2, 2, 2$ son sus valores propios, entonces el hecho de someter a los vectores de $\mathbb{R}^3$ una, dos, tres, cuatro, ... veces sucesivamente a la transformación f, conduce al mismo efecto que el haber proyectado los vectores de $\mathbb{R}^3$ sobre un subespacio de dimensión 2. ¿Puedes justificarlo?

  > ¿Qué hubiera sucedido en una situación análoga a la anterior pero supuesto que f tuviese por valores propios $1/2, 1/2, 1/3$?

  El ejemplo con el que vamos a finalizar esta sección muestra que en casos muy particulares es posible triangular una matriz sin tener que realizar un desarrollo similar al efectuado en el ejemplo 3.1.4, y que nos daba las pautas generales de triangularización.

- Se consideran los endomorfismos f y g de R^3 que respecto de la base canónica tienen por matrices A y B respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

  Ambas matrices tienen polinomio característico $p(X) = (X+2)^2(X-4)$, y por ello los endomorfismos que representan son triangularizables. Si en ambos casos consideramos una base formada por dos vectores propios (correspondientes a autovalores distintos) y un tercer vector independiente con los anteriores, tenemos garantizada la triangularización.

  En el caso de f, un autovector asociado al autovalor -2 es $v_1 = (1,1,0)$ y un autovector asociado al autovalor 4 es $v_2 = (0,1,1)$. Sea $v_3 = (1,0,0)$ y consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Respecto de esta base la matriz asociada a f es

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Cuando se trabaja con g, el tercer vector de la base a hallar puede ser vector propio asociado al autovalor -2, puesto que el subespacio propio asociado a dicho autovalor es de dimensión 2. De esto resulta que g es además diagonalizable. La base de vectores propios es $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,1,2), v_3 = (0,1,1)\}$.

  Este es un caso en el que de nuevo aparecen matrices con igual polinomo característico y que no son semejantes.

■

En la sección que ahora concluimos se ha establecido una caracterización de los endomorfismos que son diagonalizables, en la que interviene el concepto de polinomio característico pero no exclusivamente. También se ha podido observar que existen endomorfismos con el mismo polinomio característico pero de diferente comportamiento, lo que significa que el polinomio característico de un endomorfismo, a pesar de su nombre, no lo caracteriza plenamente.

En lo sucesivo iremos introduciendo nuevos conceptos que nos permitan, por un lado, un manejo más cómodo de un endomorfismo cuando no sea diagonalizable, y por otro, dar una caracterización del mismo.

3.1.1 Ejercicios

Ejercicio 3.1.1.1
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(e_1) = e_1, f(e_2) = 2e_2, f(e_3) = 3e_3$.

1. Comprueba que $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.

2. ¿Son e_1, e_2, e_3 vectores propios asociados a f? En caso afirmativo, señalar respecto de qué valores propios.

3. ¿Es diagonal la matriz asociada a f respecto de la base canónica?

Ejercicio 3.1.1.2
Sea d el endomorfismo de $\mathbb{R}^2[X]$ que a cada polinomio le asocia su polinomio derivado. Se desea determinar, si existen, los vectores propios relativos a d, y los valores propios correspondientes. Justificar la siguiente linea de actuación.

1. Se buscan los polinomios no nulos $p(X) = aX^2 + bX + c$ tales que
$$2aX + b = \alpha(aX^2 + bX + c) \tag{3.4}$$

2. Si $\alpha \neq 0$, entonces la igualdad (3.4) conduce a que $p(X)$ debe ser el polinomio nulo.

3. Teniendo en cuenta (3.4), si $\alpha = 0$, entonces $a = b = 0$, y $p(X) = c$ con $c \neq 0$.

4. El 0 es por tanto el único valor propio de d, y tiene asociados como vectores propios los polinomios constantes.

¿Existe una base de $\mathbb{R}^2[X]$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea diagonal?

Ejercicio 3.1.1.3
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido, respecto de la base canónica por la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar el polinomio característico de f.

2. Hallar $V_f(2)$.

3. ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 3.1.1.4
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base canónica por la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Determinar el polinomio característico de f.
2. Hallar $V_f(\alpha)$, para cada valor propio α.
3. ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, hallar una matriz regular P de tamaño 3×3 tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Ejercicio 3.1.1.5
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base canónica por la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar el polinomio característico de f.
2. Hallar $V_f(\alpha)$, para cada valor propio α.
3. ¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, hallar una matriz regular P de tamaño 3×3 tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. En caso negativo, hallar una matriz regular P de tamaño 3×3 tal que $P^{-1}AP$ sea triangular.

Ejercicio 3.1.1.6
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base canónica por la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Se consideran los polinomios $p(X) = X^2 + 2$ y $q(X) = 3X^2 + X + 1$. Hallar las matrices $p(A)$ y $q(A)$, y determinar la imagen del vector $(1, 1, 1)$ respecto de los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ $p(f)$ y $q(f)$.
2. Con ayuda del último apartado del ejercicio anterior, obtener los valores propios de $q(f)$, y comprobar que si los valores propios de f son α, β, γ, los de $q(f)$ son $q(\alpha)$,$q(\beta)$ y $q(\gamma)$.

Ejercicio 3.1.1.7
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$. Justificar cada una de las afirmaciones siguientes, en las que α y β representan números complejos, y $\sqrt{-1}$ está representado por i.

1. Si $p_f(X) = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ entonces $\dim V_\alpha(f) \leq 2$.
2. Si α es un autovalor de f y $\dim V_\alpha(f) = 3$ entonces f es diagonalizable y $p_f(X) = (X - \alpha)^3$.
3. Si $p_f(X) = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ y $\dim V_\alpha(f) = 1$ entonces f no es diagonalizable.
4. Si $p_f(X) = (X^2 + 1)(X - 2)$, entonces f es diagonalizable.

5. Si $p_f(X) = (X-i)^2(X-2)$, no está garantizado que f sea diagonalizable.

Ejercicio 3.1.1.8
Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas, respecto de las bases canónicas correspondientes, por las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. $g \circ f$ es diagonalizable.
2. $g \circ f$ es inyectiva.

Ejercicio 3.1.1.9
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica la matriz

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $e_1 + e_4$ es vector propio asociado a algún autovalor de f.
2. $2, -2, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$ son los valores propios asociados a f.
3. f no es diagonalizable.
4. $2e_1 + e_4$ es vector propio asociado a algún autovalor de f.

Ejercicio 3.1.1.10
Se considera la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1/6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular el polinomio característico de A y comprobar que
$$p_A(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(6X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$$
2. El polinomio $q(X) = 6X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ posee una raiz real, que es es distinta de 0 y distinta de 1. ¿Por qué?

3. El resto de las raices del polinomio $q(X)$ anterior son todas complejas y distintas, y dos a dos son conjugadas entre si. ¿Por qué es cierto esto último?

4. Si h es el endomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^7$ que respecto de la base canónica tiene asociada la matriz A, ¿es h diagonalizable?

5. Si f es el endomorfismo del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^7$ que respecto de la base canónica tiene asociada la matriz A, ¿es f diagonalizable?

6. Reescribir el polinomio característico de A en la forma $p_A(X) = \frac{1}{6}X(7X^6 - r(X))$ siendo $r(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, y comprobar que si α es raiz de $p_A(X)$, entonces α no es raiz de $r(X)$.

7. En las notas teóricas se ha probado que si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son los valores propios de una matriz M de tamaño $n \times n$, entonces $p(\alpha_1), \cdots, p(\alpha_n)$ son los valores propios de la matriz $p(M)$ (donde $p(X)$ es un polinomio cualquiera). Teniendo en cuenta este resultado y el apartado anterior, deducir que el número 0 no es valor propio de la matriz $B = A^6 + A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + \mathbb{I}$.

8. Sea g el endomorfismo de $\mathbb{R}^7$ definido, respecto de la base canónica por la matriz B del apartado anterior. ¿Es g un isomorfismo?

9. Sean $V \xrightarrow{f_1} W \xrightarrow{f_2} U$ aplicaciones lineales entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Demostrar que si f_2 es isomorfismo entonces $\ker(f_2 \circ f_1) = \ker(f_1)$.

10. Conservando la notación empleada en apartados anteriores, se considera el endomorfismo $g \circ (f - \mathbb{I}_{\mathbb{R}^7})$ de $\mathbb{R}^7$. ¿Quién es la matriz asociada a tal endomorfismo respecto de la base canónica?

11. Teniendo en cuenta los dos apartados anteriores, deducir que $\ker(f^7 - \mathbb{I}_{\mathbb{R}^7}) = \ker(f - \mathbb{I}_{\mathbb{R}^7})$. Calcular dicho núcleo.

3.2 El polinomio mínimo de un endomorfismo

Uno de los conceptos a los que nos referíamos más arriba es el de polinomio mínimo de un endomorfismo.

Definición 3.2.1
Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Se llama polinomio mínimo de A a un polinomio $m(X) \in \mathbb{K}[X]$ verificando las siguientes condiciones:

1. *$m(X)$ es mónico.*

2. *$m(A)$ es la matriz nula.*

3. *$m(X)$ es el polinomio de menor grado verificando las dos condiciones anteriores.*

Antes de seguir debemos garantizar que la definición que hemos establecido anteriormente tiene sentido. Para ello vamos a demostrar el resultado que se conoce como Teorema de Cayley-Hamilton, y que nos asegura la existencia de un polinomio verificando las dos primeras condiciones exigidas en dicha definición. Una vez probado tal teorema, sabemos que el conjunto

$$N = \{r \in \mathbb{N} : \text{ existe } q(X) \in \mathbb{K}[X] \text{ mónico, } \text{grado}(q(X)) = r \text{ y } q(A) = \mathbf{0}\}$$

es no vacio y que por tanto posee mínimo. Si ese mínimo es r_m, un polinomio que tenga dicho grado (y verifique lo pedido en la definición de N) será un polinomio mínimo de A. Más tarde se garantizaráó la unicidad del mismo.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Cayley–Hamilton)
Sea A una matrix $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ y $P_A(X)$ su polinomio característico. Se verifica entonces que la matriz $P_A(A)$ es la matriz nula.
Sea $f\colon V\to V$ un endomorfismo y $P_f(X)$ su polinomio característico. Se verifica entonces que el endomorfismo $P_f(f)$ es el endomorfismo nulo.

Demostración.
Sea
$$P_A(X)=\det(X\mathbb{I}_n-A)=X^n+b_{n-1}X^{n-1}+\ldots+b_1X+b_0.$$
Denotemos por $\mathcal{M}$ la matriz $X\mathbb{I}_n-A$, y por $\mathcal{M}^\star$ la matriz adjunta de la traspuesta de $\mathcal{M}$, de donde tendremos que
$$\mathcal{M}\cdot\mathcal{M}^\star=\det(X\mathbb{I}_n-A)\mathbb{I}_n=P_A(X)\mathbb{I}_n \tag{3.5}$$
La matriz $\mathcal{M}^\star$ es una matriz con coeficientes en $\mathbb{K}[X]$, pero también puede ser vista como un polinomio con coeficientes en un conjunto de matrices.

Si $\mathcal{M}^\star=(\alpha_{ij})$ entonces $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, siendo M_{ij} el determinante de un menor de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ de la matriz traspuesta de $\mathcal{M}$. Por tanto cada α_{ij} es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$ en la indeterminada X:
$$\mathcal{M}^\star=\begin{pmatrix} a^{11}_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a^{11}_1X+a^{11}_0 & \ldots & a^{1n}_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a^{1n}_1X+a^{1n}_0\\ \vdots & & \vdots\\ a^{n1}_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a^{n1}_1X+a^{n1}_0 & \ldots & a^{nn}_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a^{nn}_1X+a^{nn}_0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^{11}_{n-1} & \ldots & a^{1n}_{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a^{n1}_{n-1} & \ldots & a^{nn}_{n-1}\end{pmatrix}X^{n-1}+\ldots+\begin{pmatrix} a^{11}_{1} & \ldots & a^{1n}_{1}\\ \vdots & & \vdots\\ a^{n1}_{1} & \ldots & a^{nn}_{1}\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} a^{11}_{0} & \ldots & a^{1n}_{0}\\ \vdots & & \vdots\\ a^{n1}_{0} & \ldots & a^{nn}_{0}\end{pmatrix} \tag{3.6}$$
$$=M_{n-1}X^{n-1}+\ldots+M_1X+M_0=M(X)$$
Teniendo en cuenta las igualdades 3.5 y 3.6 obtenemos
$$(M_{n-1}X^{n-1}\ldots\ldots+M_1X+M_0)\cdot(X\mathbb{I}_n-A)=(X^n+b_{n-1}X^{n-1}+\ldots+b_1X+b_0)\cdot\mathbb{I}_n \tag{3.7}$$
Haciendo operaciones en el miembro de la izquierda obtenemos:
$$(M_{n-1}X^n+\ldots\ldots+M_1X^2+M_0X)-(M_{n-1}AX^{n-1}+\ldots\ldots+M_1AX+M_0A)=$$
$$=M_{n-1}X^n+(M_{n-2}-M_{n-1}A)X^{n-1}+\ldots\ldots+(M_1-M_2A)X^2+(M_0-M_1A)X-M_0A$$
El miembro de la derecha puede escribirse como:
$$\mathbb{I}_nX^n+b_{n-1}\mathbb{I}_nX^{n-1}+\ldots+b_1\mathbb{I}_nX+b_0\mathbb{I}_n$$
De 3.7, y del hecho de que dos polinomios son iguales si lo son los coeficientes de los términos de igual grado, resultan las siguientes igualdades:
$$\begin{aligned} M_{n-1} &= \mathbb{I}_n\\ M_{n-2}-M_{n-1}A &= b_{n-1}\mathbb{I}_n\\ M_{n-3}-M_{n-2}A &= b_{n-2}\mathbb{I}_n\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} & \vdots & \\ M_1 - M_2A & = & b_2\mathbb{I}_n \\ M_0 - M_1A & = & b_1\mathbb{I}_n \\ -M_0A & = & b_0\mathbb{I}_n \end{array}$$

A la primera de las igualdades anteriores la multiplicamos por A^n, a la segunda por A^{n-1}, a la tercera por A^{n-2}, ..., a la penúltima por A, y a la última por $\mathbb{I}_n$, obteniendo:

$$\begin{array}{rcl} M_{n-1}A^n & = & A^n \\ M_{n-2}A^{n-1} - M_{n-1}A^n & = & b_{n-1}A^{n-1} \\ M_{n-3}A^{n-2} - M_{n-2}A^{n-1} & = & b_{n-2}A^{n-2} \\ & \vdots & \\ M_1A^2 - M_2A^3 & = & b_2A^2 \\ M_0A - M_1A^2 & = & b_1A \\ -M_0A & = & b_0\mathbb{I}_n \end{array}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, obtenemos $[0] = P_A(A)$ donde $[0]$ denota la matriz nula de tamaño $n \times n$. ∎

Proposición 3.2.1
Sea A una matrix $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea $m(X)$ un polinomio mínimo de A. Se verifica entonces:

1. *Si $p(X)$ es un polinomio de $\mathbb{K}[X]$, $p(A)$ es la matriz nula si y sólo si $p(X)$ es múltiplo de $m(X)$.*
2. *El polinomio mínimo de A es único, y lo vamos a denotar por $m_A(X)$.*
3. *El polinomio característico de una matriz es múltiplo de su polinomio mínimo.*
4. *Si B es una matriz semejante a A, $m_A(X) = m_B(X)$.*

La demostración del punto 1 de la proposición se basa en el concepto de división euclidea de polinomios. El segundo de los puntos se deduce del primero junto con el hecho de que los polinomios son mónicos. El tercero es consecuencia del punto 1 y del teorema de Cayley-Hamilton, y el cuarto:

Si A y B son semejantes, $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$, entonces

$$m_B(A) = m_B(P^{-1} \cdot B \cdot P) = P^{-1} \cdot m_B(B) \cdot P = P^{-1}[0]P = [0]$$

y, como consecuencia, $m_A(X)$ es un divisor de $m_B(X)$. Como un razonamiento análogo prueba que $m_B(X)$ es un divisor de $m_A(X)$, y ambos son mónicos, han de coincidir.

Este último hecho nos permite definir, sin problemas, el polinomio mínimo de un endomorfismo.

Definición 3.2.2
Para cualquier endomorfismo f de un espacio vectorial V, se define polinomio mínimo de f como el polinomio mínimo de cualquiera de sus matrices asociadas. A dicho polinomio lo denotamos por $m_f(X)$

Ejemplo 3.2.1
A continuación se muestran algunos ejemplos de endomorfismos y matrices, junto con sus polinomios mínimos:

- El polinomio característico de la matriz identidad de tamaño $n \times n$ es $(X-1)^n$ y su polinomio mínimo es $(X-1)$.

- La matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
tiene por polinomio característico y polinomio mínimo X^2.

- El polinomio característico de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
es $(X-1)^2(X-2)$ y su polinomio mínimo es $(X-1)(X-2)$.

- Si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
entonces $P_A(X) = X^3(X-1)$ y su polinomio mínimo será alguno de los siguientes: $X, X^2, X^3, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)$. ¿Cuántos intentos serían necesarios para poder concluir que $m_A(X) = X^2(X-1)$?

El siguiente enunciado establece una cierta relación entre los factores irreducibles del polinomio característico y los del polinomio mínimo de una matriz, y con él se reduce el número de intentos entre los divisores del polinomio característico para obtener el polinomio mínimo. Sobra añadir su equivalente en términos de endomorfismos.

Teorema 3.2.2
Sea A una matrix $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, $P_A(X)$ su polinomio característico y $m_A(X)$ su polinomio mínimo. Se verifica entonces que todo factor irreducible de $P_A(X)$ es factor irreducible de $m_A(X)$.

Demostración.
Para probar este resultado vamos a probar que $P_A(X)$ es un divisor de $(m_A(X))^n$, lo que garantiza que todo factor irreducible de $P_A(X)$ lo es de $(m_A(X))^n$, y como consecuencia de $m_A(X)$. Sea $m_A(X) = X^r + c_{r-1}X^{r-1} + \ldots + c_1X + c_0$ con $r \leq n$ y $c_i \in \mathbb{K}$.

Consideramos las siguientes matrices:

$$\begin{array}{rcl} B_0 & = & \mathbb{I}_n \\ B_1 & = & A + c_{r-1}\mathbb{I}_n \\ B_2 & = & A^2 + c_{r-1}A + c_{r-2}\mathbb{I}_n \\ & \vdots & \\ B_{r-2} & = & A^{r-2} + c_{r-1}A^{r-3} + \ldots + c_3A + c_2\mathbb{I}_n \\ B_{r-1} & = & A^{r-1} + c_{r-1}A^{r-2} + \ldots + c_3A^2 + c_2A + c_1\mathbb{I}_n \end{array} \tag{3.8}$$

A todas ellas las multiplicamos por A obteniendo:

$$\begin{array}{rcl} AB_0 & = & A \\ AB_1 & = & A^2 + c_{r-1}A \\ AB_2 & = & A^3 + c_{r-1}A^2 + c_{r-2}A \\ & \vdots & \\ AB_{r-2} & = & A^{r-1} + c_{r-1}A^{r-2} + \ldots + c_3A^2 + c_2A \\ AB_{r-1} & = & A^r + c_{r-1}A^{r-1} + \ldots + c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A \end{array} \tag{3.9}$$

Teniendo en cuenta 3.8 y 3.9, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{rcl} B_0 & = & \mathbb{I}_n \\ B_1 & = & AB_0 + c_{r-1}\mathbb{I}_n \\ B_2 & = & AB_1 + c_{r-2}\mathbb{I}_n \\ & \vdots & \\ B_{r-2} & = & AB_{r-3} + c_2\mathbb{I}_n \\ B_{r-1} & = & AB_{r-2} + c_1\mathbb{I}_n \end{array} \tag{3.10}$$

Además de la última igualdad en 3.9 tenemos:

$$AB_{r-1} + c_0\mathbb{I}_n = A^r + c_{r-1}A^{r-1} + \ldots + c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A + c_0\mathbb{I}_n = m_A(A) = [\mathbf{0}] \tag{3.11}$$

y por tanto:

$$AB_{r-1} = -c_0\mathbb{I}_n.$$

Consideremos el (resp. la) siguiente polinomio (resp. matriz) con coeficientes en $M_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathbb{K}[X]$):

$$B(X) = B_0X^{r-1} + B_1X^{r-2} + \ldots + B_{r-2}X + B_{r-1}$$

que, a continuación, multiplicamos por $(X\mathbb{I}_n - A)$:

$$\begin{array}{rl} (X\mathbb{I}_n - A)B(X) = & B(X)X - AB(X) = \\ = & (B_0X^r + \ldots + B_{r-1}X) - (AB_0X^{r-1} + \ldots + AB_{r-2}X + AB_{r-1}) = \\ = & B_0X^r + (B_1 - AB_0)X^{r-1} + \ldots + (B_{r-1} - AB_{r-2})X - AB_{r-1} = \\ = & \mathbb{I}_nX^r + c_{r-1}\mathbb{I}_nX^{r-1} + \ldots + c_2\mathbb{I}_nX^2 + c_1\mathbb{I}_nX + c_0\mathbb{I}_n = \\ = & (X^r + c_{r-1}X^{r-1} + \ldots + c_1X + c_0)\mathbb{I}_n = \\ = & m_A(X)\mathbb{I}_n \end{array}$$

Tomando determinantes en la igualdad anterior se obtiene:

$$\det(X\mathbb{I}_n - A) \cdot \det(B(X)) = \det(m_A(X)\mathbb{I}_n) = (m_A(X))^n$$

Como $\det(B(X))$ es un polinomio de $\mathbb{K}[X]$ y $\det(X\mathbb{I}_n - A) = P_A(X)$, queda probado que $P_A(X)$ es un divisor de $(m_A(X))^n$. ∎

3.2.1 Ejercicios

Ejercicio 3.2.1.1
Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar los polinomios característicos de cada una de las matrices anteriores, y comprobar que $p_A(A)$, $p_B(B)$ y $p_C(C)$ son las matrices nulas correspondientes.
2. Establecer todos los divisores de los polinomios $p_A(X)$, $p_B(X)$ y $p_C(X)$ respectivamente, que contengan todos los factores irreducibles distintos que aparecen en las factorizaciones de cada uno de los polinomios señalados (p.e. si el polinomio característico es $X^2(X-1)$ sólo se deberán considerar los divisores $X(X-1)$ y $X^2(X-1)$).
3. Determinar para cada caso el polinomio mínimo de la matriz.

Ejercicio 3.2.1.2
Sea A una matriz 4×4. Justificar las afirmaciones siguientes.

1. Si el polinomio mínimo de A es X, entonces A es la matriz nula.
2. Si A^2 es la matriz nula y A no es la matriz nula, entonces el polinomio mínimo de A es X^2.
3. Si $A^2 - \mathbb{I}_4$ es la matriz nula, no necesariamente $A = \mathbb{I}_4$ o $A = -\mathbb{I}_4$.

Ejercicio 3.2.1.3
Sea f un endomorfismo del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n. Decir, razonadamente cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas y cuáles son falsas.

1. Si el polinomio mínimo de f es X, entonces f es la aplicación nula.
2. Si f^2 es la aplicación nula y f no es la aplicación nula, entonces el polinomio mínimo de f es X^2.
3. Si $q(X)$ es un polinomio mónico, de grado n y tal que $q(f)$ es la aplicación nula, entonces $q(X)$ es el polinomio característico de f.

Ejercicio 3.2.1.4
Escribir tres matrices de tamaño 4×4, y con coeficientes reales, tales que todas ellas tengan por polinomio característico $p(X) = (X-1)(X-2)^3$ y todas tengan polinomios mínimos distintos.¿Puede existir un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ que respecto de bases adecuadas pueda ser representado por dos de las matrices anteriores?

Ejercicio 3.2.1.5
En $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios

$$U = \langle\{u_1 = (1,1,1,1,0), u_2 = (-1,-1,-1,-1,-1)\}\rangle$$

$$W = \langle\{w_1 = (1,1,1,0,0), w_2 = (0,1,1,0,0), w_3 = (0,0,-1,0,0)\}\rangle$$

1. Probar que $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$
2. Sea $p\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ el endomorfismo proyección sobre U en la dirección de W. (Ver en texto de teoría primeros ejemplos de aplicaciones lineales). Determinar la matriz asociada a p respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$.
3. Hallar el polinomio característico de p y el polinomio mínimo de p.
4. Determinar los subespacios de vectores propios asociados a los distintos valores propios.
5. Determinar la matriz asociada a p respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

Ejercicio 3.2.1.6
Determinar el polinomio mínimo de la matriz A del ejercicio 3.1.1.10.

3.3 Subespacios invariantes

En esta sección se va a tratar el concepto de subespacio invariante por un endomorfismo de un espacio vectorial. Veremos cómo hallar subespacios invariantes, que permitirán asociar a un endomorfismo una matriz diagonal por cajas. La noción de endomorfismo nilpotente que se tratará en la siguiente sección, nos ayudará a transformar esas cajas a su forma canónica.

Definición 3.3.1
Sea f un endomorfismo de V, y U un subespacio vectorial de V. Se dice que U es f-invariante o invariante por f si se verifica cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

1. *$f(u) \in U$, cualquiera que sea $u \in U$.*
2. *$f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_r)$ están en U siendo $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ un sistema generador de U.*

Ejemplo 3.3.1
A continuación se muestran algunos ejemplos de subespacios invariantes:

- Si f es el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B_C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  entonces es inmediato observar que $\langle\{e_1, e_2\}\rangle$ es un subespacio f-invariante y que $\langle\{e_3, e_4\}\rangle$ no lo es. También es invariante el subespacio $\langle\{(4, 2, 1, 0)\}\rangle$ puesto que es el subespacio de vectores propios de f asociados al valor propio 1.

- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B_C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Los subespacios $U_1 = \langle\{e_1, e_5\}\rangle$, $U_2 = \langle\{e_2, e_4\}\rangle$, $U_3 = \langle\{e_3\}\rangle$ y $U_4 = \langle\{e_1, e_5, e_3\}\rangle$ son f–invariantes.

Antes de enunciar y demostrar el resultado general relativo a los subespacios invariantes de “mayor interés”, vamos a trabajar cada uno de los aspectos que recoge dicho resultado mediante un ejemplo.

Ejemplo 3.3.2
Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^6$ que tiene asociada respecto de la base canónica la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -8 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ -3 & -8 & 1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 6 & 0 \\ -4 & -9 & -1 & -4 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de f es $P_f(X) = (X-2)^3(X+3)^3$ y su polinomio mínimo es $m_f(X) = (X-2)^3(X+3)^2$.

Si consideramos los subespacios $V_1 = \ker(f - 2I_{\mathbb{R}^6})^3$ y $V_2 = \ker(f + 3I_{\mathbb{R}^6})^2$, se tiene que

$$V_1 = \langle\{v_1 = (0,1,1,0,1,0), v_2 = (1,-1,1,1,0,0), v_3 = (0,0,-1,0,0,1)\}\rangle$$

$$V_2 = \langle\{w_1 = (1,0,0,-1,0,0), w_2 = (0,0,0,0,0,1), w_3 = (0,1,1,1,1,0)\}\rangle$$

de lo que se pueden deducir los siguientes resultados:

1. La familia de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ es libre, y por tanto es una base de $\mathbb{R}^6$, lo que permite asegurar que $\mathbb{R}^6 = V_1 + V_2$.

2. Puesto que $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^6 = V_1 \oplus V_2$.

3. Si calculamos las imágenes por f de los vectores de $\mathcal{B}$, obtenemos:

$$f(v_1) = v_1 - v_2 \qquad f(v_2) = 2v_2 - v_3 \qquad f(v_3) = v_1 + v_2 + 3v_3$$

$$f(w_1) = -3w_1 \qquad f(w_2) = -3w_2 \qquad f(w_3) = w_1 - 3w_3.$$

Esto muestra que los subespacios V_1 y V_2 son f-invariantes, y que la matriz $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

En la proposición siguiente se muestra cómo describir un espacio vectorial V como suma directa de subespacios f-invariantes de acuerdo con la factorización de su polinomio mínimo, siendo f un endomorfismo de V.

Proposición 3.3.1 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional y $f : V \to V$ un endomorfismo de polinomio característico*

$$P_f(X) = (X-\alpha_1)^{r_1} \cdot (X-\alpha_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_l)^{r_l}$$

y de polinomio mínimo

$$m_f(X) = (X-\alpha_1)^{s_1} \cdot (X-\alpha_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_l)^{s_l}$$

siendo $1 \leq s_i \leq r_i$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Si denotamos $V_1 = \ker((f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1})$ y $V_2 = \ker(b(f))$ siendo

$$b(X) = (X-\alpha_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_l)^{s_l},$$

entocnes se tiene:

1. *V es suma de los subespacios V_1 y V_2.*

2. *$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$, y por tanto $V = V_1 \oplus V_2$.*

3. *V_1 y V_2 son f-invariantes.*

4. *Si f_i, con $i = 1, 2$, denota la restricción de f a V_i, entonces $m_{f_1}(X) = (X-\alpha_1)^{s_1}$ y $m_{f_2}(X) = b(X)$.*

5. *La dimensión de V_1 es r_1.*

Demostración.
Por ser núcleos de aplicaciones lineales, V_1 y V_2 son subespacios de V. Los polinomios que definen esos subespacios son primos entre si, por lo que aplicando la identidad de Bezout existen polinomios $p(X)$ y $q(X)$ en $\mathbb{K}[X]$ verificando

$$(f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}\cdot p(f)+b(f)\cdot q(f)=\mathbb{I}_V. \tag{3.12}$$

Si v es cualquier elemento de V entonces

$$(f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(p(f)(v))+b(f)(q(f)(v))=v.$$

Como $v_2=(f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(p(f)(v))\in V_2$ y $v_1=b(f)(q(f)(v))\in V_1$, se deduce la primera afirmación de la proposición.

Si $v\in V_1\cap V_2$ entonces $(f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(v)=\mathbf{0}$ y $b(f)(v)=\mathbf{0}$. Teniendo en cuenta 3.12, se obtiene

$$v=p(f)((f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(v))+q(f)(b(f)(v))=\mathbf{0}$$

y $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.

Si $v\in V_1$ entonces

$$f((f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(v))=\mathbf{0}=(f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(f(v)),$$

y, por tanto, $f(v)\in V_1$. La f-invarianza de V_2 se prueba de forma análoga.

Sean $m_{f_1}(X)$ y $m_{f_2}(X)$ los polinomios mínimos de f_1 y f_2 respectivamente. Si $v\in V_1$ entonces

$$(f-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(v)=(f_1-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}(v)=\mathbf{0}.$$

Es decir, el endomorfismo $(f_1-\alpha_1\mathbb{I})^{s_1}$ definido en V_1 es el endomorfismo nulo y, como consecuencia, $m_{f_1}(X)$ es un divisor de $(X-\alpha_1)^{s_1}$. De forma similar se deduce que $m_{f_2}(X)$ es un divisor de $b(X)$ y, por tanto, $m_{f_1}(X)\cdot m_{f_2}(X)$ divide a $m_f(X)$.

Sea $v=v_1+v_2$ un elemento cualquiera de V con $v_1\in V_1$ y $v_2\in V_2$. Entonces:

$$(m_{f_1}(f)\cdot m_{f_2}(f))(v)=(m_{f_2}(f)\cdot m_{f_1}(f))(v_1)+(m_{f_1}(f)\cdot m_{f_2}(f))(v_2)=$$

$$=m_{f_2}(f)(m_{f_1}(f)(v_1))+m_{f_1}(f)(m_{f_2}(f)(v_2))=$$

$$=m_{f_2}(f)(m_{f_1}(f_1)(v_1))+m_{f_1}(f)(m_{f_2}(f_2)(v_2))=$$

$$=m_{f_2}(f)(0)+m_{f_1}(f)(0)=0$$

Lo anterior muestra que $m_{f_1}(f)\cdot m_{f_2}(f)$ es el endomorfismo nulo sobre V y que el polinomio mínimo de f es un divisor de $m_{f_1}(X)\cdot m_{f_2}(X)$.

Se tiene entonces

$$(X-\alpha_1)^{s_1}\cdot b(X)=m_{f_1}(X)\cdot m_{f_2}(X)$$

por dividirse mutuamente y ser ambos mónicos. Como ya se había probado antes que $(X-\alpha_1)^{s_1}$ es un múltiplo de $m_{f_1}(X)$ y que $b(X)$ lo es de $m_{f_2}(X)$, quedan demostradas las igualdades establecidas en el cuarto punto.

Si en V se considera una base $\mathcal{B}$ donde los d primeros vectores constituyen una base de V_1 y los últimos $n-d$ constituyen una base de V_2 entonces la matriz asociada a f es una matriz

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

donde:

- A_1 es una matriz $d \times d$ correspondiente al endomorfismo f_1 de V_1 con polinomio característico $P_{A_1}(X) = (X - \alpha_1)^d$ $(s_1 \leq d)$.

- A_2 es una matriz $(n-d) \times (n-d)$ correspondiente al endomorfismo f_2 de V_2 con polinomio característico un múltiplo de $b(X)$.

El polinomio característico de A,

$$P_A(X) = (X - \alpha_1)^{r_1} \cdot (X - \alpha_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_l)^{r_l},$$

es el producto de $P_{A_1}(X)$ y de $P_{A_2}(X)$, polinomios primos entre si. Esto implica que:

$$P_{A_1}(X) = (X - \alpha_1)^{r_1} \quad \text{y} \quad P_{A_2}(X) = (X - \alpha_2)^{r_2} \ldots (X - \alpha_l)^{r_l}.$$

Se concluye finalmente que $\dim(V_1) = d = r_1$. ■

Corolario 3.3.1
Sea f un endomorfismo de V con polinomio característico

$$P_f(X) = (X - \alpha_1)^{r_1} \cdot (X - \alpha_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_l)^{r_l}$$

y con polinomio mínimo

$$m_f(X) = (X - \alpha_1)^{s_1} \cdot (X - \alpha_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_l)^{s_l}$$

siendo $1 \leq s_i \leq r_i$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$.

1. *$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_l$ siendo $V_i = \ker(f - \alpha_i)^{s_i}$ un subespacio f-invariante cuya dimensión es r_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$.*

2. *f es diagonalizable si y sólo si $s_i = 1$ para todo i, esto es, si y sólo si el polinomio mínimo es*

$$m_f(X) = (X - \alpha_1) \cdot (X - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_l).$$

Para mostrar que el resultado de la proposición anterior es en parte generalizable al caso de tener un endomorfismo f cuyo polinomio mínimo sea de la forma $m_f(X) = a(X) \cdot b(X)$ donde $a(X)$ y $b(X)$ son polinomios primos entre si (con todas sus raíces o no en el cuerpo $\mathbb{K}$), se presenta siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3.3
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico y el polinomio mínimo de f coinciden y son $(X-2)(X^2+1)$. Si se denota $a(X) = (X-2)$ y $b(X) = (X^2+1)$, $V_1 = \ker(a(f))$ y $V_2 = \ker(b(f))$, puede probarse que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ y que V_1 y V_2 son f-invariantes. Esto último asegura que la matriz asociada a f respecto de la base de $\mathbb{R}^3$ determinada por las bases de V_1 y V_2 es diagonal por cajas.

3.3.1 Ejercicios

Ejercicio 3.3.1.1
Dar cuatro subespacios invariantes por la aplicación p del ejercicio 3.2.1.5.

Ejercicio 3.3.1.2
Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica la siguiente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comprobar que el polinomio característico de f es $p_f(X) = X(X^2 + 1)$.
2. Determinar $\ker(f)$ y $\ker(f^2 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Probar que los subespacios anteriores son f-invariantes.
4. Comprobar que $\ker(f) = \mathrm{im}(f^2 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3})$ y $\mathrm{im}(f) = \ker(f^2 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3})$.

Ejercicio 3.3.1.3
Construir un endomorfismo f de $V = \mathbb{R}^5$ tal que los subespacios

$$U = \langle \{u_1 = (1, 1, 1, 1, 0), u_2 = (-1, -1, -1, -1, -1)\} \rangle$$

$$W = \langle \{w_1 = (1, 1, 1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 1, 0, 0), w_3 = (0, 0, -1, 0, 0)\} \rangle$$

sean f-invariantes y la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ no sea de vectores propios.
Escribir la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 3.3.1.4
Sea f el endomorfismo de $V = \mathbb{R}_3[X]$ que a cada polinomio le asocia su polinomio derivado.

1. Probar que $V_1 = \mathbb{R}_2[X]$ es un subespacio f-invariante de $V = \mathbb{R}_3[X]$.
2. Sea f_1 la restricción de f a $V_1 = \mathbb{R}_2[X]$. Determinar el polinomio característico y el polinomio mínimo de f_1.

3.4 Endomorfismos nilpotentes. Forma canónica de Jordan

En la determinación de una base de un espacio vectorial respecto de la cuál un endomorfismo dado venga expresado por una matriz “casi–diagonal”, se hace uso de ciertos endomorfismos denominados nilpotentes, concepto que introduciremos después de las siguientes observaciones:

- Si f es un endomorfismo de V, $\ker(f^r) \subset \ker(f^{r+s})$ si $0 \leq s$.
- Existen endomorfismos cuyo polinomio característico es de la forma X^n, lo que conlleva que una potencia de dicho endomorfismo sea la aplicación nula: El endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ definido por $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, f(e_4) = 0$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es X^3.
- Si un endomorfismo f tiene polinomio mínimo $(X - \alpha)^s$, el endomorfismo $g = f - \alpha\mathbb{I}$ tiene por polinomio mínimo X^s.

Definición 3.4.1
Un endomorfismo $f : V \to V$ se dice nilpotente de índice l si su polinomio mínimo es X^l.

En los siguientes ejemplos se aborda este concepto.

Ejemplo 3.4.1

- El endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ definido por $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, f(e_4) = 0$ es nilpotente de índice 3.
- La matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
define en $\mathbb{R}^3$ un endomorfismo nilpotente de índice 3.
- Si f es un endomorfismo nilpotente de índice l entonces existe un vector $v \in V$ tal que $v \notin \ker(f^{l-1})$. También en este caso se verifica que $Im(f^{l-1}) \subset \ker(f)$

A continuación vamos a tratar de describir los métodos que permiten hallar las formas canónicas de Jordan para matrices 2×2 y 3×3, o lo que es equivalente, para endomorfismos definidos sobre espacios de dimensión 2 o 3. En todos los casos se supondrá que el polinomio característico tiene todas sus raíces sobre el cuerpo base.

En una primera aproximación, señalemos que una matriz (a_{ij}) se dice que tiene forma de Jordan si verifica: $a_{ij} = 0$ si $j \neq i, i+1$, y $a_{ii+1} = 0$ o 1 (los elementos de la diagonal principal serán, como es obvio, los autovalores correspondientes). Es claro que la forma de Jordan de un endomorfismo diagonalizable es precisamente su forma diagonal.

Caso 1. $f : V \to V$ **con** $\dim(V) = 2$

1. Si $P_f(X) = (X-\alpha)(X-\beta) = m_f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$, f es diagonalizable y sabemos que la base "buena" es la de vectores propios.
2. Si $P_f(X) = (X-\alpha)^2$, puede suceder que
   (a) $m_f(X) = (X-\alpha)$ en cuyo caso $f = \alpha\mathbb{I}$ y no hay nada que hacer, o bien
   (b) $m_f(X) = (X-\alpha)^2$. En esta situación $V = \ker(f-\alpha\mathbb{I})^2$, y $g = f - \alpha\mathbb{I}$ es nilpotente de índice 2. Se puede elegir entonces un vector $v \in V$ tal que $v \notin \ker(g)$. El conjunto
$$\mathcal{B} = \{g(v), v\}$$
es una base de V (su independencia basta por ser $\dim(V) = 2$):
$$ag(v) + bv = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad ag^2(v) + bg(v) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad b = 0 \text{ (puesto que } g^2(v) = \mathbf{0} \text{ y } g(v) \neq \mathbf{0}) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$
Entonces:
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\alpha\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
es la forma de Jordan de f.

Caso 2. $f : V \to V$ **con** $\dim(V) = 3$

1. Si $P_f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\delta) = m_f(X)$, f es diagonalizable.

2. Si $P_f(X) = (X-\alpha)^2(X-\beta)$, puede suceder que

   (a) $m_f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$, y siendo así f es diagonalizable.

   (b) $m_f(X) = (X-\alpha)^2(X-\beta)$. En esta situación consideramos los subespacios f-invariantes, y suplementarios, $V_1 = \ker(f-\alpha\mathbb{I})^2$, y $V_2 = \ker(f-\beta\mathbb{I})$. La dimensión de V_1 es 2, y se puede actuar en él, teniendo en cuenta el endomorfismo f_1 restricción de f, como se hacía en el punto 2b del caso 1. Si
   $$\mathcal{B} = \{g(v), v, w\}$$
   ($v \in V_1$ pero $v \notin \ker(f_1 - \alpha\mathbb{I})$, y $w \in V_2$) entonces
   $$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$
   es la forma de Jordan de f.

3. Si $P_f(X) = (X-\alpha)^3$, pueden aparecer las siguientes situaciones:

   (a) $m_f(X) = (X-\alpha)$, caso trivial por cuanto $f = \alpha\mathbb{I}$.

   (b) $m_f(X) = (X-\alpha)^2$. El endomorfismo $g = f - \alpha\mathbb{I}$, es nilpotente de índice 2. Se puede elegir entonces un vector $v \in V$ tal que $v \notin \ker(g)$, y un vector $w \in \ker(g) - \mathrm{Im}(g)$ (puesto que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(g)$ pero no coinciden por ser $3 = \dim(V)$, un número impar). Un razonamiento en la linea del realizado en el punto 2b del caso 1 prueba que el conjunto
   $$\mathcal{B} = \{w, g(v), v\}$$
   es base de V y que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) =$
   $$= \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\alpha\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
   es la forma de Jordan de f.

   (c) $m_f(X) = (X-\alpha)^3$. Ahora $g = f - \alpha\mathbb{I}$, es nilpotente de índice 3, lo que nos permite hallar un vector $v \in V$ tal que $v \notin \ker(g^2)$. La demostración de que
   $$\mathcal{B} = \{g^2(v), g(v), v\}$$
   es base de V, sigue un esquema similar al ya usado en 2b (dentro del caso 1) y, en este caso, $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) =$
   $$= \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\alpha\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
   es la forma de Jordan de f.

El estudio anterior cubre, como es obvio, todos aquellos casos de endomorfismos, sobre espacios de dimensión ≥ 3, en los que las raíces del polinomio característico tienen a lo sumo multiplicidad 3. Con el siguiente ejemplo se da una idea del método que se emplea de forma general para obtener la forma de Jordan de una matriz.

Ejemplo 3.4.2
Consideremos $V = \mathbb{R}^7$ y f el endomorfismo definido, respecto de la base canónica, por la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & -3 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & -6 & 5 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & 5 & -6 & 5 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y su polinomio mínimo son

$$P_f(X) = (X+3)^2(X-2)^5 \quad \text{y} \quad m_f(X) = (X+3)^2(X-2)^3.$$

Sean

$$V_1 = \ker((f+3\mathbb{I})^2) \quad \text{y} \quad V_2 = \ker((f-3\mathbb{I})^3)$$

los subespacios f-invariantes cuyas bases respectivas son:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0,0,0,-1,0), (0,0,0,0,0,1,1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1,0,0,0,0), (0,0,0,0,1,0,0),$$
$$(-1,1,0,0,0,0,0), (-1,0,0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0,1,1)\}$$

La aplicación f_1 restricción de f a V_1 tiene el tratamiento visto en 2b del caso 1. Respecto de la base

$$\mathcal{B'}_1 = \{(1,0,0,0,0,0,1), (1,0,0,0,0,-1,0)\}$$

de V_1 la forma de Jordan de f_1 es

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B'}_1}(f_1) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si f_2 es la restricción de f a V_2 y $g = f_2 - 2\mathbb{I}$ (nilpotente de índice 3) entonces se procede de la siguiente manera:

- Se elige un vector $v \in V_2$, y se van calculando $g(v)$, $g^2(v)$, ... hasta obtener el vector nulo. Si $v = (-1,1,0,0,0,0,0)$ entonces $g(v) = (1,0,0,-1,0,0,0)$ y $g^2(v) = \mathbf{0}$ y los vectores v y $g(v)$ son linealmente independientes.

- A continuación se escoge un vector $w \in V_2$, linealmente independiente con v y $g(v)$; por ejemplo $w = (0,0,0,0,1,0,0)$ y se van obteniendo $g(w)$, $g^2(w)$, ... hasta obtener el vector nulo. En este caso, $g(w) = (-3,0,-3,1,-1,1,1)$, $g^2(w) = (2,0,2,2,2,2,2)$ y $g^3(w) = \mathbf{0}$ y los vectores v, $g(v)$, w, $g(w)$ y $g^2(w)$ son linealmente independientes

- Los vectores $\{g(v), v, g^2(w), g(w), w\}$ forman una base, $\mathcal{B}'_2$, de V_2 tal que:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_2}(f_2) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_2}(g) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}'_2}(2\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  es la forma de Jordan de f_2.

Se obtiene así la base de $\mathbb{R}^7$

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0,0,0,1), (1,0,0,0,0,-1,0), (1,0,0,-1,0,0,0), (-1,1,0,0,0,0,0),$$
$$(2,0,2,2,2,2,2), (-3,0,-3,1,-1,1,1), (0,0,0,0,1,0,0)\}$$

tal que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es la forma de Jordan de f.

El resultado general no va a ser más que enunciado y se hace en los términos siguientes:

Proposición 3.4.1
Sea f un endomorfismo de V de polinomio característico

$$P_f(X) = (X-\alpha_1)^{r_1} \cdot (X-\alpha_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_l)^{r_l}$$

y de polinomio mínimo

$$m_f(X) = (X-\alpha_1)^{s_1} \cdot (X-\alpha_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_l)^{s_l}$$

siendo $1 \leq s_i \leq r_i$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Entonces:

1. *Para cada subespacio f-invariante $V_i = \ker(f-\alpha_i)^{s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, existe una base $\mathcal{B}_i$ (con r_i vectores) respecto de la cuál el endomorfismo restricción de f a V_i tiene por matriz J_{α_i}, donde los elementos de la diagonal principal son todos iguales a α_i, los de los lugares $(j, j+1)$ son cero o uno y el resto todos iguales a cero.*

2. *La matriz asociada a f respecto de la base*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_l$$

   de V es una matriz diagonal por cajas. Las cajas son respectivamente J_{α_1}, J_{α_2}, $\ldots$, J_{α_l}.

3. *La matriz por cajas obtenida en 2. recibe el nombre de matriz de Jordan de f, y es única salvo "reordenación" de los elementos (j, j) y $(j, j+1)$.*

Es inmediato que en términos de matrices el enunciado precedente se expresa diciendo que toda matriz A (de tamaño $n \times n$ con $P_A(X)$ y $m_A(X)$ como los de la proposición anterior) es semejante a una matriz por cajas como la detallada en el último punto 2.

Ejemplo 3.4.3
Este ejemplo tiene como próposito el avisar sobre una cuestión que a veces puede llevar a errores.
Si el lector revisa detenidamente los casos que aparecen cuando se determina la forma de Jordan de una matriz 3×3, podrá observar lo siguiente. Si dos matrices tienen igual polinomio característico y el número de $1's$ y $0's$ por encima de dicha diagonal coinciden, las matrices son semejantes. Pues la advertencia es que este hecho no es generalizable cuando el tamaño de las matrices aumenta, como se muestra mediante las matrices dadas a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es obvio que las matrices A y B tienen el mismo polinomio característico y el mismo número de $1's$ y $0's$ por encima de dicha diagonal, sin embargo los polinomios mínimos son diferentes: $m_A(X) = X^3$ y $m_B(X) = X^4$, de donde se desprende que A y B no son semejantes. ∎

3.4.1 Ejercicios

Ejercicio 3.4.1.1
Dar una matriz A de tamaño 3×3 y una matriz 4×4 con coeficientes reales tales que ambas sean nilpotentes de índice 2.

Ejercicio 3.4.1.2
Se consideran las aplicaciones f y f_1 del ejercicio 3.3.1.4. ¿Son endomorfismos nilpotentes? ¿De qué índices?

Ejercicio 3.4.1.3
Sean f_i con $i = 1, \cdots, 6$ los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que, respecto de la base canónica, tienen asociadas respectivamente las matrices A_i $(i = 1, \cdots, 6)$ siguientes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinar el polinomio característico y el polinomio mínimo de cada f_i.

2. Hallar para cada f_i una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f_i sea de Jordan.

3. Establecer la forma de Jordan de cada uno de los endomorfismos anteriores.

Ejercicio 3.4.1.4
Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V de dimensión 5 tal que U y W son subespacios f-invariantes de V de dimensiones 3 y 2 respectivamente. Sean f_U y f_W las restricciones de f a U y W respectivamente. Supongamos que el polinomio característico de f tiene dos raices distintas, y que los polinomios mínimos de f_U y f_W son iguales.

1. ¿Es verdadero o falso que en ese caso la forma de Jordan de f es diagonal?
2. Construir un endomorfismo f de $\mathbb{C}^5$ con las características señaladas, indicando cuáles son los subespacios f-invariantes.

Ejercicio 3.4.1.5
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que está definido, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar el polinomio característico y el polinomio mínimo de f
2. Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea de Jordan. ¿Cuál es dicha matriz de Jordan?

Ejercicio 3.4.1.6
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y cuál es falsa?

1. Si respecto de una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f es de la forma

   $$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   y f es diagonalizable, entonces el polinomio mínimo de f es $m_f(X) = (X-1)(X+1)$ y $a = 0$.
2. Si f tiene dos autovalores distintos y $\dim(\ker(f)) = 2$, entonces f es diagonalizable.
3. Si respecto de bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f es

   $$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   y g es otro endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

   $$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   entonces la forma de Jordan del endomorfismo $g \circ f$ es

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Cálculo aproximado de autovalores

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$P_A(X) = X^4 + X^2 + X + 2$$

Las soluciones de la ecuación $P_A(X) = 0$ son dificilmente expresables de forma exacta y por lo tanto la única posibilidad en este momento es aproximarlas. Para este caso particular se obtiene que hay cuatro autovalores (complejos) cuyas aproximaciones son

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = -0.574 - 0.678i & \alpha_2 = -0.574 + 0.678i \\ \alpha_3 = 0.574 - 1.483i & \alpha_4 = 0.574 + 1.483i \end{array}$$

En general, la aproximación de los autovalores mediante el cálculo de las soluciones del polinomio característico a través de un método numérico es altamente arriesgado ya que en muchas aplicaciones prácticas los coeficientes de la matriz A se conocen de forma aproximada y estamos acumulando dos tipos de errores: los que aparecen al calcular $P_A(X)$ y los que origina la aproximación de las soluciones de la ecuación $P_A(X) = 0$.

Uno de los métodos más usados en la práctica para el cálculo aproximado de autovalores es el método de la potencia. Sea A una matriz de orden n y supongamos que todos sus autovalores, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, son reales, distintos y sea α_1 el autovalor verificando

$$|\alpha_i| \leq |\alpha_1|, \qquad 2 \leq i \leq n$$

Sea u_i el autovector asociado al autovalor α_i y consideremos $x_1, \ldots, x_n$ números reales arbitrarios. Entonces:

$$\begin{aligned} A \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j u_j \\ A^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 x_j u_j \\ &\vdots \\ A^k \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k x_j u_j \end{aligned}$$

Si ponemos

$$X_0 = \sum_{j=1}^{n} x_i u_i, \qquad X_k = A^k \cdot X_0$$

entonces (si $\alpha_1 \neq 0$)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{X_k}{\alpha_1^k} = x_1 u_1$$

Consideremos el siguiente esquema para $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

- $Y_{k+1} = A \cdot X_k$,
- β_{k+1} =mayor coordenada de Y_{k+1} en valor absoluto, y

- $X_{k+1} = \dfrac{Y_{k+1}}{\beta_{k+1}}$.

La sucesión X_k sigue teniendo como límite un múltiplo de u_1, γu_1, y por ello la sucesión Y_k tiene como límite $\alpha_1(\gamma u_1)$. Como

$$Y_k = \beta_k X_k \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1(\gamma u_1) = (\lim_{k\to\infty} \beta_k)(\gamma u_1)$$

se concluye que β_k tiende a α_1 y que X_k tiene como límite u_1. Hemos obtenido entonces una aproximación al primer autovalor y al primer autovector. (**¿Como se calcularía α_2?**).

3.6 Problemas de la Teoría del Endomorfismo

Problema 3.6.1
Sea $f : V \to V$ un endomorfismo cuyos autovalores son -1, 0 y 1, con autovectores asociados v_1, v_2, v_3 respectivamente. Encontrar un vector v tal que $f(v) = v_1 + v_3$. ¿Existirá un vector v tal que $f(v) = v_1$?

Problema 3.6.2
Utilizando matrices cuadradas de tamaños $2\times 2, 3\times 3, 4\times 4$. Descubre la relación entre el determinante de la matriz, la suma de los valores propios, ... y los coeficientes de su polinomio característico.

Problema 3.6.3
Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Un subespacio W de V se dice invariante por f ó f–invariante si $f(W)$ está contenido en W.

a) Demuestra que $\{\mathbf{0}\}$ y V son subespacios invariantes por f.

b) Sea W un subespacio de V de dimensión 1. Demuestra que W es f–invariante si y sólo si W está generado por un vector propio.

c) Demuestra que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por el endomorfismo de matriz $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ son $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbb{R}^2$.

Problema 3.6.4
Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial.

a) Demuestra que si V es de dimensión impar, para todo endomorfismo de V existe un vector propio.

b) Si V es de dimensión par, y f es un endomorfismo de V con determinante negativo, demuestra que f tiene al menos dos valores propios reales.

Problema 3.6.5
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$.

a) Si v y w son autovectores de f asociados a autovalores distintos, demuestra que $av+bw$ $(a, b \neq 0)$ no es vector propio de f.

b) Si cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ es vector propio de f, demuestra que $f = \alpha\mathbb{I}$ (con α un cierto número real e $\mathbb{I}$ la aplicación identidad en $\mathbb{R}^n$).

Problema 3.6.6
Respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, calcula la matriz del endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ caracterizado por verificar:

a) $(1, 1, 1, 1)$ es un vector propio de valor propio -4.

b) $\ker(f) = \langle\{(1, 2, 3, 4), (1, -4, 0, 1)\}\rangle$

c) $f(3, 2, 1, 2) = (8, 4, -2, 1)$.

Problema 3.6.7
Halla los autovalores y los subespacios propios del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que, respecto la base canónica, tiene asociada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Analiza si f es diagonalizable.

Problema 3.6.8
Halla los autovalores y los subespacios propios del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que, respecto la base canónica, tiene asociada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analiza si f es diagonalizable.

Problema 3.6.9
Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 4, y sea f un endomorfismo de V que en cierta base dada tiene por matriz a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla los autovalores y los subespacios propios de f y comprueba si es diagonalizable.

Problema 3.6.10
Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3, en el que se considera una base $\mathbb{B} = \{v, w, u\}$. De un endomorfismo f de V se sabe que:

- $f(6v + 2w + 5u) = 6v + 2w + 5u$ y la traza de la matriz A de f en la base $\mathbb{B}$ es igual a 5.
- $U = \{(x, y, z) \colon 2x + 11y - 7z = 0\}$ es un subespacio propio de f.

Halla la matriz de f en la base $\mathbb{B}$ y los autovalores de f.

Problema 3.6.11

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que respecto de la base canónica tiene por matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

¿Bajo qué condiciones es f diagonalizable?

Problema 3.6.12

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que $f^2 = f$. Demuestra que f es diagonalizable y halla sus vectores propios.

Problema 3.6.13

Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes reales. Dicha matriz A puede considerarse como asociada a un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ (como $\mathbb{R}$–espacio vectorial) o a un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ (como $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

a) Da un ejemplo de matriz real 4×4 que sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ y no sobre $\mathbb{R}$.

b) Da un ejemplo de matriz real 4×4 que no sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$. ¿Lo será sobre $\mathbb{R}$?

c) Demuestra que toda matriz real 3×3 cuyo polinomio característico tenga una sola raiz real es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

Problema 3.6.14

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ del que se sabe lo siguiente:

a) f es diagonalizable y sólo tiene dos autovalores distintos.

b) Si $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$ y $V = \langle\{(1, 0, 1), (-1, 1, 1)\}\rangle$, $f(U) = V$.

c) Un valor propio de f es -1 y uno de sus vectores propios pertenece a U.

d) $(1, 0, -1)$ es un vector propio de f, y está asociado a un autovalor simple.

Halla la matriz A asociada a f respecto de la base canónica, en función de cuántos parámetros sea preciso.

Problema 3.6.15

Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión 125 y f un endomorfismo de V no inyectivo tal que $f^3 = 196f$. Sean $M_f(X)$ y $P_f(X)$ el polinomio mínimo y el polinomio característico de f respectivamente. Justifica cada una de las siguientes implicaciones:

$$f^3 = 196f \quad \Rightarrow \quad M_f(X) \text{ es un divisor de } X(X-14)(X+14) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P_f(X) = X^r(X-14)^s(X+14)^t \ , 1 \leq r,\ 0 \leq s,\ 0 \leq t \ , r+s+t = 125 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ker(f),\ \ker(f - 14\mathbb{I}_V),\ \ker(f + 14\mathbb{I}_V) \text{ tienen resp. dimensiones } r, s, t \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Existe $\mathbb{B}$ base de V tal que $M_{\mathbb{B}}(f)$ es diagonal con 0's, 14's y (-14)'s en la diagonal principal.

Problema 3.6.16

Dí, razonadamente, si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ y $P_A(X) = X(X-1)(X-2)^2$ entonces A tiene rango 2.

b) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$. Se sabe que $\dim \ker(f - 3I) > 1$ y que $\operatorname{mcd}\{M_f(X), (X-5)(X-4)^2\}$ tiene dos raices distintas. En esas condiciones f es diagonalizable.

c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = \mathbb{I}_n$ entonces A es diagonalizable.

d) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X+1)$, entonces f es diagonalizable.

e) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X-1)$, entonces f es la aplicación nula, es la aplicación identidad o bien existen subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que f coincide con la proyección sobre U en la dirección de W.

Problema 3.6.17

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtén el polinomio característico y los valores propios de A.

b) Da bases de los subespacios de vectores propios relativos a A. ¿Es f diagonalizable? ¿Quién es el polinomio mínimo de f?

Problema 3.6.18

Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe:

- El polinomio característico tiene todas sus raices reales pero sólo dos son distintas.
- $\ker(f) = \langle\{e_1 + e_2, e_4\}\rangle$, $f(e_3) = 2e_3$ y $e_1 - e_2$ es vector propio.

Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Es f diagonalizable? ¿Cuál es el polinomio característico de f?

b) Determina la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

Problema 3.6.19

Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe $\ker(f) = \langle\{e_2 + e_4\}\rangle$, $f(e_1) = e_2$ y $f(e_2) = e_1$

a) Demuestra que $e_1 - e_2$ y $e_1 + e_2$ son vectores propios.

b) Si 2 fuese raiz del polinomio característico de f, ¿podríamos afirmar que f es diagonalizable?

c) Supongamos que $f(0,0,1,1) = (1,-1,0,1)$. Escribe la matriz asociada a f respecto de la base canónica. ¿Es f diagonalizable en este caso?

Problema 3.6.20
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$i)$ f^2es la aplicación nula $\qquad$ $ii)$ $f(1,1,1) = (0,1,1)$ $\qquad$ $iii)$ $(0,0,1) \in Ker(f)$

1. Halla bases de $Ker(f)$ y de $Im(f)$ probando previamente que $Im(f) \subset Ker(f)$.
2. ¿Existen bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? En caso afirmativo, calcula dichas bases.
3. Determina el polinomio característico de f. ¿Es f diagonalizable?

Problema 3.6.21
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 7, y U y W dos subespacios de V tales que $V = U \oplus W$ con $dim(U) = 4$. Si $p : V \to V$ es la aplicacion proyección sobre U en la dirección de W, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Existe una base $\mathcal{B}$ de V respecto de la cuál la matriz asociada a p es

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $rango(f) = dim(U)$
3. El polinomio característico de p es $(X-1)^4X^3$, y el polinomio mínimo es $(X-1)X$.

Problema 3.6.22
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x,y,z,t) = (x-y, z-t, x-y+z-t)$$

1. Determina bases de $Ker(f)$ y de $Im(f)$.

2. Halla bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ para las que
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
siendo I_r la matriz identidad de tamaño $r \times r$ y los $0's$ matrices nulas de tamaños adecuados.

3. ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación?: Existen bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}'_1$ de $\mathbb{R}^3$ tal que
$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que
$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son las bases del segundo apartado. ¿Es la aplicación $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizable?

Problema 3.6.23

Blancanieves distribuyó 3 litros de leche a los siete enanitos. A continuación el primero de ellos distribuyó el contenido de su taza de modo uniforme a las otras seis tazas, después el segundo hizo lo mismo, y así sucesivamente. Cuando el séptimo enanito hubo realizado la misma operación, se pudo comprobar que cada uno de los enanos tenía exactamente la misma cantidad de leche en su taza que al comienzo. ¿Cuál fue la distribucón inicial de leche? Esta es la pregunta a la que se debe responder y para lo que se va a seguir el siguiente procedimiento.

1. Identifiquemos cada distribución inicial de leche con un vector v de $\mathbb{R}^7$, $v = (x_1, \cdots, x_7)$, donde cada x_k denota la cantidad de leche en la taza k. La distribución realizada por cada uno de los enanitos puede ser interpretada como una aplicación lineal t_k, $(k = 1, \cdots, 7)$ de $\mathbb{R}^7$ en sí mismo. Describe cada t_k por la matriz T_k asociada respecto de la base canónica.

2. Explica por qué el problema queda resuelto hallando un vector u de $\mathbb{R}^7$,$u = (a_1, \cdots, a_7)$, tal que $t(u) = u$ con $t = t_7 \circ \cdots \circ t_1$ y $\sum_{k=1}^{7} a_k = 3$.

3. Mediante las instrucciones que aparecen en el primero de los cuadros siguientes puedes realizar el cálculo efectivo del vector u del apartado anterior utilizando `Maple`.

4. En este apartado se da un método alternativo para el cálculo del vector u.

   - Sea $p : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ la aplicación lineal definida por la matriz (respecto de la base canónica) $P = (p_{ij})$ donde $p_{71} = 1$, $p_{i,i+1} = 1$ y $p_{ij} = 0$ en el resto de los casos. ¿Qué efecto produce sobre las tazas la matriz P? Determina $A = P \cdot T_1$ y describe el efecto producido al aplicar siete veces consecutivas el endomorfismo s de $\mathbb{R}^7$ definido por A (es decir, el efecto producido por s^7). ¿El procedimiento s^7 y el procedimiento original, t, tienen el mismo efecto? ¿Calcular el vector u del segundo apartado es equivalente a calcular un vector $u \in ker(s^7 - \mathbb{I})$ con $\sum_{k=1}^{7} a_k = 3$? Para dar respuesta a esto, ayúdate de `Maple` (segundo cuadro)

- En el ejercicio 3.1.1.10 se probó que :
  (a) El polinomio característico de A es $p_A(X) = \frac{1}{6}X(7X^6 - r(X))$ siendo $r(X) = X^6 + X^5 + \cdots + X^2 + X + 1$, y $r(\alpha) \neq 0$ donde α es cualquier valor propio de A
  (b) La matriz $A^6 + A^5 + \cdots + A^2 + A + \mathbb{I}$ es inversible.
  (c) $ker(s^7 - \mathbb{I}) = ker(s - \mathbb{I}) = \langle\{(6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)\}\rangle$,
  lo que reuelve también el problema.

Este ejercicio aparece, sin las aplicaciones de `Maple`, en el libro `Abstract Algebra with Applications` de `Karlheinz Spindler`.

Problema 3.6.24
Un inversor desea abrir tres cuentas A_1, A_2 y A_3 con cantidades iguales. Dichas cuentas tienen una ganancia anual del 6%, 8% y 10% respectivamente. Al final de cada año la póliza del inversor invierte 1/3 del dinero ganado en A_2 y 2/3 del dinero ganado en A_3 en A_1, y 1/3 del dinero ganado en A_3 en A_2.

1. Escribe el sistema de ecuaciones que representa la cantidad invertida en cada cuenta después de n años.
2. Expresa la cantidad de dinero de cada cuenta en el año n en términos de la cantidad invertida inicialmente en cada cuenta.
3. Estimar el número de años para conseguir en A_1 una cantidad doble a la inicial.

Este ejercicio aparece en el libro `Interactive Linear Algebra with MAPLE V` de `Deeba/Gunawardena`.

Problema 3.6.25
Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la misma se represente mediante la forma canónica de Jordan.

Problema 3.6.26
Sea $V = \mathbb{C}^3$ y $f : V \to V$ una aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica de V es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular polinomios característico y mínimo de f. ¿Es f diagonalizable?

b) Determina la descomposición de V como suma directa de subespacios f-invariantes de acuerdo con la descomposición del polinomio mínimo obtenida en a).

c) A partir de la descomposición de V obtenida en la parte b), determina una base $\mathbb{B}$ de V tal que la matriz de f respecto de $\mathbb{B}$ esté en la forma de Jordan.

Problema 3.6.27
Halla las formas canónicas de Jordan de las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & -2 \end{pmatrix}$$

para los distintos valores de los parámetros a, b y c.

Problema 3.6.28
Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a f cuando en $\mathbb{R}^4$ se considera la base canónica y $(X-2)^2(X+1)^2$ el polinomio característico de f.

a) Determina el polinomio mínimo de f.

b) Calcula base y dimensión de los subespacios $V_1 = \ker((f - 2\mathbb{I})^2)$ y $V_2 = \ker(f + \mathbb{I})$ de $\mathbb{R}^4$.

c) Comprueba que $f(V_1) \subset V_1$ y determina la forma de Jordan del endomorfismo $b : V_1 \to V_1$ siendo $b(w) = f(w)$.

Problema 3.6.29
Obtén las formas de Jordan de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 3.6.30
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ donde la matriz asociada a f respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Son subespacios f-invariantes $U = \langle\{e_1\}\rangle$, $W = \langle\{e_2, e_3\}\rangle$ y $T = \langle\{e_4\}\rangle$?

b) Da una base de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea la forma canónica de Jordan. ¿Cómo es dicha matriz?

Problema 3.6.31
Si la forma de Jordan de una matriz A es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

¿quién es $\dim \ker(A - 4\mathbb{I}_5)$?

Problema 3.6.32
Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que los subespacios $U = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, $W = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$, $T = \langle\{e_5\}\rangle$ son subespacios f–invariantes.

b) Sea f_U la restricción de f al subespacio U. ¿Cuál es la matriz asociada a f_U respecto $\{e_1, e_2\}$? Calcula una base de U respecto de la cual la matriz asociada a f_U tenga la forma canonica de Jordan.

c) Sin hacer más cálculos que los ya realizados, da una base de $\mathbb{R}^5$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea la forma canónica de Jordan.

d) ¿Cuál es el polinomio mínimo de f? ¿Cuál es la dimensión del espacio fundamental asociado al valor propio 1?

Problema 3.6.33
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea la forma canónica de Jordan. Da la matriz de Jordan asociada a f.

b) Sea $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

siendo A la matriz de arriba y 0 la matriz nula 3×3. Con ayuda de los apartados anteriores, determinar

- una base de $\mathbb{R}^6$ respecto de la cuál la matriz asociada a h sea la forma canónica de Jordan,
- la matriz de Jordan asociada a h, y
- el polinomio característico, el polinomio mínimo de h y $\dim \ker(h - 2\mathbb{I})$.

Problema 3.6.34

Sea $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ un endomorfismo y $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^6$. La matriz asociada a f respecto de B es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que los subespacios $U = \langle\{e_1, e_4, e_6\}\rangle$, $W = \langle\{e_2, e_5\}\rangle$, y $T = \langle\{e_3\}\rangle$ son f - invariantes.

b) Halla la matriz asociada a f respecto de la base $B_1 = \{e_1, e_4, e_6, e_2, e_5, e_3\}$.

c) Determina una base B_2 de $\mathbb{R}^6$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea de Jordan. Da dicha matriz.

d) Calcula el polinomio característico y el polinomio mínimo de f.

Problema 3.6.35

Sea A una matriz real 18×18 tal que $3A^2 + 2A + I = (0)$, donde I es la matriz identidad 18×18 y (0) es la matriz nula 18×18.

a) Comprueba que A es regular hallando su inversa.

b) ¿Quién es el polinomio mínimo de A? Determina el polinomio característico de A.

Problema 3.6.36
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que

- $f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$
- $f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$
- $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$

Se pide:

1. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
2. Obtener los subespacios de vectores propios asociados a f y decidir si f es o no diagonalizable.

Problema 3.6.37
Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo y M su matriz asociada respecto de la base canónica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Teniendo en cuenta la matriz M, mostrar dos subespacios U y W de $\mathbb{R}^5$ f-invariantes y tales que $\dim U = 3$ y $\dim W = 2$.
2. Determinas una base de $\mathbb{R}^5$ respecto de la cuál la matriz asociada a f tenga la forma canónica de Jordan. Da dicha matriz.
3. La matriz $M^{1000} - M^{999}$, ¿es la matriz nula 5×5?

Problema 3.6.38
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que

- $f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$
- $f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$
- $f^2 = I_{\mathbb{R}^4}$ (la aplicación identidad en $\mathbb{R}^4$)

Se pide:

1. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,0,1,0), v_3 = (0,1,0,-1), v_4 = (1,1,1,0)\}$.
2. Obtener los subespacios de vectores propios asociados a f y dí si f es o no diagonalizable.

3. ¿Qué condición de las dadas en el enunciado te permitiría decir, sin realizar ningún otro cálculo, si f es o no diagonalizable ? ¿Por qué?

Problema 3.6.39
Define de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tres endomorfismos: f_1, f_2 y f_3, tales que el polinomio característico de todos ellos sea $(x-2)^3$, y cuyas formas de Jordan sean todas distintas.
Si $p(X)$ es el polinomio mónico de menor grado tal que $p(f_1)$, $p(f_2)$ y $p(f_3)$ son la aplicación nula en $\mathbb{R}^3$, ¿quién es $p(X)$?

Problema 3.6.40
En $\mathbb{R}^4$ se considera un endomorfismo f del que se sabe:

- $f(e_1) = e_1 + e_2$
- $\ker(f) = \langle\{e_1 + e_2, e_3 + e_4\}\rangle$
- $\langle\{e_3, e_4\}\rangle$ es f-invariante
- $X - 1$ es un factor del polinomio característico
- $f(e_1 + e_3)$ está en el subespacio $\langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$

Se pide:

1. Determinar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
2. ¿Es f diagonalizable? ¿Cuál es su polinomio mínimo?
3. Determinar su forma canónica de Jordan.

Problema 3.6.41
Se considera la matriz $n \times n$ siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots\cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Prueba que el polinomio característico de M es $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.
2. Demuestra que si α es una raiz del polinomio característico de M, entonces el vector $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ es un vector propio asociado al valor propio α.

Problema 3.6.42
Sea A una matriz no nula 1001×1001 tal que $A^3 = 4A$.

1. Estudia para qué valores de α el sistema de ecuaciones siguiente puede tener solución no trivial, es decir distinta de la nula.
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{1001} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_{1001} \end{pmatrix}$$
2. Describe las posibles formas de Jordan de la matriz A

Problema 3.6.43
Se considera la siguiente matriz de tamaño $n \times n$: $M = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} = i$ para $1 \leq i \leq n$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el endomorfismo que respecto de la base $\mathcal{B} = \{e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1\}$ tiene por matriz asociada a M.

1. ¿Cuál es la matriz M' asociada a f respecto de la base canónica $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$?
2. Determina las matrices P y P^{-1} tales que $M' = P^{-1}MP$,
3. Halla los polinomios mínimos de M y P. ¿Es P diagonalizable?

Problema 3.6.44
Se considera la siguiente matriz de tamaño $n \times n$: $M = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} = i^4$ para $1 \leq i \leq n$. Halla una matriz A tal que $A^2 = M$

Problema 3.6.45
Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^7$ que respecto de la base canónica tiene por matriz asociada la siguiente:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determina una base de $\mathbb{R}^7$ respecto de la cuál la matriz asociada a f sea de Jordan.
2. Halla el polinomo característico y el polinomio mínimo de f.

Problema 3.6.46
Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo tal que la matriz asociada a f respecto de la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determina $Ker(f)$.
2. En una base de $Ker(f)$ intercala vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^5$ para obtener una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^5$ tal que la matriz asociada a f respecto $\mathcal{B}$ tenga forma de Jordan. Da esa matriz de Jordan.
3. Describe y utiliza otro método diferente al anterior para obtener una base respecto de la cuál la matriz asociada a f tenga forma de Jordan. Da la matriz de Jordan respecto de esa base.

Problema 3.6.47
Sean U_1 y U_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ siguientes:

$$U_1 =< \{e_1, e_2, e_3\} > \qquad U_2 =< \{e_4, e_5\} >$$

Sea f_1 un endomorfismo de U_1 y f_2 un endomorfismo de U_2, tales que las formas de Jordan respectivas son

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina la forma de Jordan, el polinomio mínimo y el polinomio característico de la aplicación $h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ para la que U_1 y U_2 son subespacios h-invariantes y tal que la restricción de h a U_1 es $f_1 + I_{U_1}$ y h a U_2 es $f_2 - 2I_{U_2}$.

Problema 3.6.48
Sea $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ un endomorfismo y $\mathcal{B}_c = \{e_1, \cdots, e_8\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^8$. Se sabe que $U =< \{e_1, e_3, e_5\} >$, $W =< \{e_2, e_4, e_6\} >$ y $T =< \{e_7, e_8\} >$ son subespacios f-invariantes. Sean f_U, f_W y f_T las restricciones de f a U, W y T respectivamente.

1. Sabiendo que
$$M_{\mathcal{B}_U}(f_U) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
siendo $\mathcal{B}_U = \{e_1, e_3, e_5\} >$, determina una base de U respecto de la cuál la matriz asociada a f_U sea de Jordan. Da dicha matriz.
2. Teniendo en cuenta el apartado anterior y sabiendo que el polinomio mínimo de f_W es $(X-1)^2$ y el polinomio mínimo de f_T es X, determina la forma de Jordan de f, su polinomio característico y su polinomio mínimo.

Problema 3.6.49
La posición en el plano de una masa puntual en el instante t viene dada por $(x(t), y(t))$. Si $(x'(t), y'(t))$ es su vector velocidad, halla la función $x(t)$ en cada uno de los casos siguientes, en los que se establecen las condiciones que satisface cada una de dichas funciones.

1. $x' = y$, $y' = x$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$
2. $x' = -y$, $y' = x$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$
3. $x' = ax + y$, $y' = y$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

Problema 3.6.50
Halla el término general de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Fibonacci sabiendo que $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

Problema 3.6.51
Sea

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Determinar, si existe, una matriz B (con las mismas dimensiones que A) tal que $B^2 = A$.

Lección 4

Geometría Euclídea

4.1 Producto escalar y ortogonalidad

En esta primera sección vamos a tratar de generalizar a un espacio vectorial real de dimensión finita conceptos conocidos por el estudiante en los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$: producto escalar, vectores ortogonales, subespacios ortogonales, $\cdots$.

Definición 4.1.1
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial n-dimensional, y $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación por la cuál la imagen de un par (v, w) va a denotarse por $v \cdot w$. Se dice que $\cdot$ es un producto escalar o un producto interno si verifica cada una de las condiciones siguientes, donde v, w, u son vectores cualesquiera de V y α, β elementos cualesquiera de $\mathbb{R}$:

i) $v \cdot w = w \cdot v$

ii) $(\alpha v + \beta u) \cdot w = \alpha v \cdot w + \beta u \cdot w$, $v \cdot (\alpha w + \beta u) = \alpha v \cdot w + \beta v \cdot u$

iii) $v \cdot v \geq 0$, *y* $v \cdot v = 0$ *si y sólo si* $v = \mathbf{0}$.

Un espacio vectorial real sobre el que se considera un producto escalar recibe el nombre de espacio vectorial euclideo.

También es habitual denotar un producto escalar definido en V por $<,>$ y el producto escalar de los vectores v, w por $< v, w >$.

Ejemplo 4.1.1

- Si $v = (x_1, \cdots, x_n)$ y $w = (y_1, \cdots, y_n)$ son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, podemos definir $v \cdot w = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. La aplicación $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ así definida es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$, denominado producto escalar habitual o producto escalar estandar.

- Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $\cdot$ la aplicación definida de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ por $p(x) \cdot q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Tal aplicación es un producto interno. La comprobación de las propiedades i) y ii) exigidas a un producto interno es inmediata para este caso. Para la prueba de la condición iii) obsérvese lo siguiente.
$$p(x) \cdot p(x) = \int_0^1 p(x)^2 dx$$
donde $p(x)^2 \geq 0, \forall x \in [0, 1]$. Si $p(x)$ no es la función nula, $p(x_0)^2 > 0$ para algún $x_0 \in [0, 1]$. La función $p(x)^2$ es continua por tanto $p(x)^2 > 0$ para todo número x de un entorno de x_0 contenido

en el intervalo $[0,1]$. En ese entorno la función $p(x)^2$ "encierra una área positiva". Por tanto si $p(x) \not\equiv \mathbf{0}$,

$$p(x) \cdot p(x) = \int_0^1 p(x)^2 dx \geq \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} p(x)^2 dx > 0$$

Sea V un espacio vectorial real con un producto escalar " $\cdot$ ". Para todo vector $v \in V$ se verifica que $\|v\|^2 = v \cdot v > 0$ si $v \neq \mathbf{0}$, por lo que tiene sentido hablar de una aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definida por $\|v\| = +\sqrt{\|v\|^2} = \sqrt{v \cdot v}$, y que recibe el nombre de aplicación norma.

Definición 4.1.2
En las condiciones anteriores, se llama norma de un vector v al número $\|v\|$. Si $\|v\| = 1$, el vector v se llama vector unitario.

Algunas propiedades relativas a la norma están recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1

1. $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$ *y* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. *Así, para todo vector v no nulo, se tiene que el vector $v/\|v\|$ es unitario.*
3. $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$, $\forall v, w \in V$. *Esta desigualdad es conocida como desigualdad de Schwarz.*
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\forall v, w \in V$. *Este resultado se conoce por desigualdad triangular.*

Demostración
Los dos primeros puntos se extraen de la propia definición. Para probar el tercero de los puntos consideramos el vector $\alpha v - \beta w$:

$$\|\alpha v - \beta w\|^2 = (\alpha v - \beta w) \cdot (\alpha v - \beta w) = |\alpha|^2 \|v\|^2 + |\beta|^2 \|w\|^2 - 2\alpha\beta v \cdot w \overset{\alpha=\|w\|^2, \beta=v\cdot w}{=}$$

$$= \|w\|^2 (\|w\|^2 \|v\|^2 - (v \cdot w)^2) \overset{\|\cdot\|^2 \geq 0}{\geq} 0$$

Por tanto $\|w\|^2 \|v\|^2 - (v \cdot w)^2 \geq 0$, de donde se deduce 3.
La demostración de 4:

$$\|v + w\|^2 = (v + w) \cdot (v + w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2v \cdot w \leq$$

$$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|v \cdot w| \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$$

Definición 4.1.3
Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n.

1. *Si u y v son dos vectores no nulos de V tales que $u \cdot v = 0$, se dice que u y v son ortogonales.*
2. *Si U es un subespacio vectorial de V, se llama conjunto ortogonal a U al conjunto $U^\perp = \{v \in V / u \cdot v = 0, \forall u \in U\}$*

La proposición siguiente recoge algunas propiedades relativas a estos conceptos.

Proposición 4.1.2
Sea V un espacio euclídeo.

1. *Si* $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ *es una familia de vectores no nulos de* V *y ortogonales dos a dos, entonces* $v_1, v_2, \cdots, v_r$ *son linealmente independientes.*

2. *Si* U *es un subespacio de* V*,* $U^\perp$ *es subespacio de* V *(subespacio ortogonal a* U*).*

Demostración
Si partimos de una combinación lineal nula de dicha familia: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \mathbf{0}$, al multiplicar escalarmente esa combinación lineal por cada v_i, obtenemos que $\alpha_i = 0$.
Para probar la segunda afirmación: Si v, w son vectores de $U^\perp$, $(\alpha v+\beta w)\cdot u = \alpha(v\cdot u)+\beta(w\cdot u) = 0$ donde u es cualquier vector de U. De donde se deduce que $\alpha v + \beta w \in U^\perp$.

El procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt, que a continuación se presenta, permite determinar una base constituida por vectores ortogonales dos a dos partiendo de cualquier base de V. Una vez obtenida esa base, sin más que dividir a cada vector por su norma, contaremos con una base formada por vectores ortogonales dos a dos y todos ellos de norma 1. Este procedimiento garantiza que la siguiente definición no carece de sentido.

Definición 4.1.4
Sea V *un espacio vectorial euclideo, y* $\mathcal{B}$ *una base de* V*. Se dice que* $\mathcal{B}$ *es ortogonal si está formada por vectores ortogonales dos a dos. Si además todos los vectores de una base ortogonal son de norma* 1*, la base recibe el nombre de ortonormal.*

Ejemplo 4.1.2
La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal, y no lo es la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$

En el ejemplo que aparece seguidamente se detalla el procedimiento de Gram-Schmidt para un caso concreto. En la proposición que sigue a tal ejemplo se muestra ese mismo procedimiento en el caso general.

Ejemplo 4.1.3
Consideremos el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar $< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Sea $\mathcal{B} = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}$ la base canónica de V, que no es ortonormal para dicho producto. Se quiere construir una base ortonormal $\mathcal{B}^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que

$$\langle\{u_1\}\rangle = \langle\{v_1\}\rangle, \langle\{u_1, u_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_2\}\rangle, \langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle \tag{4.1}$$

En un principio vamos a tratar de construir una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ verificando la propiedad 4.1. El que los vectores tengan norma 1 tiene fácil arreglo posterior. Si $w_1 = v_1$, se verifica la primera condición de 4.1.
Siendo $w_1 = v_1$,

$$\langle\{w_1, w_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_2\}\rangle \Leftrightarrow w_2 = \alpha w_1 + \beta v_2 \quad \text{con} \quad \beta \neq 0$$

Se puede tomar $\beta = 1$. Si $w_2 = \alpha w_1 + v_2$ e imponemos que w_1 y w_2 sean ortogonales, se deduce que $\alpha = -\dfrac{w_1 \cdot v_2}{\|w_1\|^2}$. Sea entonces $w_2 = v_2 + \alpha w_1$ con $\alpha = -\dfrac{w_1 \cdot v_2}{\|w_1\|^2} = -\dfrac{< 1, x >}{\|w_1\|^2}$.
Teniendo en cuenta la forma de estar definidos w_1 y w_2,

$$\langle\{w_1, w_2, w_3\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle \Leftrightarrow w_3 = \alpha w_1 + \beta w_2 + \delta v_3 \quad \text{con} \quad \delta \neq 0.$$

Podemos hacer $\delta = 1$.

Si $w_3 = \alpha w_1 + \beta w_2 + v_3$, imponiendo ortogonalidad entre w_1 y w_3, y w_2 y w_3, se deduce que

$$\alpha = -\frac{w_1 \cdot v_3}{\|w_1\|^2} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{w_2 \cdot v_3}{\|w_2\|^2}$$

Por tanto:

$$w_1 = 1 \quad \text{y} \quad \|w_1\|^2 = 1$$

$$w_2 = x - \frac{< 1, x >}{\|w_1\|^2} 1 = x - \frac{1}{2}, \qquad \|w_2\|^2 = \frac{1}{12}$$

$$w_3 = x^2 - \frac{< 1, x^2 >}{\|w_1\|^2} \cdot 1 - \frac{< x - \frac{1}{2}, x^2 >}{\|w_2\|^2} \cdot (x - \frac{1}{2}) = x^2 + \frac{1}{6} - x, \qquad \|w_3\|^2 = \frac{1}{180}$$

Si hacemos $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$, $\mathcal{B}^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de V que verifica la condición 4.1 (por verificarla $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$).

$$u_1 = 1, u_2 = 2\sqrt{3}(-\frac{1}{2} + x), u_3 = 6\sqrt{5}(\frac{1}{6} - x + x^2)$$

El ejemplo anterior explica en gran medida la forma de actuar en el caso general.

Proposición 4.1.3 *Procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt*
Si $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial euclídeo V, se puede construir una base ortonormal $\mathcal{B}^* = \{u_1, \cdots, u_n\}$ tal que $\langle\{v_1, \cdots, v_i\}\rangle = \langle\{u_1, \cdots, u_i\}\rangle$, $i = 1, \cdots, n$

Demostración

Basta probar la existencia de una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{w_1, \cdots, w_n\}$ verificando la condición $\langle\{v_1, \cdots, v_i\}\rangle = \langle\{w_1, \cdots, w_i\}\rangle$, $i = 1, \cdots, n$. Para conseguir la base del enunciado basta hacer $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$.

Si $n = 1$, el resultado es inmediato.

Supongamos que $n \geq 2$. Sea $w_1 = v_1$ y $w_i = v_i + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{i-1} w_{i-1}$ para $i = 2, \cdots, n$ siendo $\alpha_k = -\dfrac{v_i \cdot w_k}{\|w_k\|^2}$.

Probemos por recurrencia que los vectores $w_i's$ satisfacen las condiciones pedidas.

Es fácil comprobar que $w_1 \cdot w_2 = 0$ y $\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{w_1, w_2\}\rangle$. Supuesto que las propiedades son ciertas para $w_1, \cdots, w_{i-1}$, vamos a verlo para $w_1, \cdots, w_{i-1}, w_i$.

Multiplicamos escalarmente w_i por w_k para $k = 1, \cdots, i - 1$.

$$w_i \cdot w_k = v_i \cdot w_k + (\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{i-1} w_{i-1}) \cdot w_k = v_i \cdot w_k + \alpha_k w_k \cdot w_k = v_i \cdot w_k - \frac{v_i \cdot w_k}{\|w_k\|^2} \|w_k\|^2 = 0$$

De $\langle\{v_1, \cdots, v_{i-1}\}\rangle = \langle\{w_1, \cdots, w_{i-1}\}\rangle$, $w_i \in \langle\{v_1, \cdots, v_i\}\rangle$ y $v_i \in \langle\{w_1, \cdots, w_i\}\rangle$, se deduce que $\langle\{v_1, \cdots, v_i\}\rangle = \langle\{w_1, \cdots, w_i\}\rangle$.

Proposición 4.1.4
Sea V un espacio vectorial euclídeo.

1. *Si U es un subespacio de V, y $U^\perp$ es su ortogonal, entonces $V = U \oplus U^\perp$. Además $(U^\perp)^\perp = U$.*

2. *Si $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, las coordenadas $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de un vector $v \in V$ respecto de $\mathcal{B}$ vienen dadas por $\alpha_i = v \cdot u_i$, $\forall i$.*

3. *Si $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base ortonormal de V, y $v, w \in V$ tienen coordenadas $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ respecto de $\mathcal{B}$, $v \cdot w = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$ y $\|v\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$*

Demostración

Para probar el primero de los apartados:

i) Si $u \in U \cap U^\perp$, $u \cdot u = 0$. Por tanto $u = \mathbf{0}$ y $U \cap U^\perp = \mathbf{0}$.

ii) Sea $\mathcal{B}_U = \{v_1, \cdots, v_l\}$ una base de U, que ampliamos a una de V: $\mathcal{B}_V = \{v_1, \cdots, v_l, \cdots, v_n\}$. Si aplicamos Gram-Schmidt a $\mathcal{B}_V$, obtenemos una base ortonormal

$$\mathcal{B}'_V = \{u_1, \cdots, u_l, u_{l+1}, \cdots, u_n\}$$

donde $\mathcal{B}'_U = \{u_1, \cdots, u_l\}$ es base de U.

Es inmediato que $< \{u_{l+1}, \cdots, u_n\} > \subset U^\perp$, lo que implica que $\dim U^\perp \geq n - l$. Como:

$$n = l + (n - l) \leq \dim U + \dim U^\perp \overset{U \cap U^\perp = \mathbf{0}}{=} \dim(U + U^\perp) \leq n$$

$\dim U^\perp = n - l$ y $< \{u_{l+1}, \cdots, u_n\} >= U^\perp$. En consecuencia, $V = U + U^\perp$.

iii) Es obvio que $U \subset (U^\perp)^\perp$, y teniendo en cuenta que $V = U \oplus U^\perp = (U^\perp)^\perp \oplus U^\perp$ es obligado que $(U^\perp)^\perp = U$.

Para probar el punto 2, escribimos $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ y multiplicamos escalarmente por cada u_i.

Para la última de las afirmaciones basta realizar dicho producto escribiendo v y w en función de la base ortonormal.

Este resultado nos permite definir en V la aplicación proyección sobre U en la dirección de $U^\perp$. El estudio detallado de dicha proyección, como el de algunas de sus aplicaciones es tratado en la siguiente sección.

4.1.1 Ejercicios

Ejercicio 4.1.1.1

Se considera la aplicación

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que a cada par de vectores (v, w) con $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_1, y_2, y_3)$ le asocia el número

$$< v, w >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

¿Es $<,>$ un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio 4.1.1.2

Se considera la aplicación

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que a cada par de vectores (v, w) con $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_1, y_2, y_3)$ le asocia el número

$$< v, w >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. ¿Es $<,>$ un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$?
2. En caso de haber respondido afirmativamente a la pregunta anterior, obtén el subespacio $U^\perp$ cuando $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad x + y + z = 0\}$

Ejercicio 4.1.1.3
Se considera el siguiente producto escalar sobre $V = \mathbb{R}^3$

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

que a cada par de vectores (v, w) con $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_1, y_2, y_3)$ le asocia el número

$$< v, w >= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. Sea $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Comprueba que $< e_i, e_j >$ es el término del lugar (i, j) de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
2. ¿Es $\mathcal{B}_c$ una base ortogonal con el producto escalar considerado?
3. ¿Quién es el subespacio ortogonal a $U =< \{e_2, e_3\} >$?
4. ¿Quién es el subespacio ortogonal a $W =< \{e_1, e_2\} >$?
5. Usando el procedimiento de Gram-Schmidt obtén, a partir de la base $\mathcal{B}_c$, una base ortonormal (con el producto escalar considerado).

Ejercicio 4.1.1.4
Se considera el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad x + 2y + 3z = 0\}$

1. Determina $U^\perp$.
2. Escribe el vector $v = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$ como suma de un vector $u \in U$ y de un vector $u' \in U^\perp$.
El vector u recibe el nombre de `proyección ortogonal de` v `sobre` U y se escribe $u = p_U(v)$.
El vector u' recibe el nombre de proyección ortogonal de v sobre $U^\perp$ y se escribe $u' = p_{U^\perp}(v)$.
3. Escribe cualquier vector de $V = \mathbb{R}^3$ como suma de un vector $u \in U$ y de un vector $u' \in U^\perp$ ($u = p_U(v)$ y $u' = p_{U^\perp}(v)$).

Ejercicio 4.1.1.5
Se considera el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^4$ con el producto escalar estándar. Sea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tal que} \quad x + 2y + 3z = 0, t = 0\}$

1. Determina una base ortonormal de U.
2. Sea $\mathcal{B}^* = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base ortonormal de V tal que $\{u_1, u_2\}$ sea la base de U hallada en el apartado anterior.
· ¿Es $\{u_3, u_4\}$ una base de $U^\perp$?
· Si un vector v tiene coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ respecto $\mathcal{B}^*$, ¿es cierto que α_i coincide con el producto escalar de u_i y v?

3. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, y sin determinar explícitamente una base de $U^\perp$, halla $p_U(v)$ para $v = (1, 2, -1, -2)$.

Ejercicio 4.1.1.6
Sea A una matriz real 7×7, cuyas columnas forman una base de $\mathbb{R}^7$, y sea B la matriz que tiene por columnas los vectores de $\mathbb{R}^7$ que se obtienen de aplicar Gram-Schmidt a las columnas de A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. El subespacio generado por la tercera columna de A y el subespacio generado por la tercera columna de B son el mismo.
2. El subespacio generado por las tres primeras columnas de A y el subespacio generado por las tres primeras columnas de B son el mismo.
3. La matriz traspuesta de B coinicide con la matriz inversa de B, esto es $B^t = B^{-1}$.

Ejercicio 4.1.1.7
Sea U el subespacio del espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^4$ siguiente:

$$U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x - 2y + 3z - t = 0\}$$

Hallar una base ortonormal de U.

Ejercicio 4.1.1.8
En el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^4$ se considera el subespacio

$$U =< \{(1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} >$$

Determinar una base ortogonal de U, y un vector $v \in \mathbb{R}^4$ que sea ortogonal a U.

4.2 Proyección ortogonal

Sea V un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio de V y $U^\perp$ su ortogonal. Puesto que $V = U \oplus U^\perp$, es posible definir la aplicación siguiente:

$$p_U : V \to V \quad \text{definida por} \quad p_U(v) = u \quad \text{siendo} \quad v = u + u', u \in U, u' \in U^\perp$$

conocida como proyección ortogonal sobre U.

Obsérvese que la aplicación

$$p_{U^\perp} : V \to V \quad \text{definida por} \quad p_{U^\perp}(v) = u' \quad \text{siendo} \quad v = u + u', u \in U, u' \in U^\perp$$

es la proyección ortogonal sobre $U^\perp$ puesto que $(U^\perp)^\perp = U$

En la proposición que se enuncia a continuación se establecen algunas propiedades de las aplicaciones anteriores. Su demostración es sencilla y se deja como ejercicio.

Proposición 4.2.1
En las condiciones anteriores se tiene:

1. $Im(p_U) = U$, $\ker(p_U) = U^\perp$, $p_U^2 = p_U$, $p_U \circ p_{U^\perp} = \mathbf{0_V}$.
2. $v \cdot p_U(w) = p_U(v) \cdot w$, $\forall v, w \in V$

3. $\mathbb{I}_V = p_U + p_{U^\perp}$. *Resultado conocido como teorema de la proyección.*

Ejemplo 4.2.1
Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estandar. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$, y $v = (1, 2, 3)$. Vamos a determinar la proyección ortogonal de v sobre el plano vectorial U.

Una base de U es $\mathcal{B}_U = \{(1, 1, 0), (2, 0, -1)\}$, y una base de $U^\perp$ es, como se deduce de la ecuación que define U, $\mathcal{B}_{U^\perp} = \{(1, -1, 2)\}$.

El vector v en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (2, 0, -1), (1, -1, 2)\}$ tiene coordenadas $(\frac{17}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{6})$, por tanto $p_U(v) = \frac{17}{6}(1, 1, 0) + (-\frac{4}{3})(2, 0, -1) = (\frac{1}{6}, \frac{17}{6}, \frac{4}{3})$.

Simultáneamente podemos determinar $p_{U^\perp}(v) = \frac{5}{6}(1, -1, 2) = v - p_U(v)$.

En el ejemplo precedente la determinación de $p_U(v)$ ha necesitado del cálculo de las bases de U y de $U^\perp$, y de expresar v como combinación lineal de la base unión de ambas. ¿Se reduciría el esfuerzo de conocer una base ortonormal de U?

Ejemplo 4.2.2
Si U es el subespacio del ejemplo anterior, una base ortonormal de él es $\mathcal{B}'_U = \{u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)\}$, que se ha obtenido aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B}_U$.

Si u_3 es un vector unitario que genera $U^\perp$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual las coordenadas de v son $(v \cdot u_1, v \cdot u_2, v \cdot u_3)$.

Por tanto $p_U(v) = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} + (-\frac{4}{\sqrt{3}})\frac{(1, -1, -1)}{\sqrt{3}} = (\frac{1}{6}, \frac{17}{6}, \frac{4}{3})$.

Trabajando así, la forma de obtener $p_{U^\perp}(v)$ es calculando $v - p_U(v)$, puesto que no hemos determinado explícitamente una base de $U^\perp$.

En este caso, en el que $\dim(U^\perp) = 1$, el cálculo de $p_{U^\perp}(v) = \frac{5}{6}(1, -1, 2)$, que es un vector no nulo, nos permite establecer una base de $U^\perp$. Ello no es posible si $\dim(U^\perp) > 1$.

Por tanto, si dado un subespacio U de V, lo que interesa es exclusivamente conocer $p_U(v)$ con $v \in V$, uno puede optar por determinar una base ortonormal $\mathcal{B}_U = \{u_1, \cdots, u_l\}$ de U (a la que siempre se puede llegar aplicando Gram-Schmidt a cualquier base de U) y tener en cuenta la siguiente

Proposición 4.2.2
Si $\mathcal{B}_U = \{u_1, \cdots, u_l\}$ *es una base ortonormal de* U, $p_U(v) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l$ *con* $\alpha_i = v \cdot u_i$.

Demostracion
Sea $\mathcal{B}_V = \{u_1, \cdots, u_l, u_{l+1}, \cdots, u_n\}$ una base ortonormal de V, donde los l primeros vectores constituyen la base dada de U, y los restantes una de $U^\perp$.

Si escribimos v como combinación lineal de $\mathcal{B}_V$: $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l + \alpha_{l+1} u_{l+1} + \cdots + \alpha_n u_n$ con $\alpha_i = v \cdot u_i$, y por tanto $p_U(v) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l$.

Siempre la obtención de $p_U(v)$ nos permite obtener $p_{U^\perp}(v) = v - p_U(v)$, aunque no $U^\perp$. El resultado anterior hace innecesario el cálculo de ninguna base de $U^\perp$.

Se trata ahora de determinar la proyección ortogonal de un vector de $\mathbb{R}^n$ sobre un subespacio U sin necesidad de obtener, como se ha hecho en situaciones precedentes, una base de $U^\perp$ o una base ortonormal de U.

Sea $V = \mathbb{R}^n$ con el producto escalar estandar, y sea U un subespacio de V. Consideremos en V la base canónica y en U la base $\mathcal{B}_U = \{u_1, \cdots, u_l\}$ (no necesariamente ortonormal). El vector $u = p_U(v) \in U$ tendrá unas coordenadas $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ respecto de la base canónica y unas coordenadas $(\beta_1, \cdots, \beta_l)$ respecto de la base $\mathcal{B}_U$. En lo que sigue se establece una relación matricial entre las coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ de v en la base canónica, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \cdots, \beta_l)$, que nos permite determinar automáticamente $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \cdots, \beta_l)$, partiendo de $(x_1, \cdots, x_n)$.

Lo primero a tener en cuenta es que si A es la matriz $n \times l$ que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_U$ respecto de la canónica, entonces:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_l \end{pmatrix}$$

A es la matriz del homomorfismo inclusión de U en V respecto de las bases $\mathcal{B}_U$ en U y la canónica en V, y su rango es obviamente l.

Puesto que $v - u \in U^\perp$ ($v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$: teorema de la proyección), se tiene que el producto escalar de $v - u$ y cualquier vector $u_i \in \mathcal{B}_U$ es cero:

$$\underbrace{(0,..,0,1,0,..,0)}_{i)} A^t [\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_l \end{pmatrix}] = 0$$

para $i = 1, \cdots, l$.

De donde se deduce

$$A^t [\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_l \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = A^t A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_l \end{pmatrix}$$

Si la matriz $A^t A$ es inversible, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_l \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Veámos finalmente que la matriz $A^t A$ es inversible, aunque la prueba está basada en resultados en aspectos no completamente vistos en este curso.

· $A^t A$ es simétrica pues cada término c_{ij} de la matriz es $u_i \cdot u_j$. $A^t A$ representa pues el producto escalar en U respecto de la base $\mathcal{B}_U$

· El producto escalar en U es no degenerado: Si $w \in U$ es tal que $w \cdot w' = 0, \forall w' \in U$, $w \cdot v' = 0, \forall v' \in V$ puesto que v' es suma de un vector de U y uno de $U^\perp$. Por tanto $w = \mathbf{0}$. La matriz $A^t A$ es pues de rango l, y en consecuencia inversible.

Ejemplo 4.2.3

- En este ejemplo se trabaja el mismo caso que en ejemplos anteriores pero desde esta nueva perspectiva.

  Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estandar. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$, y $v = (1, 2, 3)$. Vamos a determinar la proyección ortogonal de v sobre el plano vectorial U.

  Una base de U es $\mathcal{B}_U = \{(1, 1, 0), (2, 0, -1)\}$, por tanto, siguiendo la notación anterior, la matriz A es:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Si (β_1, β_2) son las coordenadas de $p_U(v)$ en $\mathcal{B}_U$, aplicando la fórmula matricial obtenida anteriormente:

  $$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{6} \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$$

  De donde $p_U(v) = \frac{17}{6}(1, 1, 0) + (-\frac{4}{3})(2, 0, -1) = (\frac{1}{6}, \frac{17}{6}, \frac{4}{3}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, coordenadas de $p_U(v)$ en la base canónica, y que podrían haberse obtenido como $A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$.

  Observar que se podría haber optado por resolver el sistema

  $$(A^t A) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  en vez de calcular $(A^t A)^{-1}$.

- ¿A qué se reduce el cálculo de $(A^t A)^{-1}$ cuando el espacio sobre el que se proyecta es una recta vectorial?

- Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $U^\perp$ su ortogonal. Utiliza las igualdades matriciales anteriores para $p_U(v)$ y $p_{U^\perp}(v)$ con el fín de probar que $p_U^2 = p_U$ y que $p_U \circ p_{U^\perp}$ es la aplicación nula.

Para concluir esta sección vamos a probar que dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ y un subespacio U de $\mathbb{R}^n$, "el vector de U que menos difiere de v" es $p_U(v)$.

Teorema 4.2.1 *De aproximación de la norma*
En las condiciones anteriores se verifica:

$$\|v - p_U(v)\| < \|v - w\| \qquad \forall w \in U \quad \textit{con} \quad w \neq p_U(v)$$

Demostración

Si $u = p_U(v)$, $v - w = (v - u) + (u - w)$ con $v - u \in U^\perp$ y $u - w \in U$, de donde $(v - u) \cdot (u - w) = 0$. En consecuencia, $\|v - w\|^2 = \|v - u\|^2 + \|u - w\|^2$. Deduciendo así la tesis del teorema puesto que $\|u - w\|^2 \neq 0$ si y sólo si $u = w$.

En ese sentido se dice que $p_U(v)$ es la mejor aproximación de v en U.

Este último resultado tiene interesantes aplicaciones, algunas de las cuáles se recogen en la sección próxima.

4.3 Aplicaciones

Vamos a estudiar dos problemas concretos en las que están involucrados el teorema de aproximación de la norma y, en consecuencia, la proyección ortogonal de un vector. Esos problemas son el de aproximación por mínimos cuadrados y la resolución de sistemas sobredimensionados.

4.3.1 Aproximación por mínimos cuadrados

Es conocido que en algunos fenómenos físicos las variables que intervienen en su descripción guardan tal relación entre ellas que dicha relación puede ser expresada mediante una fórmula:

$$e = v \cdot t, s = s_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \cdots$$

En muchos otros fenómenos no es fácil, o no es posible, encontrar fórmulas como las anteriores. En esos casos se obtienen grandes cantidades de datos, con el objetivo de ajustar una curva a los mismos, mediante la cuál se establece una relación "aproximada" entre las variables del problema. Inicialmente habría que diferenciar dos partes en la resolución del problema en cuestión: una, la decisión de qué tipo de curva ajustar; otra, encontrar la curva del tipo específico que "mejor" se ajuste a los datos dados. A continuación se trata un caso particular de la segunda cuestión: se muestra cómo lograr esa "mejor aproximación" cuando se tienen dos variables en el problema.

Supongamos que existen n datos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ y que el tipo de curva por la que vamos a aproximar viene dado por $y = f(x)$ donde x, y representan las variables que deseamos relacionar y $f(x) = mx + b, ax^2 + bx + c, \cdots$, según el ajuste a realizar sea lineal, cuadrático, $\cdots$. Lo que se hace en esta situación es buscar, por ejemplo, la recta $y = mx + b$ que mejor se ajuste a los datos del problema: ésto es, debemos determinar m y b tal que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (b + m x_i))^2$$

sea lo más pequeño posible. A esta búsqueda se denomina ajuste por mínimos cuadrados.

Teorema 4.3.1
Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{R}^2$ tal que no todos los x_i coinciden. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

entonces $y = mx + b$ es la recta que da el mejor ajuste por mínimos cuadrados para los puntos considerados.

Para este caso particular se puede probar la existencia de la inversa de $A^t A$ viendo que su determinante es no nulo utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema 4.3.2
Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ *un conjunto de* n *puntos de* $\mathbb{R}^2$ *tal que no todos los* x_i *coinciden. Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

entonces $y = ax^2 + bx + c$ *es la parábola que da el mejor ajuste por mínimos cuadrados para los puntos considerados.*

La clave de la demostración de estos teoremas se halla en observar que el vector de los coeficioentes de la recta o de la parábola verificando la condición exigida es justamente la proyección dl vector de los y_i's sobre el subespaico de $\mathbb{R}^n$ definido por las columnas de A.

4.3.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sobredimensionados

Genéricamente los sistemas de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas no tienen ninguna solución salvo que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Rouche-Frobenius. Las técnicas desarrolladas en este capítulo mos van a permitir calcular, como en la sección anterior, la mejor pseudosolución, esto es el punto de $\mathbb{R}^n$ que está más proximo de ser una solución del sistema lineal considerado.

Teorema 4.3.3
Sean A *una matriz con* m *filas y* n *columnas,* $m \geq n$ *y* $\underline{b}$ *un vector columna en* $\mathbb{R}^m$*. Si*

$$\underline{x} = (A^t A)^{-1} A^t \underline{b}$$

entonces

$$\|A\underline{x} - \underline{b}\| < \|A\underline{y} - \underline{b}\|$$

para todo $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\underline{y} \neq \underline{x}$*.*

La clave de la demostración de este teorema se encuentra en observar que el vector $\underline{x}$ verificando la condición exigida es justamente la proyección de $\underline{b}$ sobre el subespacio de $\mathbb{R}^m$ definido por las columnas de A.

4.4 Isometrías en espacios vectoriales euclídeos

En la sección anterior se ha definido por espacio vectorial euclídeo cualquier espacio vectorial real dotado de un producto escalar. Esta nueva sección comienza con el estudio de las aplicaciones lineales sobre un espacio vectorial euclídeo que conservan las normas.

4.4.1 Definición y primeras propiedades

En lo que sigue V denotará un espacio euclídeo de dimensión n.

Definición 4.4.1
Sea $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se dice que ϕ es una transformación ortogonal o isometría si conserva la norma, es decir, si $\|\phi(v)\| = \|v\|$ para todo v de V.

Observar que de la definición anterior se desprende que toda transformación ortogonal es biyectiva:

Si $v \in Ker(\phi)$, $\|\phi(v)\| = \|\mathbf{0}_V\| = 0$. Puesto que ϕ conserva la norma, $\|v\| = 0$ y $v = \mathbf{0}_V$. Se deduce entonces que ϕ es inyectiva, y por ser endomorfismo, biyectiva.

- Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual. El endomorfismo $\phi : V \to V$ definido por $\phi(x, y, z) = (x, -y, -z)$ es una transformación ortogonal, como puede comprobarse fácilmente.

- Si V el espacio de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 2 con el producto escalar $< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x) \cdot q(x)dx$, el endomorfismo $-I_V$ es, obviamente, una transformación ortogonal.

- Sea $V = \mathbb{R}^n$, U un subespacio no nulo de V y $U^\perp$ su ortogonal. El endomorfismo $\phi = p_U - p_{U^\perp}$ de V es una transformación ortogonal:

  Si v es un vector cualquiera de V, y $u = p_U(v)$ y $u' = p_{U^\perp}(v)$, se tiene que $\phi(v) = u - u'$. Recordemos que $p_U + p_{U^\perp} = I_V$, y que por tanto $v = u + u'$.

  Así $\|v\|^2 = \|u + u'\|^2 = \|u\|^2 + \|u'\|^2 + 2(u \cdot u') = \|u\|^2 + \|u'\|^2$ porque u y u' son ortogonales. Usando precisamente que u y u' son ortogonales, se llega a que $\|\phi(v)\|^2 = \|u\|^2 + \|u'\|^2$.

Proposición 4.4.1
Sea ϕ un endomorfismo de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:
i) $\|\phi(v)\| = \|v\|$ para todo v de V
ii) $\phi(u) \cdot \phi(v) = u \cdot v$ para cualesquiera u, v de V

La implicación $ii) \Longrightarrow i)$ es inmediata. Para probar que $i) \Longrightarrow ii)$, desarrollar $\|\phi(u+v)\|^2$ y $\|u+v\|^2$.

Proposición 4.4.2
Sea ϕ un endomorfismo de V, y $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ una base ortonormal de V. Se tiene:

1. *ϕ es una transformación ortogonal si y sólo si $\mathcal{B}' = \{\phi(u_1), \cdots, \phi(u_n)\}$ es una base ortonormal de V.*

2. *ϕ es una transformación ortogonal si y sólo si la matriz $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ es una matriz ortogonal.*

Demostración

1. Supongamos que ϕ es una transformación ortogonal.

   En este caso ϕ es biyectiva y por tanto $\{\phi(u_1), \cdots, \phi(u_n)\}$ es base. Como conserva el producto escalar: $\phi(u_i) \cdot \phi(u_j) = u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$,(0 si $i \neq j$, 1 si $i = j$). Lo que prueba que $\mathcal{B}'$ es ortonormal.

   Supongamos que $\mathcal{B}' = \{\phi(u_1), \cdots, \phi(u_n)\}$ es una base ortonormal de V, y probemos que ϕ conserva la norma.

   Sea v un vector cualquiera de V, que se expresará en función de $\mathcal{B}$ como $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ (con $\alpha_i = v \cdot u_i$). Por ser ϕ lineal, $\phi(v) = \alpha_1\phi(u_1) + \cdots + \alpha_n\phi(u_n)$ (con $\alpha_i = v \cdot u_i = \phi(v) \cdot \phi(u_i)$ por ser $\mathcal{B}'$ ortonormal).

   Por ser $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ ortonormales, $\|v\|^2 = \sum_1^n \alpha_i^2 = \|\phi(v)\|$.

2. Se deduce fácilmente del apartado anterior.

Proposición 4.4.3
Si ϕ es una transformación ortogonal de V, se verifica que

- *Los únicos autovalores reales de ϕ son 1 y -1.*
- *ϕ^{-1} es una transformación ortogonal.*
- *La composición de ϕ con cualquier transformación ortogonal es una transformación ortogonal.*

Supongamos que α es un autovalor de ϕ, y sea v un vector propio asociado a α. Se tiene entonces que $\|\phi(v)\| = |\alpha|\|v\| = \|v\| \neq 0$, de donde se obtiene que $|\alpha| = 1$, y $\alpha = \pm 1$. Queda así probado el primero de los apartados. La prueba de los dos últimos apartados no entraña ninguna dificultad.

4.4.2 Transformaciones ortogonales en un espacio de dimensión 2

En esta parte del capítulo vamos a determinar la forma más sencilla de expresar matricialmente una transformación ortogonal. Comenzaremos con el caso de dimensión 2, que utilizaremos posteriormente para espacios de dimensión finita cualquiera.

Proposición 4.4.4
Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2, y ϕ una transformación ortogonal definida en V. Existe una base ortonormal de V respecto de la cuál la matriz asociada a ϕ es de una de las formas siguientes:

1. $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ *con* $0 \leq \theta < 2\Pi$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Demostración
Observemos primero que un mismo endomorfismo ϕ no puede ser representado por las dos matrices descritas anteriormente. Ello supondría que dichas matrices fuesen semejantes y en consecuencia que tuviesen el mismo determinante, cosa que no es cierta.

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base ortonormal cualquiera de V (siempre podemos hallar una, y en el caso que $V = \mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual podemos considerar la base canónica).

Si $A = M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, A es ortogonal y por tanto, $A^tA = AA^t = \mathbb{I}_n$ y $det(A) = \pm 1$. Después de realizar las operaciones correspondientes, se obtienen las siguientes igualdades (*):

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = c^2 + d^2 = b^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = ab + cd = 0$$

Estas condiciones en el caso de que $det(A) = ad - bc = 1$, conducen a que $a = d$ y $b = -c$, y en consecuencia $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.

Existe entonces un único valor $\theta \in [0, 2\Pi)$ tal que $a = cos\theta$ y $b = sen\theta$. Se tiene pues que la matriz asociada a ϕ respecto cualquier base ortonormal es de la forma del apartado 1

Las igualdades (*) junto con $det(A) = ad - bc = -1$, permiten deducir que $a = -d$ y $b = c$. En este caso $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$, y su polinomio característico es $(X + 1)(X - 1)$.

Si $b = 0$ entonces $a = \pm 1$, y la base buscada es la de partida o la que se obtiene de permutar en ella los vectores.

Si $b \neq 0$, el vector w_1 de coordenadas $(b, 1 - a)$ es un vector propio asociado al valor propio 1 y w_2 de coordenadas $(-b, 1 + a)$ es un vector propio asociado al valor propio -1. El producto escalar de w_1 y w_2 es cero. Esto nos asegura que la base $\mathcal{B}' = \{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}\}$ es una base ortonormal.

Definición 4.4.2

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2, ϕ una transformación ortogonal definida en V, y A la matriz asociada a ϕ con la forma de la proposición anterior. Se dice que ϕ es

1. *Una rotación vectorial de amplitud θ, si $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ con $0 \leq \theta < 2\Pi$.*
2. *Una simetría vectorial ortogonal (de eje el conjunto de vectores fijos $V_\phi(1) = \{v \in V / \phi(v) = v\}$), si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Ejemplo 4.4.1

- Si ϕ es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ que respecto de la base canónica tiene por matriz $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $p_\phi(X) = (X - 1)(X + 1)$ y ϕ es una simetría vectorial ortogonal de eje $V_{(1)} =< w_1 = (2, 1) >$. Como $V_{(-1)} =< w_2 = (1, -2) >= V_{(1)}^{\perp}$, respecto de la base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ o de la base ortonormal $\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}\}$, la matriz asociada a ϕ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Si ϕ es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ que respecto de la base canónica tiene por matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $det(A) = 1$ y $p_\phi(X) = X^2 - X + 1$ es irreducible. La isometría ϕ es una rotación de amplitud $\frac{\Pi}{3}$, respecto de la base canónica.
- Si ϕ es una isometría del espacio vectorial euclídeo V de dimensión 2, y su polinomio característico $p_\phi(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$, ϕ es una rotación (de matriz no diagonal).

  Además, puesto que respecto de una base ortonormal la matriz asociada a ϕ es ortogonal, su determinante es ± 1, y como coincide con el término independiente de su polinomio característico, deducimos que $\beta = 1$.

  En este caso el polinomio característico $p_\phi(X) = X^2 + \alpha X + 1$ se puede escribir de la forma $p_\phi(X) = (X - a)^2 + b^2$ siendo $a = -\frac{\alpha}{2}$ y $b^2 = \frac{4 - \alpha^2}{4}$. Como $a^2 + b^2 = 1$, $a = cos\theta, b = sen\theta$ con $\theta \in [0, 2\Pi)$.
- Sea ϕ una isometría del espacio vectorial euclídeo V de dimensión 2, cuyo polinomio característico $p_\phi(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ es reducible sobre $\mathbb{R}$. Si $\beta = -1$ entonces es una simetría. Si $\beta = 1$, es una rotación, de matriz $\mathbb{I}_2$ si $\alpha = -2$ y de matriz $-\mathbb{I}_2$ si $\alpha = 2$.

En general, si $V_\phi(1) = \{v \in V / \phi(v) = v\}$, podemos deducir de lo anterior que:

$$\phi \text{ es simetría} \iff dimV_{(1)} = 1 \iff p_\phi(X) = (X - 1)(X + 1)$$

$$\phi \text{ es rotación} \iff dimV_{(1)} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 & \text{no es raiz} \\ 1 & \text{es raiz doble} \end{cases} \text{ de } p_\phi(X)$$
$$\iff p_\phi(X) = \begin{cases} \begin{cases} X^2+\alpha X+\beta & \text{irreducible sobre } \mathbb{R} \\ (X+1)^2 \end{cases} \\ (X-1)^2 \end{cases}$$

- La composición de dos rotaciones es otra rotación de amplitud la suma de las amplitudes, módulo 2Π.

  La composición de dos simetrías es una rotación, que es la identidad si las simetrías coinciden.

  La composición de una rotación y una simetría es una simetría.

  Da un argumento que pruebe lo anterior.

- Sean ϕ y φ las isometrías de $\mathbb{R}^2$ definidas por:

  $$\phi(x,y) = (y,x) \qquad \varphi(x,y) = (x,-y)$$

  Ambas son simetrías. El eje de ϕ es la recta vectorial cuyos elementos son de la forma (a,a) (bisectriz del primer y tercer cuadrante). El eje de φ es el eje de abscisas como recta vectorial. ¿Qué rotaciones son $\varphi\circ\phi$ y $\phi\circ\varphi$? ¿Qué relación hay entre ambas?

- Se ha visto que la composición de dos simetrías es una rotación. El recíproco también es cierto: toda rotación es composición de dos simetrías.

  Si r es una rotación, $r = r\circ I_V = r\circ s\circ s$, donde s es cualquier simetría. La aplicación $r\circ s = s'$ es otra simetría.

4.4.3 Isometrías en espacios vectoriales euclídeos.

Ejercicio 4.4.3.1
En el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^3$ se considera el subespacio

$$U = <\{(1,1,1),(0,0,1)\}>$$

1. Determina $U^\perp$
2. Sea $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que a cada vector $v \in \mathbb{R}^3$ le asocia su proyección ortogonal sobre U, y sea $p_{U^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que a cada vector $v \in \mathbb{R}^3$ le asocia su proyección ortogonal sobre $U^\perp$ (ver ejercicio 4.1.1.4). Hallar los vectores $p_U(v)$ y $p_{U^\perp}(v)$ con $v = (x,y,z)$.
3. Se considera el endomorfismo $\phi = p_U - p_{U^\perp}$ de $V = \mathbb{R}^3$. Comprueba que ϕ es una isometría.
4. Supongamos que $\mathcal{B}^* = \{u_1,u_2,u_3\}$ es una base ortonormal de $V = \mathbb{R}^3$ tal que $\{u_1,u_2\}$ es base de U. ¿Cuál es la matriz asociada a ϕ respecto de la base $\mathcal{B}^*$?
5. Muestra gráficamente el comportamiento de ϕ.

Ejercicio 4.4.3.2
En el espacio vectorial euclídeo $V = \mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes endomorfismos ϕ_i, determinados por sus matrices asociadas respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$\phi_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi_4 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\phi_5 : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi_6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \phi_7 : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_8 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comprueba que cada uno de los endomorfismos anteriores es una isometría.

2. Determina cuáles de las isometrías anteriores vienen definidas por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

   con $0 \leq \theta < 2\pi$.
   ¿Cuál es el polinomio característico de cada uno de tales endomorfismos?

3. Comprueba que los endomorfismos no considerados en el apartado anterior tienen todos ellos polinomio característico igual a $X^2 - 1$.
   Determina para cada uno de ellos una base respecto de la cuál la matriz asociada sea diagonal.
   Comprueba que las bases obtenidas son ortogonales.

4. Representa gráficamente el comportamiento de todos los endomorfismos dados.

5. Completa la tabla siguiente donde en cada casilla debe aparece la composición de los dos endomorfismos de la fila y la columna correspondientes, como se indica en los ejemplos:
   · en la tercera casilla de la primera fila aparece ϕ_3 porque $\phi_3 = \phi_1 \circ \phi_3$,
   · en la sexta casilla de la cuarta fila aparece ϕ_7 porque $\phi_7 = \phi_4 \circ \phi_6$,
   · como $\phi_8 = \phi_6 \circ \phi_4 = \phi_3 \circ \phi_7$ aparece en los lugares (6,4) y (3,7) de la tabla, ...

$\circ$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8
ϕ_1			ϕ_3					
ϕ_2		ϕ_3						
ϕ_3							ϕ_8	
ϕ_4						ϕ_7		
ϕ_5								
ϕ_6				ϕ_8				
ϕ_7								
ϕ_8								ϕ_1

6. Observando la tabla comprueba que $\phi_1 \circ \phi_i = \phi_i \circ \phi_1 = \phi_i$ para $i = 1, 2, ..., 8$. Esto se expresa diciendo que ϕ_1 es el elemento neutro del conjunto $G = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_8\}$ con la composición

7. Observando la tabla determina para cada ϕ_i el ϕ_j tal que $\phi_i \circ \phi_j = \phi_j \circ \phi_i = \phi_1$. Esto se expresa diciendo que ϕ_j es el elemento simétrico o inverso de ϕ_i (respecto la composición).

   El hecho de que el conjunto G con la composición $\circ$ de aplicaciones goce de las dos últimas propiedades y además de la propiedad asociativa (el producto de matrices es asociatvo) se expresa diciendo que $(G, \circ)$ es un grupo.

8. Mirando la tabla determina tres subconjuntos de G que con la composición tengan estructura de grupo. En este caso se dice que cada uno de esos subconjuntos es un susbgrupo de G.

Ejercicio 4.4.3.3
Sean ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 los endomorfismos de $V = \mathbb{R}^3$ definidos, respecto de la base canónica, por las matrices siguientes.

$$M(\phi_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad M(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Demuestra que los endomorfismos ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son todos ellos isometrías (o transformaciones ortogonales).

2. Las transformaciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son simetrías (vectoriales). Señala para cada una de ellas, el plano de vectores fijos (o base de la simetría), así como un vector que se transforme en su opuesto. ¿Qué relación hay entre el plano y el vector?

3. ¿Qué tipo de isometría es $\phi_1 \cdot \phi_3$? Señala los elementos que la caracterizan.

4. Sea $U =< e_2, e_3 >$ y ρ la restricción de $\phi_2 \cdot \phi_3$ a U. ¿Qué tipo de isometría es ρ?

5. ¿Tiene algún vector fijo $\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3$?

Ejercicio 4.4.3.4
Se consideran las siguientes bases de $V = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (1, -1, 0)\}$$

$$\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

y la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sea ϕ el endomorfismo de $V = \mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base $\mathcal{B}$, por la matriz M ($M_{\mathcal{B}}(\phi) = M$), y sea ψ el endomorfismo de $V = \mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base $\mathcal{B}_c$, por la matriz M ($M_{\mathcal{B}_c}(\psi) = M$).

1. Demuestra que:
   · M es una matriz ortogonal.
   · ϕ no es una isometría en $V = \mathbb{R}^3$.
   · ψ es una isometría en $V = \mathbb{R}^3$.

2. Suponiendo que ρ es endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo V, ¿son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?
   · *Si M es una de las matrices asociadas a ρ, ρ es una isometría si y sólo si M^tM es la matriz identidad*
   · *Si M una matriz asociada a ρ respecto de una base ortonormal de V, ρ es una isometría si y sólo si M^tM es la matriz identidad*

3. Demuestra que ψ es una simetría (vectorial), y determina el plano de vectores fijos (base de la simetría).

4. Halla una isometría ρ de $V = \mathbb{R}^3$ tal que $\psi \circ \rho = \varphi$ sea la simetría que tiene como plano de vectores fijos el generado por e_1 y e_2. Dí qué tipo de transformación es ρ y establece los elementos que la caracterizan.

Ejercicio 4.4.3.5
Se consideran las isometrías ϕ_1 y ϕ_2 de $V = \mathbb{R}^3$ siguientes

- ϕ_1 es una rotación de eje la recta vectorial $U =< \{e_1 + e_2\} >$ y amplitud $\frac{\pi}{3}$.
- ϕ_2 es una simetría ortogonal respecto el plano vectorial $U^\perp$ (con $U =< \{e_1 + e_2\} >$).

1. Escribe las matrices asociadas a ϕ_1 y ϕ_2 respecto de la base canónica de $V = \mathbb{R}^3$.
2. Determina el tipo de isometrías que son $\phi_1 \circ \phi_2$ y $\phi_2 \circ \phi_1$.
3. ¿Las isometrías $\phi_1 \circ \phi_2$ y $\phi_2 \circ \phi_1$ dejan algún vector fijo?

4.4.4 Transformaciones ortogonales en un espacio de dimensión n

El estudio del caso general es algo más complejo. Vamos a ir estableciendo pequeños resultados que nos permitirán finalmente enunciar el teorema por el que queda determinada la forma matricial más sencilla que puede asociarse a una transformación ortogonal.

En lo que sigue V es un espacio euclídeo de dimensión n y ϕ una transformación ortogonal definida en V.

Lema 4.4.1
Si U es un subespacio vectorial de V ϕ-invariante, se tiene

1. $\phi(U) = U$
2. *$U^\perp$ es ϕ-invariante, y $\phi(U^\perp) = U^\perp$*

Demostración
Si $\{u_1, \cdots, u_l\}$ es una base de U, la familia de vectores $\{\phi(u_1), \cdots, \phi(u_l)\}$ es una base de U:
- Los vectores $\phi(u_1), \cdots, \phi(u_l)$ son linealmente independientes por ser ϕ inyectiva.
- $\phi(u_i) \in U$ para $i = 1, \cdots, l$ por ser ϕ-invariante.
- Como U tiene dimensión l, $< \{\phi(u_1), \cdots, \phi(u_l)\} >= U$
Se deduce entonces que $\phi(U) = U$.
Para probar el punto 2 basta ver que $\phi(U^\perp) \subset U^\perp$.
Sea $u \in \phi(U^\perp)$, $w \in U^\perp$ tal que $\phi(w) = u$ y v un vector cualquiera de U. Veámos que el producto escalar de u y v es 0.
El vector $v = \phi(v')$ con $v' \in U$ por el apartado 1. Entonces $u \cdot v = \phi(w) \cdot \phi(v') = w \cdot v' = 0$.

En el caso de que el 1 sea valor propio de ϕ, el subespacio $V_\phi(1) = Ker(\phi - I_V)$ es ϕ-invariante, y como consecuencia del lema anterior $\phi(V_\phi(1)^\perp) = V_\phi(1)^\perp$. Puede considerarse entonces ϕ restringido a $W = V_\phi(1)^\perp$: $\phi_W : W \to W$. Una situación análoga se tiene cuando el -1 es valor propio de ϕ. Una vez hechas estas consideraciones podemos demostrar los siguientes resultados.

Lema 4.4.2

1. *Si 1 es valor propio de ϕ y $W = V_\phi(1)^\perp$, la transformación ortogonal $\phi|_W : W \to W$ no tiene como valor propio el 1, y $dimV_\phi(1)$ coincide con la multiplicidad del 1 como raiz del polinomio característico de ϕ.*

2. *Si -1 es valor propio de ϕ y $W = V_\phi(-1)^\perp$, la transformación ortogonal $\phi|_W : W \to W$ no tiene como valor propio el -1, y $dimV_\phi(-1)$ coincide con la multiplicidad del -1 como raiz del polinomio característico de ϕ.*

Demostración

Sólo vamos a probar el primero de los apartados. En el segundo el razonamiento es completamente análogo.

Supongamos que 1 es raiz de $p_{\phi|_W}(X)$. En este caso existe un vector no nulo $v \in W$ tal que $\phi|_W(v) = \phi(v) = v$. Por tanto $v \in V_\phi(1) \cap V_\phi(1)^\perp = \{\mathbf{0}\}$, lo que es contradictorio con el hecho de que v es no nulo.

Se tiene que $p_\phi(X) = (X-1)^s p_{\phi|_W}(X)$ siendo $s = dimV_\phi(1)$ (considerar en V una base formada por una base de $V_\phi(1)$ y una de W). Puesto que el 1 no es raiz de $p_{\phi|_W}(X)$, s coincide con la multiplicidad del 1 en $p_\phi(X)$.

Nos queda por analizar qué sucede cuando el polinomio característico de ϕ no tenga raices reales. Observemos que en este caso todos los factores irreducibles de $p_\phi(X)$ son de grado 2. Además si $X^2 + \alpha X + \beta$ es uno de esos factores (cuyo discriminante es menor que cero) podemos expresarlo como $(X-a)^2 + b^2$ con $b \neq 0$ (hacer $a = -\alpha/2$ y $b = \sqrt{4\beta - \alpha^2}/2$).

Lema 4.4.3

Si $p_\phi(X)$ no tiene raices reales y $(X-a)^2 + b^2$ con $b \neq 0$ es uno de sus factores irreducibles, existe una base ortonormal de V respecto de la cual la matriz asociada a ϕ es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$.

Demostración

La prueba de este enunciado necesita definir algunas aplicaciones auxiliares y obtener destintos resultados acerca de las mismas. Esas aplicaciones son los endomorfismos de V siguientes:

$$\psi = (\phi - aI_V)^2 + b^2 I_V \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\phi - aI_V}{b}$$

.

1. Al ser $(X-a)^2 + b^2$ un factor del polinomio característico, el subespacio $W = Ker(\psi)$ de V es no nulo.

   Las aplicaciones φ y ψ conmutan, lo que garantiza que W es φ-invariante.

   Sea φ_W la restricción de φ a W. Es fácil comprobar que $\varphi_W^2 = -I_W$, lo que garantiza que existe un vector $u \in W$ unitario tal que $\varphi(u) \neq \mathbf{0}$.

   Los vectores u y $\varphi(u)$ son linealmente independientes, puesto que en caso contrario existiría un número $\alpha \neq 0$ tal que $\varphi(u) = \alpha u$, pudiendo deducir que $\phi(u) = (a + b\alpha)u$. El valor $a + b\alpha$ es por tanto un autovalor real de ϕ, lo que contradice la hipótesis.

2. Se considera el subespacio $U =< u, \varphi(u) >$ de W, de dimensión 2 por lo visto en el púnto anterior. Veamos que U es ϕ-invariante.

   El vector $\phi(u)$ puede escribirse como $\phi(u) = au + b\frac{\phi(u)-au}{b} = au + b\varphi(u) \in U$

   Como $u \in W$, $\psi(u) = \mathbf{0}$, lo que conlleva que $\phi^2(u) - a\phi(u) = a\phi(u) - (a^2 + b^2)u$. Usando esta igualdad y teniendo en cuenta que $\varphi = \frac{\phi - aI_V}{b}$, se puede deducir que $\phi(\varphi(u)) = a\varphi(u) - bu \in U$.

   El hecho de que la imagen por ϕ de una base de U esté contenida en U, es suficiente para asegurar que U es ϕ-invariante.

3. La aplicación ϕ_U (restricción de ϕ a U) es una transformación ortogonal en U, por serlo ϕ en V. En tal caso el determinante de cualquiera de sus matrices asociadas es 1 o -1. La matriz de ϕ_U respecto de la base $\mathcal{B}_U = \{u, \varphi(u)\}$ es, teniendo en cuenta el apartado 2,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   cuyo determinante $a^2 + b^2$ es positivo, por tanto $a^2 + b^2 = 1$.

4. La base $\mathcal{B}_U$ es ortonormal como vemos a continuación.

   - El vector u es unitario porque así se había elegido.

   - El producto escalar de u y $\varphi(u)$ es 0:

$$u \in W \Rightarrow (\phi^2 - 2a\phi + (a^2 + b^2)I_V)(u) = \mathbf{0} \Rightarrow \phi^2(u) - 2a\phi(u) + u = \mathbf{0}$$

   Al multiplicar escalarmente la última expresión por $\phi(u)$ y aplicando que ϕ conserva los productos escalares, obtenemos que $u \cdot \phi(u) = a$. Esto llevado al producto de u y $\varphi(u)$, prueba que $u \cdot \varphi(u) = 0$.

   - El que ϕ conserve las normas, $u \cdot \phi(u) = a$ y $a^2 + b^2 = 1$ lleva a probar que $\varphi(u) \cdot \varphi(u) = \|\varphi(u)\|^2 = 1$.

Todas las consideracioones anteriores sirven para garantizar que $V = U \oplus U^\perp$ con U y $U^\perp$ subespacios ϕ-invariantes. Si $\mathcal{B} = \{u, \varphi(u), u_1, \cdots, u_{n-2}\}$ es una base ortonormal de V, la matriz asociada a ϕ respecto dicha base es como la descrita en el enunciado.

Los lemas precedentes conducen al siguiente teorema.

Teorema 4.4.1
Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n, y ϕ una transformación ortogonal definida en V. Existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V respecto de la cual la matriz asociada a ϕ es

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_t & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N(\theta_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N(\theta_q) \end{pmatrix}$$

donde I_s, I_t son las matrices identidad de orden s y t respectivamente (s es la multiplicidad del 1 y t es la multiplicidad del -1 en el polinomio característico de ϕ).

Las raices complejas $cos\theta_j \pm sen\theta_j$ de $p_\phi(X)$ producen las cajas $N(\theta_j) = \begin{pmatrix} cos\theta_j & -sen\theta_j \\ sen\theta_j & cos\theta_j \end{pmatrix}$ con $\theta_j \in [0, 2\Pi), \theta_j \neq 0, \Pi$

Demostración

Basta escribir $V = V_\phi(1) \oplus_\perp V_\phi(-1) \oplus_\perp W$, donde cada subespacio es ϕ-invariante. Después basta aplicar en cada uno de ellos, para el endomorfismo restringido, el lema correspondiente. En el caso de W, el lema 3 habrá de aplicarse reiteradamente.

Ejemplo 4.4.2

- Una matriz ortogonal real es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.
- Si $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación ortogonal, existe un subespacio U de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 tal que $\phi(U) = U$.

  El polinomio $p_\phi(X)$ es de grado 3, por tanto una de sus raices α es real ($\alpha = 1$ o -1). Basta considerar $U =< u >$ siendo $\phi(u) = \alpha u$.
- Sea ϕ la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ definida respecto de la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

  El polinomio característico de la isometría es $p_\phi(X) = (X-1)(X^2+1) = (X-1)((X-0)^2+1^2)$, con lo que podemos deducir que respecto de alguna base ortonormal la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Para obtener esa base ortonormal, calculamos

$$V_{(1)} =< \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\} > \text{ y } V_{(1)}^\perp =< \{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)\} >$$

  Si φ es la rectricción de ϕ a $V_{(1)}^\perp$, la matriz de φ respecto $\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Lo anterior garantiza que la matriz de ϕ respecto de la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$
  $\mathcal{B} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)\}$ es la descrita al comienzo.

  La isometría ϕ es la rotación de amplitud $\frac{\Pi}{2}$ y de eje la recta $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
- Muestra graficamente cuál es el efecto que produce sobre un vector de $\mathbb{R}^3$ la isometría de matriz, respecto base canónica,

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sea $V = \mathbb{R}^n$, U un subespacio no nulo de V y $U^\perp$ su ortogonal. El endomorfismo $\phi = p_U - p_{U^\perp}$ de V es una transformación ortogonal. La matriz asociada a dicha isometría respecto de una base de $\mathbb{R}^n$ con los primeros vectores en U (ortogonales entre si o no) y los demás en $U^\perp$ es

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

donde I_r representa la matriz identidad de orden $r = dimU$, $-I_{n-r}$ la matriz opuesta a la identidad de orden $n-r = dimU^\perp$ y los $0's$ las matrices nulas de tamaños adecuados.

En este caso ϕ recibe el nombre de *simetría ortogonal respecto el subespacio* U.

Finalmente, y a título de ejemplo, vamos a clasificar los tipos de transformaciones ortogonales en espacios V de dimensión 3.

Ejemplo 4.4.3
Sea $\phi : V \to V$ una isometría cualquiera. Como es habitual, denotamos por $V_{(1)}$ el subespacio de V formado por el conjunto de vectores fijos por ϕ.

- Si $dimV_{(1)} = 3$, es inmediato que $\phi = I_V$ y $p_\phi(X) = (X-1)^3$.

- Si $V_{(1)}$ es un plano vectorial ($dimV_{(1)} = 2$), se tiene que $p_\phi(X) = (X-1)^2(X+1)$ y $V_{(1)}^\perp = V_{(-1)}$ (de dimensión 1). Si $\mathcal{B}$ es una base de V, donde los dos primeros vectores son base de $V_{(1)}$ y el tercero es base de $V_{(1)}^\perp$, la matriz asociada a ϕ respecto de esa base es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Observar que $\mathcal{B}$ es ortogonal, pero sus vectores no son necesariamente unitarios. Si se desea que la bases sea ortonormal no tendremos más que dividir por su norma a los vectores de $\mathcal{B}$.

  En este caso se dice que ϕ *es una simetría ortogonal respecto del plano de vectores invariantes.*

- Si $dimV_{(1)} = 1$, $V_{(1)}$ es una recta vectorial, y $V_{(1)}^\perp$ es un plano. La restricción de ϕ a $V_{(1)}$ es obviamente la identidad. Puesto que $V_{(1)} \cap V_{(1)}^\perp = \{\mathbf{0}\}$, la restricción de ϕ a $V_{(1)}^\perp$ sólo deja fijo el vector nulo, y en consecuencia tal restricción es una rotación distinta de la identidad.

  Existe entonces una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de V (u_1 base de $V_{(1)}$, $\{u_2, u_3\}$ base de $V_{(1)}^\perp$) respecto de la cual la matriz asociada a ϕ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

  con $\theta \neq 0$.

  Una aplicación ϕ del tipo anterior o la identidad en V recibe el nombre de *rotación vectorial*

- Consideremos el caso en el que $dimV_{(1)} = 0$. Puesto que el 1 no es raiz del polinomio característico de ϕ, se tendrá que

$$p_\phi(X) = (X+1)^3 \quad \text{o} \quad p_\phi(X) = (X+1)((X-cos\theta)^2 + sen\theta^2) \quad \text{con} \quad \theta \neq 0, \Pi$$

  De darse la primera circunstancia, $\phi = -I_V$ (la búsqueda de la base ortonormal es por tanto innecesaria).

  En la segunda, la aplicación restringida a $V_{(-1)}^\perp$ es una rotación ρ, y podrá escribirse como producto de dos simetrías s_1, s_2 (ver isometrías en espacios de dimensión 2).

Si $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de V con $u_1 \in V_{(-1)}$ y $u_2, u_3 \in V_{(-1)}^{\perp}$, la matriz de la aplicación es

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta \neq 0, \Pi$.

Obsérvese que

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

donde $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ es la matriz de la simetría s_i, $i = 1, 2$ respeto de la base $\{u_2, u_3\}$ de $V_{(-1)}^{\perp}$. Por tanto las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_i & b_i \\ 0 & c_i & d_i \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2$$

representan simetrías en V (los espacios propios asociados al autovalor 1 son de dimensión 2).

La primera de las matrices de la descomposición de M en [1] también representa una simetría. De todo ello se deduce que es este caso ϕ es producto de tres simetrías.

¿Sucede eso mismo con la aplicación $-I_V$?

Quedan pues estudiadas todas las isometrías en un espacio de dimensión 3.

4.5 Espacio Afín

El conjunto $\mathbb{R}^n$ ha aparecido con anterioridad en múltiples ocasiones, y siempre bajo su estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En esta sección y otras posteriores, vamos a trabajar con $\mathbb{R}^n$ desde dos perspectivas distintas, y de forma conjunta.

Por un lado la ya tratada, $V = \mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial donde sus elementos reciben el nombre de vectores y son denotados por $v, w, u, \cdots$. Por otro, $X = \mathbb{R}^n$ como conjunto de puntos, a los que denotaremos por $P, Q, R, \cdots$.

En cursos anteriores, y para los casos $n = 2, 3$, el alumno se ha familiarizado con conceptos tales como recta determinada por dos puntos, plano que pasa por un punto y tiene dirección dada, $\cdots$ Ahora se trata de establecer ciertas relaciones entre puntos, y puntos y vectores, que nos permiten abordar tales conceptos y deducir las propiedades geométricas más elementales de una forma algo más rigurosa. Se trata de "mirar y ver" la geometría de puntos a través del álgebra de vectores.

El espacio afín n-dimensional está constituido por los elementos siguientes. El conjunto de puntos $X = \mathbb{R}^n$ y una aplicación de $X \times X \to V$ que a cada par de puntos (P, Q) le asocia un vector $v = \vec{PQ}$ (también $v = Q - P$ o $Q = P + v$) verificando las dos propiedades siguientes:

i) $\forall P, Q, R \in X$, $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$

ii) $\forall P \in X$, $\forall v \in V$, existe un único $Q \in X$ tal que $v = \vec{PQ}$.

Definición 4.5.1

El conjunto de puntos $X = \mathbb{R}^n$ junto una aplicación como la descrita anteriormente, recibe el nombre de espacio afín (estandar) asociado a V. Se define dimensión del espacio afín como la dimensión de V.

- Considerando el espacio afín $X = \mathbb{R}^2$, y realizando una gráfica sencilla, uno puede observar que sobre cada punto de X, se tiene una copia de $V = \mathbb{R}^2$.

Proposición 4.5.1
Son propiedades inmediatas las siguientes:

1. *Para cualquier punto P, el vector $\vec{PP}$ es el vector nulo.*
2. *Los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QP}$ son opuestos entre si.*
3. *Si $\vec{PQ} = \vec{P'Q'}$, entonces $\vec{PP'} = \vec{QQ'}$*

4.5.1 Sistemas de referencia y cambio de sistema de referencia

Definición 4.5.2
1. Se dice que los $n+1$ puntos $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ de X son un sistema de referencia de X con origen el punto P_0 si el conjunto de vectores $\{\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$ es una base de V.
2. Dado un punto $P \in X$ y un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, se llaman coordenadas de P en $\mathcal{R}$ a las coordenadas del vector $\vec{P_0P}$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$.
3. El sistema de referencia $\mathcal{R}_c = \{P_0; \vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}\}$ recibe el nombre de sistema de referencia canónico.

Es inmediato observar que en todo sistema de referencia el origen tiene coordenadas $(0, \cdots, 0)$. Además es conveniente ver que no sólo un sistema de referencia, determina una base, sino que también dada una base de V $\{v_1, \cdots, v_n\}$, y un punto P_0 de X, queda determinado un sistema de referencia. El sistema en cuestión es $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ donde cada P_i es el punto tal que $\vec{P_0P_i} = v_i$. Es por ello que también se llame sistema de referencia al conjunto $\{P_0; \vec{P_0P_1}, \cdots, \vec{P_0P_n}\}$. En algunos textos el primero es llamado sistema de referencia afín, y el segundo sistema de referencia vectorial, pero aquí no haremos tal distinción, y nos referiremos a uno u otro según convenga.

A continuación vamos a ver la relación que existe entre las coordenadas de un punto respecto sistema de referencia distintos, obteniendo lo que se conoce como ecuación matricial de un cambio de sistema de referencia.

Si $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ y $\mathcal{R}' = \{Q_0, Q_1, \cdots, Q_n\}$ son dos sistemas de referencia de X, y $P \in X$ tiene coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ respecto $\mathcal{R}$ y coordenadas $(y_1, \cdots, y_n)$ respecto $\mathcal{R}'$, ¿qué relación hay entre ambas?

Se tiene que $\vec{P_0P} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{P_0P_i}$ y $\vec{Q_0P} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{Q_0Q_i}$.

Supuesto que las coordenadas de P_0 en $\mathcal{R}'$ son $(a_1, \cdots, a_n)$, y que las coordenadas del vector $\vec{P_0P_i}$ $i = 1, \cdots, n$ respecto de la base $\{\vec{Q_0Q_1}, \cdots, \vec{Q_0Q_n}\}$ son $(a_{1i}, \cdots, a_{ni})$, se tiene

$$\vec{Q_0P} = \vec{Q_0P_0} + \vec{P_0P} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^n x_i \vec{P_0P_i} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{Q_0Q_j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \vec{Q_0Q_i} + \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n x_i a_{ji}) \vec{Q_0Q_j} = \sum_{i=1}^n (a_i + \sum_{j=1}^n x_i a_{ji}) \vec{Q_0Q_j}$$

Puesto que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, tenemos que

$$y_i = a_i + \sum_{j=1}^n x_i a_{ji}$$

para $i = 1, \cdots, n$. Ese conjunto de relaciones puede expresarse matricialmente de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

expresión que recibe el nombre de ecuación matricial del cambio de sistema de referencia.

Si denotamos por $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las bases determinadas por $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ respectivamente, la igualdad anterior puede leerse como

coord(P) en $\mathcal{R}'$ = coord(P_0) en $\mathcal{R}'$+ matriz que expresa $\mathcal{B}$ respecto $\mathcal{B}'$ · coord(P) en $\mathcal{R}$

Ejemplo 4.5.1

La relación descrita por la expresión anterior es tratada también en los siguientes ejemplos.

- En $X = \mathbb{R}^2$ se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0(1,2), P_1(2,3), P_2(1,4)\}$.

  Las coordenadas del punto P_1 en el sistema de refencia $\mathcal{R}$ son $(1,0)$. El origen del sistema de refencia canónico tiene coordenadas $(-1,-2)$ en $\mathcal{R}$.

  Si P es un punto de coordenadas (x,y) según el sistema canónico, sus coordenadas (x',y') en el sistema $\mathcal{R}$ vienen dadas por

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  ya que $\vec{P_0P_1} = (1,1)$ y $\vec{P_0P_2} = (0,2)$

- En $X = \mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{P_0(1,2), P_1(2,3), P_2(1,4)\}$ y $\mathcal{R}' = \{Q_0(1,1), Q_1(-1,-1), Q_2(2,0)\}$. El sistema $\mathcal{R}$ tiene asociada la base $\mathcal{B} = \{\vec{P_0P_1} = (1,1), \vec{P_0P_2} = (0,2)\}$ y el sistema $\mathcal{R}'$ tiene asociada la base $\mathcal{B}' = \{\vec{Q_0Q_1} = (-2,-2), \vec{Q_0Q_2} = (1,-1)\}$. Por tanto la matriz asociada al cambio de base que expresa $\mathcal{B}$ en función de $\mathcal{B}'$ es $\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Como $\vec{Q_0P_0} = (0,1) = -\frac{1}{4}(\vec{Q_0Q_1} + 2\vec{Q_0Q_2})$, las coordenadas de P_0 en $\mathcal{R}'$ son $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

  Se tiene entonces que si un punto P tiene coordenadas (x,y) en función del sistema de referencia $\mathcal{R}$, las coordenadas (x',y') de ese punto en el sistema $\mathcal{R}'$ vendrán dadas por

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  ¿Cuáles son las coordenadas en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ del punto P de coordenadas $(2,3)$ en el sistema de referencia canónico?

4.5.2 Aplicaciones Afines

Este apartado vamos a dedicarlo al estudio de las aplicaciones propias de la estructura afín, las aplicaciones afines.

1. Definición y ejemplos

Sea $f : X = \mathbb{R}^n \to X = \mathbb{R}^n$ una aplicación y sea P un punto cualquiera , pero fijo, de X. Esos dos objetos nos permiten definir la siguiente aplicación en el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$.

$$\phi_P : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$$

$$v = \vec{PQ} \to \phi_P(v) = f(P)\vec{f}(Q)$$

No siempre la aplicación ϕ_P es lineal, pero nuestro interés estará centrado en el caso en que esa aplicación sea lineal. Por un lado las aplicaciones lineales son las específicas de los espacios vectoriales, pero además se tiene la siguiente

Proposición 4.5.2
En las condiciones anteriores, si ϕ_P es lineal, entonces ϕ_R es lineal cualquiera que sea el punto R de X. Además $\phi_P = \phi_R$.

Demostración
Basta ver que $\phi_P(v) = \phi_R(v)$ cualquiera que sea el vector v de V. Sea $v = \vec{PQ} = \vec{RS}$.

$$\phi_P(v) = \phi_P(\vec{PQ}) = \phi_P(\vec{RS}) = \phi_P(\vec{PS} - \vec{PR}) = \phi_P(\vec{PS}) - \phi(\vec{PR}) =$$
$$= f(P)\vec{f}(S) - f(P)\vec{f}(R) = f(R)\vec{f}(S) = \phi_R(\vec{RS}) = \phi_R(v)$$

Definición 4.5.3
Sea $f : X = \mathbb{R}^n \to X = \mathbb{R}^n$ una aplicación.

1. *Si para la aplicación anterior existe un punto P para el cuál la aplicación $\phi_P : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ definida como antes es lineal, se dice que f es afín. La aplicación $\phi_P = \phi$ se denomina aplicación lineal asociada a f.*

2. *Una aplicación afín se dice que es una transformación afín si es biyectiva, o equivalentemente, si la aplicación lineal asociada es un isomorfismo.*

La proposición anterior nos permite, para conocer si una aplicación es afín o no, considerar como origen de cualquier vector el punto $P_0 = (0, 0, \cdots, 0)$ y estudiar la linealidad o no de la aplicación $\phi_{P_0} = \phi$

Ejemplo 4.5.2
Los siguientes ejemplos muestran algunas aplicaciones afines, y otras que no lo son.

- La aplicación $f : X = \mathbb{R}^2 \to X = \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (5x + 2, x - y + 2)$ es afín.
- La aplicación $g : X = \mathbb{R}^2 \to X = \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (5x^2, x - y + 2)$ no es afín.
- La aplicación $h : X = \mathbb{R}^2 \to X = \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = (5x + 2, 5y - 3)$ es afín.
- La aplicación $k : X = \mathbb{R}^2 \to X = \mathbb{R}^2$ definida por $k(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$ es afín.
- La aplicación $l : X = \mathbb{R}^2 \to X = \mathbb{R}^2$ definida por $l(x, y) = (x - 3, y + 6)$ es afín.

  Obsérvese que en todos los casos, si $P' = (x', y')$ es la imagen del punto $P = (x, y)$ entonces se puede establecer una igualdad del tipo

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  En la igualdad anterior la matriz (a_{ij}) puede considerarse, en cada caso, la de la aplicación lineal asociada respecto de la base canónica.

- Sea r la recta afín de ecuación $2x - y = 3$, y sea m la aplicación de $X = \mathbb{R}^2$ en $X = \mathbb{R}^2$ definida por $m(P) = P'$ donde P' es el punto de intersección de la recta r con la recta que pasa por P y tiene por vector director $v = (1,1)$. Tal aplicación es afín.

  Basta ver que si $P = (x,y)$ y $P' = (x',y')$ entonces se tiene una relación matricial como la descrita anteriormente, donde la aplicación lineal asociada está determinada por la matriz (a_{ij})

- Sea r la recta afín de ecuación $2x - y = 3$, y sea n la aplicación de $X = \mathbb{R}^2$ en $X = \mathbb{R}^2$ definida por $n(P) = P$" donde P" está determinado por la condición $\vec{PP}" = 2\vec{PP'}$, donde P' es la imagen de P por la aplicación m anterior. Un método análogo al señalado para m prueba que n es afín.

Es un buen ejercicio:
- Representar gráficamente el efecto que produce sobre distintos puntos cada una de las aplicaciones anteriores. Así como el producido, en cada caso, por la aplicación lineal asociada.
- Determinar el conjunto de puntos fijos (aquellos que coinciden con su imagen) por cada una de las aplicaciones.
- Establecer la relación, cuando sea posible, entre el conjunto de puntos fijos por una aplicación afín y el conjunto de vectores fijos por su aplicación lineal asociada.
- Determinar en qué casos la aplicación afín es una transformación.
- Elegir entre términos tales como traslación, homotecia, giro, ... áquel que parezca apropiado asignar a cada una de las aplicaciones afines anteriores.

2. Determinación de una aplicación afín

Supongamos que en el espacio afín $X = \mathbb{R}^n$ hay fijado un sistema de refencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$, y que $f : X \to X$ es una aplicación afín de la que conocemos las imágenes por f de los puntos del sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Obsérvese que esto último es equivalente a conocer la imagen por f del punto P_0 y las imágenes por ϕ de los vectores de la base $\mathcal{B}$ determinada por $\mathcal{R}$: $v_i = \vec{P_0P_i}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, donde ϕ es la aplicación lineal asociada a f.

A continuación lo que vamos a ver es que basta tener cualquiera de esas dos condiciones (equivalentes) para poder determinar la imagen de cualquier punto de X.

Sea P un punto cualquiera de X. Por la definición de aplicación lineal asociada a una aplicación afín se tiene que $\overrightarrow{f(P_0)f(P)} = \phi(\vec{P_0P})$. Por ello, si $(x_1, \cdots, x_n)$ son las coordenadas de P, $(x'_1, \cdots, x'_n)$ son las coordenadas de $f(P)$, y $(a_1, \cdots, a_n)$ son las de $f(P_0)$ (todas ellas referidas al sistema de referencia $\mathcal{R}$) podemos establecer la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M_{\mathcal{B}}(\phi) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

denominada ecuación matricial de la aplicación afín f respecto del sistema de refencia $\mathcal{R}$.

Es fácil comprobar el recíproco de lo aquí visto. Una expresión matricial como la anterior permite definir una aplicación afín, y sólo una, en X.

3. Distancia entre puntos. Movimientos

Hasta aquí hemos considerado $X = \mathbb{R}^n$ como conjunto de puntos y $V = \mathbb{R}^n$ como conjunto de vectores. Hemos establecido una aplicación de $X \times X$ en V que define a X como espacio afín con V como espacio vectorial asociado. También se ha viso que el concepto de aplicación afín en X está ligado al de endomorfismo en V.

Además en V tenemos un producto escalar que nos permite definir norma de un vector, concepto que vamos a emplear para definir distancia entre dos puntos de X.

Definición 4.5.4
Dados dos puntos $P, Q \in X$, se define distancia de P a Q como el número $d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$.

Observar que la distancia es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$

Proposición 4.5.3
Algunas de las propiedades de la distancia son las siguientes. Sean $P, Q, R \in X$ puntos cualesquiera, se verifica

1. $d(P,Q) \geq 0$, $d(P,Q) = d(Q,P)$
2. $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
3. $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

La prueba de las propiedades anteriores se deduce de forma inmediata de las relativas a la norma.

Definición 4.5.5
El espacio afín $X = \mathbb{R}^n$ junto con la distancia definida anteriormente recibe el nombre de espacio afín euclídeo (estandar).

En el espacio afín euclídeo $X = \mathbb{R}^n$ se consideran aquellas aplicaciones afines que son biyectivas (transformaciones afines). Entre dichas aplicaciones vamos a seleccionar áquellas que conservan las distancias, para después realizar un estudio algo más detallado de las mismas.

Definición 4.5.6

1. *Una transformación afín f se dice que conserva las distancias si $\forall P, Q, \in X$ se verifica que $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.*
2. *Una transformación afín que conserva las distancias se dice que es un movimiento.*

Recordemos que decir que una aplicación afín es transformación afín es equivalente a decir que la aplicación lineal asociada es un isomorfismo. En la siguiente proposición se ve la relación entre "conservar distancias" y "conservar normas".

Proposición 4.5.4
Sea $f : X = \mathbb{R}^n \to X = \mathbb{R}^n$ una transformación afín, y sea $F : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ el isomorfismo asociado a f. Se verifica:

$$f \quad \text{es movimiento si y sólo si} \quad F \quad \text{es isometría}$$

Demostración
Supongamos que f es un movimiento, y sea $v = \vec{PQ}$ un vector cualquiera de V con $P, Q \in X$. La siguiente cadena de igualdades prueba que ϕ es una isometría.

$$\|v\| = \|\vec{PQ}\| = d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\phi(\vec{PQ})\| = \|\phi(v)\|$$

Supongamos que ϕ es isometría, y que P, Q son puntos cualesquiera de X. Veamos que f conserva las distancias.

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\phi(\vec{PQ})\| = \|\vec{PQ}\| = d(P,Q)$$

Una última observación antes de pasar a estudiar algunas aplicaciones afines particulares. En la definición de movimiento se exige que la aplicación sea biyectiva, condición innecesaria puesto que el hecho de conservar distancias conduce a la biyectividad, como se señala en uno de los ejercicios de este capítulo. Sólo un planteamiento más cómodo desde el principio nos ha llevado a establecer la definición en esos términos.

Es un ejercicio sencillo el probar que por un movimiento m rectas se transforman en rectas, una circunferencia de centro C se trasnforma en una circunferencia de centro $m(C)$, $\cdots$

4.6 Estudio de algunas aplicaciones afines particulares

4.6.1 Proyecciones

Sea Y un subespacio afín de $X = \mathbb{R}^n$ de dirección $W(Y)$. Denotemos por S un subespacio de $V = \mathbb{R}^n$ tal que $V = S \oplus W(Y)$.

Si M es un punto cualquiera de X, y $M + S$ es el subespacio afín que pasa por M y tiene dirección S, se verifica que la intersección de los subespacios Y y $M + S$ es no vacia y se reduce a un punto:

Si Q es un punto cualquiera de Y, el vector $\vec{QM}$ se escribe de forma única como $\vec{QM} = s + w$ con $s \in S$, $w \in W(Y)$. Por tanto existe un único punto $M' \in Y$ tal que $w = \vec{QM'}$, deduciéndose que $s = \vec{M'M} \in S$ y $M' \in M + S$. Como M' es único en Y con esa condición, $\{M'\} = Y \cap (M + S)$.

Respetando la notación anterior, y teniendo en cuenta las consideraciones previas, definimos la aplicación

$$p_{Y,S} : X \longrightarrow X$$

$$M \to M'$$

Proposición 4.6.1

La aplicación $\phi_M : V \longrightarrow V$ que a cada vector $v = \vec{MN}$ le asocia el vector $v' = \vec{M'N'}$ ($M' = p_{Y,S}(M)$, $N' = p_{Y,S}(N)$) coincide con la proyección vectorial de base $W(Y)$ y dirección S. La aplicación $p_{Y,S} : X \longrightarrow X$ es por tanto afín, cuya aplicación lineal asociada es $p_{W(Y),S}$

Demostración

Sea Q un punto cualquiera (fijo) de Y. Los vectores $\vec{QM'}$ y $\vec{QN'}$ están en $W(Y)$ puesto que $M', N' \in Y$, y los vectores $\vec{M'M}$ y $\vec{N'N}$ pertenecen a S. Como $\vec{QM} = \vec{QM'} + \vec{M'M}$ y $\vec{QN} = \vec{QN'} + \vec{N'N}$, se tiene que $\vec{QM'} = p_{W(Y),S}(\vec{QM})$ y $\vec{QN'} = p_{W(Y),S}(\vec{QN})$.

$$\phi(\vec{MN}) = \vec{M'N'} = \vec{QN'} - \vec{QM'} = p_{W(Y),S}(\vec{QN}) - p_{W(Y),S}(\vec{QM}) =$$

$$= p_{W(Y),S}(\vec{QN} - \vec{QM}) = p_{W(Y),S}(\vec{MN})$$

Definición 4.6.1

La aplicación afín $p_{Y,S}$ recibe el nombre de proyección (afín) de base Y en la dirección S.

Observar que la proyección anterior deja fijos los puntos de la base, esto es si $M \in Y$ entonces $p_{Y,S}(M) = M$. Como hay puntos fuera de Y que también tienen por imagen M, se puede afirmar que $p_{Y,S}$ no es una transformación, y tampoco movimiento, puesto que no es inyectiva. Además $p^2_{Y,S} = p_{Y,S}$.

Ejemplo 4.6.1
En $X = \mathbb{R}^2$ se considera el subespacio afín $Y = \{(x, y) \in X/x + 2y = 1\}$. Se tiene entonces que $W(Y) =< (-2, 1) >$, y consideramos como subespacio $S =< (1, 1) >$. ¿Cuál es la imagen del punto $M(7, 0)$ por $p_{Y,S}$?

La recta que pasa por M y tiene la dirección de S es la de ecuación $x - y = 7$. La intersección de dicha recta con Y es el punto $M'(5, -2)$. Tal punto es la imagen de M.

4.6.2 Simetrías

Como en el caso de las proyecciones, Y es un subespacio afín de X, S un subespacio suplementario a $W(Y)$, $\cdots$. Definimos la siguiente aplicación

$$s_{Y,S} : X \longrightarrow X$$

$$M \to M"$$

donde $M"$ es el punto de X tal que $M\vec{M}" = 2M\vec{M}'$ siendo $M' = p_{Y,S}(M)$

Proposición 4.6.2
La aplicación $\phi_M : V \longrightarrow V$ que a cada vector $v = M\vec{N}$ le asocia el vector $v" = M"\vec{N}"$ ($M" = s_{Y,S}(M)$, $N" = s_{Y,S}(N)$) coincide con el endomorfismo de V $p_{W(Y),S} - p_{S,W(Y)}$. La aplicación $s_{Y,S} : X \longrightarrow X$ es por tanto afín, cuya aplicación lineal asociada es el endomorfismo señalado anteriormente.

La prueba de esta proposición está basada en la siguiente cadena de igualdades. La justificación de los pasos intermedios se deja como ejercicio.

$$\phi(M\vec{N}) = M"\vec{N}" = M"\vec{M} + M\vec{N} + N\vec{N}" = M\vec{N} + 2(N\vec{N}' - M\vec{M}') = M\vec{N} + 2(N\vec{M} - N'\vec{M}') =$$

$$= N\vec{M} + 2M'\vec{N}' = -M\vec{N} + 2p_{W(Y),S}(M\vec{N}) = (2p_{W(Y),S} - I_{\mathbb{R}^n})(M\vec{N}) = (p_{W(Y),S} - p_{S,W(Y)})(M\vec{N})$$

Definición 4.6.2
La aplicación afín $s_{Y,S}$ recibe el nombre de simetría (afín) de base Y en la dirección S.

Observar que:

- La simetría anterior deja fijos los puntos de la base, esto es si $M \in Y$ entonces $s_{Y,S}(M) = M$. Pero si $M \notin Y$, $s_{Y,S}(M) \notin Y$.
- $s^2_{Y,S} = I_X$, como puede probarse fácilmente.
- La igualdad anterior ya es suficiente para garantizar que la simetría es biyectiva. Otra forma de justificarlo es viendo que la aplicación lineal asociada a la simetría es un isomorfismo, por tanto la simetría (afín) es una transformación, que en general no es movimiento.
- En el caso en que una simetría afín tenga como base una variedad afín cuya dirección sea perpendicular a la dirección de la simetría, es un movimiento.

Recuérdese que en la primera sección de este capítulo se ha probado que si U es un subespacio de V, la aplicación $p_U - p_{U^\perp}$ es una isometría (p_U proyección vectorial de base U y dirección $U^\perp$, y análogo para $p_{U^\perp}$).

En el caso que nos ocupa, haciendo $U = W(Y)$ y $S = U^\perp = W(Y)^\perp$, obtenemos que la aplicación vectorial asociada a la simetría afín $s_{Y,W(Y)^\perp}$ es una isometría, lo que equivale a que $s_{Y,W(Y)^\perp}$ conserve las distancias. En esta situación:

Definición 4.6.3
La simetría afín $s_{Y,W(Y)^\perp}$ recibe el nombre de simetría ortogonal del espacio afín X. Como la variedad afín Y determina $W(Y)$ y $W(Y)^\perp$, dicho movimiento se denota por s_Y.

Ejemplo 4.6.2
En $X = \mathbb{R}^2$ se considera el subespacio afín $Y = \{(x,y) \in X / x + 2y = 1\}$. Se tiene entonces que $W(Y) =< (-2,1) >$, y consideramos como subespacio $S =< (1,1) >$. La imagen del punto $M(7,0)$ por $p_{Y,S}$ es $M'(5,-2)$, por tanto la imagen de M por $s_{Y,S}$ es $M"(3,-4)$. ¿Cuál es la imagen de M por la simetría ortogonal s_Y?

4.6.3 Traslaciones

En este apartado vamos a mostrar cómo cada vector (fijo) v de $V = \mathbb{R}^n$ determina una aplicación en el espacio afín $X = \mathbb{R}^n$ que "mueve" cada punto de X, en la dirección y sentido que indica v, la longitud dada por su módulo.

Dado pues un vector $v \in V$, se define $t_v : X \to X$ como la aplicación que a cada punto P le asigna el punto P' tal que $\vec{PP'} = v$.

Definición 4.6.4
La aplicación t_v anterior recibe el nombre de traslación de vector v.

Proposición 4.6.3
En relación a las traslaciones se tienen las siguientes propiedades.

1. *Toda traslación es un movimiento.*
2. *La traslación $t_{\vec{0}}$ es la aplicación identidad, y cualquier otra traslación t_v con $v \neq \vec{0}$ no deja puntos fijos.*
3. *El vector de una traslación queda determinado por un punto y su imagen.*
4. *Una aplicación afín definida en X es una traslación si y sólo si la aplicación lineal asociada es la identidad en V.*

Demostración
Si $Q \in X$ es un punto cualquiera, denotaremos $Q' = t_v(Q)$.

Sea P un punto fijo de X, y definimos la aplicación $\phi_P : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ que a cada vector $w = \vec{PQ}$ le asocia el vector $w' = \vec{P'Q'}$. Puesto que $v = \vec{PP'} = \vec{QQ'}$, se tiene que $w = \vec{PQ} = \vec{P'Q'} = w'$ y por tanto que $\phi_P = \mathbb{I}_V$. Si tenemos en cuenta toda la información que este hecho nos proporciona, podemos concluir que t_v es afín, es biyectiva y conserva distancias, es decir, es movimiento.

Los puntos segundo y tercero son inmediatos, y una de las implicaciones del último de los apartados está probado al probar el punto 1. Veámos por último que una aplicación afín f cuya aplicación lineal asociada sea la identidad es una traslación.

Si la ecuación matricial de f respecto el sistema de referencia canónico es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \mathbb{I}_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

el vector definido por un punto cualquiera P y su imagen $P' = f(P)$ tiene coordenadas (respecto base canónica) $(x'_1 - x_1, \cdots, x'_n - x_n) = (a_1, \cdots, a_n)$. Si consideramos entonces la traslación t_v, donde v es el vector de coordenadas $(a_1, \cdots, a_n)$, dicha traslación actúa sobre P en la misma forma que lo hace f, es decir $f = t_v$.

Ejemplo 4.6.3

- Si r es una recta afín cuya dirección viene determinada por el vector v, se tiene que $t_v(r) = r$. Si r es una recta cuya dirección es independiente de v, $t_v(r)$ es una recta distinta de r pero de su misma dirección.

  Por una traslación una recta se transforma entonces en una recta paralela a ella.

- Si en $X = \mathbb{R}^2$ consideramos la traslación de vector $v(2, -1)$, la recta r de ecuación $x - 2y = 1$ se trasforma en la recta r' de ecuación $x - 2y = 5$.

- Obsérvese que la composición de dos traslaciones es otra traslación de vector la suma de los vectores, lo que garantiza a su vez que la composición de traslaciones es conmutativa: $t_v \circ t_w = t_{w+v} = t_{v+w} = t_w \circ t_v$.

  También es consecuencia de lo anterior que $t_v^{-1} = t_{-v}$.

  ¿Puedes realizar una gráfica que ilustre lo que sucede cuando se realiza la composición de dos traslaciones?

4.6.4 Homotecias

En este punto se trata el estudio de un tipo de afinidades biyectivas que no conservando las distancias conservan la "forma". Las homotecias son transformaciones que conservan los ángulos y la razón entre longitudes.

Definición 4.6.5
Sea C un punto fijo de $X = \mathbb{R}^n$ y $\alpha \neq 0$ un número real cualquiera. Se llama homotecia de centro C y razón α, que representamos por $h_{C,\alpha}$, a la aplicación

$$h_{C,\alpha} : X \to X$$

$$C \to C$$

$$P \neq C \to P'$$

siendo P' el punto tal que $\vec{CP'} = \alpha\vec{CP}$.

Si consideramos la aplicación $\phi_C : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ que a cada vector $v = \vec{CP}$ le asocia el vector $v' = \vec{CP'}$ donde $P' = h_{C,\alpha}(P)$ $(C = h_{C,\alpha}(C))$, se tiene que $\phi_C(v) = v' = \alpha v$. Por tanto $\phi_C = \alpha \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$, que es lineal. Como consecuencia se tiene la siguiente proposición

Proposición 4.6.4
La homotecia $h_{C,\alpha}$ es una aplicación afín.

Proposición 4.6.5
En las condiciones de la definición anterior, se verifica

1. *$h_{C,\alpha}$ es biyectiva.*

2. *$h_{C,\alpha}$ conserva las distancias si y sólo si $\alpha = \pm 1$. Si la razón es 1, la homotecia es la aplicación identidad (y recíprocamente).*

3. *Por una homotecia distinta de la identidad, el único punto fijo que resulta es el centro de la homotecia.*

4. *Si f es una aplicación afín definida en $X = \mathbb{R}^n$ cuya aplicación lineal asociada es $\alpha\mathbb{I}_{V=\mathbb{R}^n}$ con $\alpha \neq 0, 1$, f es entonces una homotecia de razón α y de centro el punto C de coordenadas $(\frac{a_1}{1-\alpha}, \cdots, \frac{a_n}{1-\alpha})$, siendo $(a_1, \cdots, a_n)$ las coordenadas del punto imagen del origen del sistema de referencia.*

5. *La composición de dos homotecias es una homotecia o una traslación, y la composición de una traslación con una homotecia (no identidad) es una homotecia.*

La demostración de la mayor parte de estas propiedades se deja como ejercicio. El cuarto de los puntos puede abordarse a través de la ecuación matricial de f, viendo que C es un punto fijo por f y que si P' es la imagen de P por f entonces $\vec{CP'} = \alpha\vec{CP}$. Por último mencionar que la prueba del último de los puntos es inmediato si se acude a las matrices de las aplicaciones lineales que las caracterizan.

Ejemplo 4.6.4
En el plano afín $X = \mathbb{R}^2$ se consideran las homotecias $h_{C,\sqrt{2}}$ y $h_{C,\frac{3}{2}}$ con $C(1, -2)$. Es fácil comprobar que si $P(3, 2)$, la imagen de P por la primera de las homotecias es un punto cuyas coordenadas no son enteras. ¿Podrías realizar una representación gráfica de lo que sucede? El punto $P' = h_{C,\frac{3}{2}}(P)$ tiene coordenadas enteras y son $(4, 4)$.

¿Podrías decir para qué valores de α el transformado de $P(3, 2)$ por $h_{C,\alpha}$ tiene coordenadas enteras?

4.6.5 Giros en $X = \mathbb{R}^2$

La mayor complejidad del estudio de los giros desaconseja, en parte, su tratamiento en el caso general. Debido a esto se ha optado por el estudio de los mismos en el espacio afín de dimensión 2.

Sea $f : X = \mathbb{R}^2 \to X = \mathbb{R}^2$ la aplicación afín que viene dada por la ecuación matricial siguiente (respecto del sistema de referencia canónico).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con $0 < \theta < 2\Pi$.

Respecto de f podemos decir que

1. Es movimiento, puesto que la aplicación lineal asociada a f tiene como matriz, respecto de una base ortonormal, una matriz ortogonal, lo que garantiza que tal aplicación lineal sea isometría.

2. El conjunto de puntos fijos por f se determina resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 - cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & 1 - cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dicho sistema tiene solución única si (y sólo si) la matriz que lo define es de rango 2.

$$rango \begin{pmatrix} 1 - cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & 1 - cos\theta \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow (1 - cos\theta)^2 + sen^2\theta \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2 - 2cos\theta \neq 0 \Longleftrightarrow cos\theta \neq 1 \Longleftrightarrow \theta \neq 2k\Pi$$

Como inicialmente $0 < \theta < 2\Pi$, f deja un único punto fijo que vamos a denotar por C.

Definición 4.6.6
La aplicación f definida por la ecuación matricial anterior recibe el nombre de giro de centro C y amplitud θ, y es denotada por $g_{C,\theta}$.

Ejemplo 4.6.5

- Supuesto fijado el sistema de referencia canónico, si en $X = \mathbb{R}^2$ se considera el giro de centro $C(1,-2)$ y amplitud $\frac{\Pi}{6}$, la imagen $P'(x',y')$ de un punto $P(x,y)$ vendrá determinada por una ecuación del tipo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

  donde (a,b), recordemos, son las coordenadas del punto imagen de $O(0,0)$ por el giro. El hecho de conocer que el punto $(1,-2)$ es un punto fijo nos permite hallar dichos valores a y b.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

- Si $g_{C,\theta}$ y $g_{D,\phi}$ son dos giros, la composicón $g_{C,\theta} \circ g_{D,\phi}$ es otro giro o una traslación, puesto que la aplicación lineal asociada a tal composición es

$$\begin{pmatrix} cos(\theta+\phi) & -sen(\theta+\phi) \\ sen(\theta+\phi) & cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\rho & -sen\rho \\ sen\rho & cos\rho \end{pmatrix}$$

  verificando $\theta + \phi = \rho + 2\Pi$ con $0 \leq \rho < 2\Pi$.

  Si la matriz anterior no es la identidad (caso $\rho \neq 0$) la composición es un giro, en el otro caso la composición es una traslación.

- Si t y g son respectivamente una traslación y un giro en $\mathbb{R}^2$, la composición $t \circ g$ es un giro puesto que la matriz de la aplicación lineal asociada coincide con la de g, por ser la de t la identidad.

  Teniendo esto en cuenta se deja como ejercicio determinar el centro y la amplitud del giro $t \circ g$ donde:

  · t es la traslación en que el punto $(6,0)$ es la imagen del punto $(0,0)$ y

  · g es el giro de centro $(0,0)$ en que $(0,2)$ es la imagen de $(2,0)$.

  ¿El giro anterior coincide con $g \circ t$?

Resumiendo, las afinidades que hemos estudiado en $X = \mathbb{R}^n$ son

$$\begin{cases} \text{No biyectivas: Proyecciones (Ortogonales / No ortogonales)} \\ \text{Transformaciones} \begin{cases} \text{No conservan distancias} \begin{cases} \text{Simetrías no ortogonales} \\ \text{Homotecias} \end{cases} \\ \text{Movimientos} \begin{cases} \text{Simetrías ortogonales} \\ \text{Traslaciones} \\ \text{Giros (estudiados para n=2)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

4.7 Cónicas y Cuádricas

4.7.1 Cónicas

En el plano afín se llama *cónica* al lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas (respecto sistema de referencia canónico) (x_1, x_2) verifican una ecuación del tipo

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0 \qquad [1]$$

para ciertos números reales a_{ij}, b_k, c tales que a_{11}, a_{12}, a_{22} no son simultáneamente los tres nulos.

La ecuación anterior se expresa matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

El conjunto de puntos de coordenadas (x_1, x_2) que verifica la ecuación [1] es el mismo que el que verifica la ecuación

$$\alpha(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c) = 0 \qquad [2]$$

cuando $\alpha \neq 0$, que escrita de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Esto es, las ecuaciones [1], [2] definen una misma cónica, lo que justifica la siguiente definición.

Definición 4.7.1

Se llama matriz de la cónica definida por la ecuación [1] *a la matriz* $M = \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ *o a cualquiera de sus proporcionales:* αM *con* $\alpha \neq 0$*. La matriz no nula* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ *se llamará matriz de los términos cuadráticos.*

- La cónica de ecuación $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$, coincide con la de ecuación $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, que es la ecuación reducida de la elipse centrada en el punto $(0, 0)$ y de semiejes 3 y $\sqrt{5}$.

  El lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) (en el canónico) que verifican la ecuación $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$ es una hipérbola. La ecuación $y^2 = 5x$ define una parábola.

- Pero no son únicamente cónicas las elipses, hiperbólas y parábolas. También lo son las siguientes, donde las ecuaciones las suponemos siempre referidas al sistema canónico:

  · La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ tiene como solución la pareja de rectas $y = x$, $y = -x$ (par de rectas concurrentes).

  · La cónica de ecuación $x^2 - 4 = 0$ está constituida por los puntos de las rectas $x = 2$ y $x = -2$ (par de rectas paralelas).

· La ecuación $x^2 = 0$ tiene como solución al conjunto de puntos de la recta $x = 0$ contados dos veces (recta doble o par de rectas coincidentes).

· La ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución real. Se dice que la cónica definida por dicha ecuación es el conjunto vacio o "el par de rectas imaginarias" (y paralelas) $x = \pm 2i$

· Cuando se considera la ecuación $x^2 + y^2 = 0$, el conjunto solución *real* es el punto $(0, 0)$ pero también se dice que la cónica resultante es formado por las "rectas imaginarias" (y secantes en el $(0, 0)$) de ecuaciones $y = \pm ix$

- Consideremos la cónica de ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (en el sistema de referencia canónico). Por tratarse del conjunto vacio, lo más común sería decir que coincide con la de ecuación $x^2 + 4 = 0$. Ahora bien, si esta última cónica la interpretamos como el par de "rectas imaginarias" $x = \pm 2i$, podemos observar que algunos "puntos imaginarios" que están en esas "rectas" no satisfacen la ecuación de la primera cónica. El "punto" $(2i, 1)$ satisface la ecuación $x^2 + 4 = 0$, pero no $x^2 + y^2 + 1 = 0$. El "punto" $(2i, \sqrt{3})$ satisface ambas ecuaciones. Después de ver que el "conjunto solución de puntos imaginarios" para ambas ecuaciones no es el mismo, costaría más afirmar que ambas cónicas son iguales.

  Podemos observar también que las matrices que definen dichas cónicas

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  no son proporcionales. Tampoco tienen el mismo rango, ni la misma signatura (conceptos ligados a cierta clasificación de las matrices simétricas).

De todo lo anterior uno puede admitir que en el plano afín, y respecto del sistema de referencia canónico, una cónica queda caracterizada por cualquiera de las matrices simétricas αM, siendo $\alpha \neq 0$ y $M = \begin{pmatrix} c & B \\ B^t & A \end{pmatrix}$, de tamaño 3×3, donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Por tanto

Definición 4.7.2
Se dice que dos cónicas son iguales si y sólo si sus matrices (en el mismo sistema de referencia) son proporcionales.

Supongamos que se tiene una cónica de ecuación [1] respecto del sistema de referencia canónico, que matricialmente la expresamos por

$$\begin{pmatrix} 1 & X \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ X^t \end{pmatrix} = 0 \quad [1'] \quad , \quad \text{donde} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} c & B \\ B^t & A \end{pmatrix}$$

con c, B, A las matrices descritas anteriormente. Si se adopta un nuevo sistema de referencia R' donde las coordenadas de un punto las denotamos por (x'_1, x'_2) se tiene la relación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad [3]$$

donde $C = (c_1, c_2)$ son las coordenadas del nuevo origen, y Q la matriz del cambio de base (sus columnas expresan la base nueva en función de la canónica). La ecuación [3] puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} 1 & X^t \end{pmatrix} = Q^* \begin{pmatrix} 1 \\ X'^t \end{pmatrix} \quad [3'] \qquad \text{con} \quad Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C^t & Q \end{pmatrix}$$

Obsérvese que el hecho de que Q sea regular garantiza que lo sea Q^* Entonces, en la nueva referencia, la cónica tiene por matriz $M' = Q^{*t}MQ^* = \begin{pmatrix} d & B' \\ B'^t & A' \end{pmatrix}$ siendo $A' = Q^tAQ$ como puede comprobarse sustituyendo $[3']$ en $[1']$. De donde se deduce que M y M' son congruentes. Por tanto poseen el mismo rango y, al ser simétricas, la misma signatura. También los determinantes tienen el mismo signo: $det(M') = (det(Q^*))^2 det(M)$ y $(det(Q^*))^2 > 0$ Lo mismo sucede para A y A'.

Todo lo visto hasta aquí justifica en parte, que una matriz cualquiera asociada a una cónica (respecto del sistema de referencia que sea) determine completamente dicha cónica.

En el siguiente cuadro se plasma la clasificación general de las cónicas. En él, M es la matriz de la cónica y A es su matriz de términos cuadráticos (en un sistema de referencia dado).

Caso 1.- $det(A) > 0$, CONICA DE TIPO ELIPTICO

- $det(M) \neq 0$ y $sig(M) = 3$ o $sig(M) = 0$: elipse imaginaria
- $det(M) \neq 0$ y $sig(M) = 2$ o $sig(M) = 1$: elipse real
- $det(M) = 0$: un punto (dos rectas imaginarias que se cortan en el punto)

Caso 2.- $det(A) < 0$, CONICA DE TIPO HIPERBOLICO

- $det(M) \neq 0$: hipérbola
- $det(M) = 0$: dos rectas (reales) concurrentes

Caso 3.- $det(A) = 0$, CONICA DE TIPO PARABOLICO

- $det(M) \neq 0$: parábola
- $det(M) = 0$: dos rectas paralelas (coincidentes si $rg(M) = 1$, distintas si $rg(M) = 2$ y $sig(M) = 1$, imaginarias si $rg(M) = 2$ y $sig(M) = 2, 0$)

Para justificar la tabla anterior procedemos como sigue:

Vamos a considerar el sistema de ecuaciones (S):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix},$$

y partiendo del conjunto de soluciones que tenga dicho sistema vamos a realizar el estudio completo de las cónicas.

1. El sistema (S) tiene solución única si y sólo si $det(A) \neq 0$

   Supongamos que se tiene esta situación, y que (h_1, h_2) es la solución de dicho sistema. En este caso el punto de coordenadas (h_1, h_2) recibe el nombre de centro de la cónica.

   Consideramos el sistema de referencia R' constituido por el punto P_0 de coordenadas (h_1, h_2) en el sistema de referencia de partida, y la base del mismo sistema de referencia. Con esto la matriz del cambio del sistema de referencia es

$$Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_1 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz M' asociada a la cónica es

$$M' = Q^{*t}MQ^* = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

siendo $d = c + b_1h_1 + b_2h_2$. Sea T una matrix 2×2 regular tal que $A' = T^tAT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (diagonal). Denotemos por R" el sistema de referencia con origen el punto P_0 y base $\{v_1, v_2\}$, donde v_i tiene por coordenadas en la base de R' las de la columna i-ésima de Q. La matriz de la cónica en el sistema R" es

$$M" = T^{*t}M'T^* = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

donde T^* es la matriz 3×3 del cambio del sistema de referencia de R' a R": $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$.

Teniendo en cuenta lo anterior:

1.1. $det(A) > 0$ si y sólo si α y β son simultáneamente positivos, o simultáneamente negativos, y en esta situación:

- Si $d = 0$, lo que equivale a que $det(M) = 0$, la ecuación de la cónica en el último sistema de referencia es $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ que sólo tiene una solución. Por tanto en este caso la cónica se reduce a un punto (dos rectas imaginarias secantes en ese punto).
- Si $d > 0$, entonces $det(M) \neq 0$, y $sig(M) = 3$ si $\alpha, \beta > 0$ o bien $sig(M) = 1$ si $\alpha, \beta < 0$.
  · Si $sig(M) = 3$, la ecuación de la cónica en el último sistema de referencia es $\alpha x^2 + \beta y^2 + d = 0$ con todos los coeficientes estrictamentes positivos, por tanto dicha ecuación no tiene solución: elipse imaginaria.
  · Si $sig(M) = 1$, la ecuación de la cónica en el último sistema de referencia puede expresarse como $(-\alpha)x^2 + (-\beta)y^2 = d$, correspondiente a una elipse (real).
- Si $d < 0$, entonces $det(M) \neq 0$, y $sig(M) = 2$ si $\alpha, \beta > 0$ o bien $sig(M) = 0$ si $\alpha, \beta < 0$.
  · Si $sig(M) = 2$, la ecuación es equivalente a la del caso $d > 0, sig(M) = 1$: elipse.
  · Si $sig(M) = 0$, la situación es análoga a la de $sig(M) = 3$: elipse imaginaria.

1.2. $det(A) < 0$ si y sólo si α y β son de signos opuestos. Supongamos que $\alpha > 0$ y $\beta < 0$.

- Si $d = 0$, lo que equivale a que $det(M) = 0$, la ecuación de la cónica en el último sistema de referencia es $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$ que tiene como solución al par de rectas $y = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}x$, reales y concurrentes.
- Si $d \neq 0$, lo que equivale a que $det(M) \neq 0$, la ecuación de la cónica es la de una hipérbola.

Los otros dos casos que aparecen, en los que el sistema (S) o tiene infinitas soluciones, o no tiene solución, aportan las cónicas que no tienen centro.

2. El sistema (S) tiene infinitas soluciones si y sólo si $rango(A) = rango(A|b_i) = 1$. En este caso por tanto $det(A) = 0$.

3. El sistema (S) no tiene solución si y sólo si $rango(A) = 1$ y $rango(A|b_i) = 2$. También aquí $det(A) = 0$.

- Se considera la cónica que, respecto del sistema de referencia canónico, tiene por ecuación

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 + 4x - 8y - 20 = 0$$

Vamos a ver si es una cónica con centro o sin centro, cuál es su ecuación reducida, las ecuaciones de sus ejes en el caso de tenerlos, $\cdots$.

  - La ecuación de la cónica escrita matricialmente es

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 2 & -4 \\ 2 & 11 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

  Utilizando la notación manejada anteriormente, se tiene que

$$c = -20, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} -20 & 2 & -4 \\ 2 & 11 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

  - Como rango de A es 2, la cónica es una cónica con centro, pues el sistema que planteamos a continuación tiene solución y es única.

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  - La solución de ese sistema es el centro de la cónica: $P_0 = (-\frac{6}{25}, \frac{8}{25})$.

  Una base respecto de la cual la matriz de términos cuadráticos de la cónica es diagonal es $\{e_1, 2e_1 - 11e_2\}$:

$$A' = T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \cdot 150 \end{pmatrix}$$

  Si en el plano afín se considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_0 = (-\frac{6}{25}, \frac{8}{25}); v_1 = (1,0), v_2 = (2,-11)\}$, la matriz de la cónica respecto de este nuevo sistema de referencia es (manteniendo la notación de la parte teórica):

$$M" = T^{*t} M' T^* = T^{*t} Q^{*t} M Q^* T^* = \begin{pmatrix} -\frac{544}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1650 \end{pmatrix}$$

  donde $Q^* T^*$ es la matriz del cambio de sistema de referencia (Q^* cambia el centro del sistema, T^* cambia la base).

$$Q^* T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{25} & 1 & 0 \\ \frac{8}{25} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{25} & 1 & 2 \\ \frac{8}{25} & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

  La ecuación de la cónica en el nuevo sistema es por tanto $11x'^2 + 1650y'^2 - \frac{544}{25} = 0$, que también se escribe

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{\frac{544}{275}})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{\frac{544}{31.250}})^2} = 1$$

Si un punto P de la cónica tiene coordenadas (x, y) respecto el sistema de referencia canónico y coordenadas (x', y') respecto $\mathcal{R}$, se tiene la siguiente relación (como se ha visto más arriba)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{25} \\ \frac{8}{25} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$x' = (x + \frac{6}{25}) + \frac{2}{11}(y - \frac{8}{25}), \qquad y' = -\frac{1}{11}(y - \frac{8}{25})$$

– Si la diagonalización de A se hubiese realizado a partir de la base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\}$ tendríamos

$$A_1' = T_1^t A T_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

siendo T_1 la matriz cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$. Los elementos 15 y 10 de la diagonal principal de A_1' son los autovalores de A.

Cuando en el plano se considera el sistema de refencia ortonormal $\mathcal{R}_1 = \{P_0; v_1, v_2\}$, la matriz de la cónica es

$$M" = \begin{pmatrix} -\frac{544}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

y su ecuación por tanto

$$10x_1^2 + 15y_1^2 - \frac{544}{25} = 0,$$

que también se escribe $\frac{x_1^2}{(\sqrt{\frac{544}{250}})^2} + \frac{y_1^2}{(\sqrt{\frac{544}{375}})^2} = 1$ Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación reducida de la cónica*. Se llaman *ejes de la cónica* a las rectas perpendiculares que pasan por el centro de la cónica y tienen las direcciones de los vectores de la base ortonormal de autovectores de la matriz A. En este caso concreto son ejes de la elipse las rectas de ecuaciones paramétricas siguientes:

$$r : \begin{cases} x = -\frac{6}{25} + \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha \\ y = \frac{8}{25} + \frac{2}{\sqrt{5}}\alpha \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = -\frac{6}{25} + \frac{2}{\sqrt{5}}\alpha \\ y = \frac{8}{25} - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha \end{cases}$$

Los ejes de la elipse (o en general de una cónica con centro) son ejes de simetría de la misma.

Los valores $a = \sqrt{\frac{544}{250}}$ y $b = \sqrt{\frac{544}{375}}$ reciben el nombre de *longitudinales de los semiejes*. El valor $c > 0$ que verifica $a^2 = b^2 + c^2$ se llama *semidistancia focal* y el cociente $\frac{c}{a}$ recibe el nombre de *excentricidad de la elipse*. Los puntos que en el sistema de referencia $\mathcal{R}_1$ tienen coordenadas $(\pm c, 0)$ reciben el nombre de *focos* de la elipse.

4.7.2 Cuádricas

En el espacio afín tridimensional se llama *cuádrica* al lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas (respecto sistema de referencia canónico) (x_1, x_2, x_3) verifican una ecuación del tipo

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c = 0 \qquad [1]$$

para ciertos números reales a_{ij}, b_k, c tales que los a_{ij} no son simultáneamente todos nulos.

La ecuación anterior se expresa matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

El conjunto de puntos de coordenadas (x_1, x_2, x_3) que verifica la ecuación [1] es el mismo que el que verifica la ecuación

$$\alpha(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + 2b_3x_3 + c) = 0 \qquad [2]$$

cuando $\alpha \neq 0$, que escrita de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Definición 4.7.3

Se llama matriz de la cuádrica definida por la ecuación [1] *a la matriz* $M = \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ *o a cualquiera de sus proporcionales:* αM *con* $\alpha \neq 0$*. La matriz no nula* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ *recibe el nombre de matriz de los términos cuadráticos de la cuádrica.*

Un tratamiento similar al realizado para las cónicas nos permitiría decir que cuando se realiza un cambio de sistema de referencia en el espacio afín:

1. La matriz M' asociada a la cuádrica respecto de ese nuevo sistema de referencia es equivalente a la matriz M. El mismo resultado se obtiene respecto de las matrices de los términos cuadráticos.

2. Es consecuencia de lo anterior que los rangos de M y M' son iguales así como sus signa-turas. Lo mismo sucede cuando se consideran las matrices de términos cuadráticos.

3. Los determinantes de M y M' tienen el mismo signo. También este resultado es cierto para las matrices A y A'.

En el siguiente cuadro se resume la clasificación de las cuádricas. En él, M es la matriz de la cuádrica y A es su submatriz de los términos cuadráticos (en un sistema de referencia cualquiera). En las expresiones del tipo tipo $s(X) = (p, q)$, donde X=A ó M y p y q valores enteros debe tenerse en cuenta que p se corresponde con la cantidad de valores propios estrictamente positivos de la matriz correspondiente y q con la cantidad de valores propios estrictamente negativos. En el cuadro no aparecen los casos en los que la cuádrica es un par de planos (paralelos, secantes, ...) porque complican en exceso la clasificación y además pueden resultar de menor interés. Sólo al final aparece un ejemplo que muestra uno de esos casos.

Caso 1.- rango(M) = 4, Cuádricas ordinarias o no degeneradas

- rango(A) = 3, cuádricas con centro
  1. s(M)=(4,0) y s(A)=(3,0), ELIPSOIDE IMAGINARIO
  2. s(M)=(3,1) y s(A)=(3,0), ELIPSOIDE REAL
  3. s(M)=(3,1) y s(A)=(2,1), HIPERBOLOIDE ELÍPTICO
  4. s(M)=(2,2) y s(A)=(2,1), HIPERBOLOIDE HIPERBÓLICO
- rango(A) = 2, cuádricas sin centro
  1. s(M)=(3,1) y s(A)=(2,0), PARABOLOIDE ELÍPTICO
  2. s(M)=(2,2) y s(A)=(1,1), PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Caso 2.- rango(M) = 3, Cuádricas con un punto singular

- rango(A) = 3, conos
  1. s(M)=(3,0) y s(A)=(3,0), CONO IMAGINARIO (con vértice real)
  2. s(M)=(2,1) y s(A)=(2,1), CONO REAL
- rango(A) = 2, cilindros
  1. s(M)=(3,0) y s(A)=(2,0), CILINDRO IMAGINARIO
  2. s(M)=(2,1) y s(A)=(2,0), CILINDRO ELÍPTICO (real)
  3. s(M)=(2,1) y s(A)=(1,1), CILINDRO HIPERBÓLICO
  4. s(M)=(2,1) y s(A)=(1,0), CILINDRO PARABÓLICO

La cuádrica de ecuación: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - x - y + z = 0$, tiene por matriz asociada a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso $det(M) = 0$, $rango(M) = 3$, y el $rango(A) = 2$. Como ejercicio se deja el determinar las signaturas de M y A, y comprobar que no encaja en ninguno de los casos del cuadro anterior. Finalmente observar que $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - x - y + z = (x + y + z - 1)(x + y - z) = 0$, y que el conjunto solución está formado por los planos de ecuaciones:

$$x + y + z - 1 = 0$$

$$x + y - z = 0$$

4.8 Problemas de Geometría Euclídea

Problema 4.8.1
En $\mathbb{R}^5$ se tiene definido el producto interior habitual y se considera el subespacio

$$W = \langle (1,2,3,-1,-2),(2,4,7,2,-1)\rangle$$

i) Determina el conjunto $W^\perp$ de vectores de $\mathbb{R}^5$ ortogonales a todos los de W, y demuestra que es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. ¿Quiénes son $W \cap W^\perp$ y $W + W^\perp$?.

ii) Calcula bases ortonormales para W y para su complemento ortogonal $W^\perp$.

Problema 4.8.2
En $\mathbb{R}^3$ con el producto interior habitual se consideran los vectores $v = (1,0,1)$, $w = (1,2,0)$ y $u = (0,2,3)$.

i) Halla, a partir de los vectores anteriores, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ aplicando el proce-dimiento de Gram-Schmidt.

ii) Halla una base del complemento ortogonal al subespacio generado por v y u.

iii) Halla la intersección de los subespacios S y T, donde S es el subespacio ortogonal a los vectores v y u, y T es el subespacio ortogonal a los vectores v y w.

Problema 4.8.3
Halla una base ortonormal u, v, w de $\mathbb{R}^3$ tal que el subespacio generado por u y v esté contenido en el plano $x + y + z = 0$, y el generado por u y w lo esté en el plano $2x - y - z = 0$.

Problema 4.8.4
Demuestra que los vectores de $\mathbb{R}^4$: $u = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$ y $v = (-1/2, 1/2, 1/2, -1/2)$ son ortonormales y halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores anteriores.

Problema 4.8.5
¿Son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?.

i) Si P y Q son matrices ortogonales de orden $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

ii) Si P es una matriz ortogonal simétrica, entonces $P^2 = I$.

iii) Si P es ortogonal, entonces $detP = +1$.

Problema 4.8.6
Sean u y v dos vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$. Prueba que la norma de $u - v$ es $\sqrt{2}$.

Problema 4.8.7
Sea A una matriz cuyas columnas forman una base de $\mathbb{R}^3$. Sea B la matriz que tiene por columnas los vectores de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen de aplicar Gram-Schmidt a las columnas de A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?.

- Las dos primeras columnas de A y las dos primeras columnas de B generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$.
- B es una matriz ortogonal.

Problema 4.8.8
Demuestra que en $\mathbb{R}^n$:

a) Para cualquier subespacio S, $(S^\perp)^\perp = S$.

b) Si S y T son subespacios tales que $S^\perp = T^\perp$, entonces $S = T$.

c) Si S y T son subespacios tales que $S \subset T$, entonces $T^\perp \subset S^\perp$.

Problema 4.8.9
Demuestra el teorema generalizado de Pitágoras: Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonales. Entonces $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Problema 4.8.10
En cada uno de los siguientes apartados se da un subespacio U y un vector v de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$, y se pide para cada caso:

i) Calcular $p_U v$.

ii) Hallar una base ortonormal para U.

iii) Escribir $v = u + u'$ con $u \in U$ y $u' \in U$.

a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$; $v = (-1, 2)$
b) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$; $v = (1, 1)$
c) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$; $v = (a, b)$ con a o b no nulos
d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$; $v = (a, b, c)$ con a, b o c no nulos.
e) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0\}$; $v = (3, 1, 4)$
f) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x/2 = y/3 = z/4\}$; $v = (1, 1, 1)$
g) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - t = 0\}$; $v = (1, -1, 2, 3)$
h) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y, t = 3y\}$; $v = (-1, 2, 3, 1)$

Problema 4.8.11

En cada uno de los siguientes casos encuentra la recta que se ajusta mejor a los puntos dados.

a) $(1,3)$, $(-2,4)$, $(7,0)$

b) $(-3,7)$, $(4,9)$

b) $(-3,7)$, $(4,9)$, $(1,3)$, $(-2,4)$

Problema 4.8.12

En cada uno de los siguientes casos encuentra el mejor ajuste cuadrático para los puntos dados.

a) $(2,-5)$, $(3,0)$, $(1,1)$, $(4,-2)$

b) $(-7,3)$, $(2,8)$, $(1,5)$

Problema 4.8.13

Sean u y w dos vectores unitarios de $\mathbb{R}^2$ linealmente independientes. Sea s la simetría ortogonal de eje la recta (vectorial) engendrada por $u+w$. Demuestra que $s(u)=w$.

Problema 4.8.14

Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ que respecto de la base canónica tiene como matriz la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

i) Demuestra que f es una isometría. ¿Es rotación o simetría?.

ii) Sea $u=(1,-1)$ y s la simetría ortogonal de eje la recta engendradra por u. Determina una simetría s' tal que $f=s'os$.

Problema 4.8.15

En $\mathbb{R}^2$ se considera la base canónica y los vectores $u=(1,1)$ y $u'=(-1,2)$. Sean s y s' las simetrías ortogonales de ejes las rectas engendradas por u y u' respectivamente. ¿Cuáles son las matrices de las rotaciones sos' y $s'os$?.¿Qué relación existe entre ambas?.

Problema 4.8.16

16.-

En $\mathbb{R}^2$ se considera la rotación vectorial r que respecto de la base canónica tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Halla respecto de esa base las matrices de las rotaciones t tales que $t^2 = r$.

Problema 4.8.17
Se considera el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

i) Halla la matriz (respecto de la base canónica) de la simetría ortogonal s de eje la recta (vectorial) engendrada por el vector $u = (1, 2)$.

ii) Determina la simetría ortogonal s' tal que $r = s'os$, donde r es la rotación vectorial, que respecto de una base ortonormal, tiene por matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.8.18
En R^2 se consideran los vectores $u = (1, 2)$ y $v = (-1, 1)$ y las semirrectas vectoriales $D_u = \{\alpha(1, 2)/\alpha \in \mathbb{R}^+\}$ y $D_v = \{\alpha(-1, 1)/\alpha \in \mathbb{R}^+\}$. Halla respecto de la base canónica las matrices de las isometrías f de $\mathbb{R}^2$ tales que $f(D_u) = D_v$.

Problema 4.8.19
Sean u, v, w tres vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que u y v son linealmente independientes y $u + v + w = 0$. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que f conserva la norma de u, v y w.

i) Demuestra que conserva el producto escalar de u y v.

ii) Demuestra que f es una isometría de $\mathbb{R}^2$.

Problema 4.8.20
En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{u = (1, 1, 1), v = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), w = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\}$.

a) Demuestra que el subespacio ortogonal a $\langle u \rangle$ está generado por v y w.

b) Sea f la isometría de $\mathbb{R}^3$ que tiene asociada respecto de B la matriz A siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

¿Es una isometría positiva o negativa?. ¿Cuál es su polinomio característico?. ¿De qué tipo de transformación se trata?. Describe los elementos que la caracterizan.

c) Halla la imagen por f de los vectores $(1, 1, -2)$, $(1, 0, 0)$, $(-2, -2, -2)$.

Problema 4.8.21
En $\mathbb{R}^3$ se considera el plano vectorial P engendrado por los vectores $u = (1, 2, 0)$ y $v = (-1, 1, 1)$ y la simetría ortogonal s respecto del plano P .

a) ¿Cuál es el polinomio característico de s?. Determina una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual s esté representada, como isometría, por una matriz canónica.

b) Determina la matriz asociada a s respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Halla la imagen por s de los vectores $(0, 3, 1)$, $(-2, 1, -3)$, $(1, 0, 0)$.

Problema 4.8.22
Sean ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 los endomorfismos de $V = \mathbb{R}^3$ definidos, respecto de la base canónica, por las matrices siguientes.

$$M(\phi_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad M(\phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Demuestra que los endomorfismos ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son todos ellos isometrías (o transformaciones ortogonales).
2. Las transformaciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son simetrías (vectoriales). Señala para cada una de ellas, el plano de vectores fijos (o base de la simetría), así como un vector que se transforme en su opuesto. ¿Qué relación hay entre el plano y el vector?.
3. ¿Qué tipo de isometría es $\phi_1 \cdot \phi_3$?. Señala los elementos que la caracterizan.
4. Sea $U =< e_2, e_3 >$ y ρ la restricción de $\phi_2 \cdot \phi_3$ a U. ¿Qué tipo de isometría es ρ?.
5. ¿Tiene algún vector fijo $\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \phi_3$?.

Problema 4.8.23
Se consideran las siguientes bases de $V = \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 0)\}$$

$$\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

y la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Sea ϕ el endomorfismo de $V = \mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base $\mathcal{B}$, por la matriz M ($M_{\mathcal{B}}(\phi) = M$), y sea ψ el endomorfismo de $V = \mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base $\mathcal{B}_c$, por la matriz M ($M_{\mathcal{B}_c}(\psi) = M$).

1. Demuestra que:
   · M es una matriz ortogonal.
   · ϕ no es una isometría en $V = \mathbb{R}^3$.
   · ψ es una isometría en $V = \mathbb{R}^3$.

2. Suponiendo que ρ es endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo V, ¿son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?
   · *Si M es una de las matrices asociadas a ρ, ρ es una isometría si y sólo si M^tM es la matriz identidad*
   · *Si M una matriz asociada a ρ respecto de una base ortonormal de V, ρ es una isometría si y sólo si M^tM es la matriz identidad*

3. Demuestra que ψ es una simetría (vectorial), y determina el plano de vectores fijos (base de la simetría).

4. Halla una isometría ρ de $V = \mathbb{R}^3$ tal que $\psi \circ \rho = \varphi$ sea la simetría que tiene como plano de vectores fijos el generado por e_1 y e_2. Dí qué tipo de transformación es ρ y establece los elementos que la caracterizan.

Problema 4.8.24
Prueba que cada uno de los conjuntos de puntos siguientes es un sistema de referencia en el espacio afín (estandar) $\mathbb{R}^3$.

a) $P_0 = (1, 0, -1)$, $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 1, 1)$, $P_3 = (0, 0, 1)$

b) $Q_0 = (-1, 0, 2)$, $Q_1 = (0, 1, -2)$, $Q_2 = (0, 0, 1)$, $Q_3 = (1, 0, -3)$

Problema 4.8.25
Se considera el espacio afín $\mathbb{R}^3$.

a) Establece la relación existente entre el sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$ y cada uno de los sistemas de referencia del ejercicio anterior.

b) Establece la relación existente entre el sistema de referencia $R = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ y $R' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$

c) Sea el punto $P = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Halla las coordenadas de P en los sistemas de refencia R y R'.

Problema 4.8.26
onsideremos en el espacio afín estandar $\mathbb{R}^n$ un subconjunto Y de puntos. Se dice que Y es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ si para algún punto P de Y, el conjunto de vectores $W_P(Y) = \{\vec{PQ}/Q \in Y\}$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

i) Demuestra que si para algún $P \in Y$, $W_P(Y)$ es un subespacio, entonces para todo punto P' de Y, el conjunto $W_{P'}(Y)$ es un subespacio y coincide con $W_P(Y)$.
El resultado anterior nos permite establecer las siguientes definiciones. Si Y es un subespacio afín, el subespacio vectorial $W(Y) = W_P(Y)$ (pues no depende de P) es llamado espacio vectorial asociado con Y. Se define como dimensión de Y la dimensión de $W(Y)$. Observar que si $Y = \mathbb{R}^n$, $W(Y) = \mathbb{R}^n$ y que la dimensión de $\mathbb{R}^n$ como espacio afín es la misma que tiene como espacio vectorial.

ii) Sea P un punto del espacio afín $\mathbb{R}^n$, y W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (como espacio vectorial). ¿Es $Y = \{Q/\vec{PQ} \in W\}$ un espacio afín?.

iii) ¿En qué consiste un subespacio afín de dimensión 0?. Un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ es llamado recta, plano o hiperplano cuando $dimY$ es respectivamente 1, 2 o $n-1$.

Problema 4.8.27
En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $P = (1, 2, 3)$ y sea W el subespacio generado por los vectores $v = (1, 0, 1)$ y $w = (1, 1, 1)$.

i) Da las ecuaciones paramétricas del subespacio afín Y que pasa por P y tiene como subespacio vectorial asociado a W.

ii) Da una recta afín que verifique en cada caso una de las condiciones siguientes:

- Pasa por P y está contenida en Y
- Está contenida en Y pero no pasa por P
- Pasa por P y no está contenida en Y
- Tiene un solo punto en común con Y y es distinto de P
- No tiene ningún punto en común con Y

Problema 4.8.28
En $\mathbb{R}^3$ consideramos dos rectas afines r y r'.

i) Si existe un plano que contiene a ambas, ¿qué puede decirse de la posición relativa de dichas rectas?. Justifica tu respuesta.

ii) Da una recta afín r que pase por el punto $(1, 1, 1)$ y una recta r que pase por el $(1, 0, -1)$ para las cuáles no exista un plano que contenga a ambas rectas a la vez.

Problema 4.8.29
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto $P(x, y, z)$ le asocia el punto $f(P) = (x', y', z')$ tal que

$$x' = 1 + x + 2y + z$$

$$y' = 2 + y - z$$

$$z' = -1 + x + 3z$$

a) Demuestra que f es una aplicación afín. ¿Es f una transformación afín?

b) Si F es la aplicación lineal asociada a f, determina $KerF$ y $Im(f)$

c) Se considera la recta de puntos r de $\mathbb{R}^3$ dada por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x = 1 + \alpha$$

$$y = 2 - \alpha$$

$$z = -1 + \alpha$$

Determina $f(r)$.

d) Se consideran los siguientes planos de puntos:

$$\Pi \quad \text{de ecuación} \quad 2x + y - z + 1 = 0$$

$$\Pi' \quad \text{de ecuación} \quad x + y + 2z - 1 = 0$$

Obtén la imagen de cada plano por f y explica los resultados.

Problema 4.8.30
Consideremos $\mathbb{R}^n$ como espacio afín euclideo, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación que conserva la distancia. La condición anterior es suficiente para garantizar que f es un movimiento, es decir, que es afín y biyectiva. En este ejercicio se pretende que pruebes lo anterior resolviendo cada uno de los siguientes apartados:

a) Sea $g : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ una aplicación que conserva el producto escalar, y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que no se dice que g sea lineal, eso es lo que se trata de probar.

  i) Demuestra que $g(B) = \{g(v_1), ..., g(v_n)\}$ es una familia de vectores ortonormal. Deduce que $g(B)$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

  ii) Recuerda que por ser B una base ortonormal, si $v \in \mathbb{R}^n$ es tal que $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, entonces $a_i = v.v_i$, $\forall i$. También para $g(v) = b_1g(v_1)+...+b_ng(v_n)$, se tiene $b_i = g(v).g(v_i)$,$\forall i$. Usa lo anterior para probar que g es lineal.

  iii) Deduce que g es un isomorfismo.

b) Sea $P \in X = \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera pero fijo, y sea $F_P : V = \mathbb{R}^n \to V = \mathbb{R}^n$ la aplicación definida por $F_P(\vec{PQ}) = f(P)\vec{f}(Q)$, donde f es la aplicacón de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que conserva las distancias

  i) Prueba que F_P conserva el producto escalar. (Indicación: Desarrolla $(v - w).(v - w)$ y $(F_P(v) - F_P(w)).(F_P(v) - F_P(w))$ para $v = \vec{PQ}$ y $w = \vec{PR}$)

  ii) Deduce que F_P es lineal. ¿Es F_P biyectiva?.

  iii) ¿Puedes concluir ya que f es afín y biyectiva?.

Problema 4.8.31
Sean t_v y t_u dos traslaciones del espacio afín euclideo $\mathbb{R}^2$. Determina qué aplicaciones son $t_v o t_u$ y $t_u o t_v$. ¿Qué sucede en el caso en que $u = -v$?.

Problema 4.8.32
Sean $h_{P,\alpha}$ y $h_{P,\beta}$ dos homotecias de centro P del espacio afín $\mathbb{R}^2$. Determina qué aplicaciones son $h_{P,\alpha} o h_{P,\beta}$, y $h_{P,\beta} o h_{P,\alpha}$. ¿En qué caso las composiciones anteriores resultan ser la aplicación identidad?.

Problema 4.8.33
En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se considera la homotecia $h_{P,-1}$.

a) Realiza un dibujo que muestre el comportamiento de dicha homotecia. ¿Darías un nombre especial a la aplicación anterior?. ¿Qué aplicación es $(h_{P,-1})^2$?.

b) Se considera el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. ¿Cuál es la imagen de dicho cuadrado por la homotecia $h_{P,-1}$ con $P = (1/2, 1/2)$?. ¿Qué nombre darías a P en referencia al cuadrado?.

Problema 4.8.34
Sean f y g dos afinidades en el espacio afín $\mathbb{R}^n$, y sean F y G lasaplicaciones lineales respectivas. Demuestra que fog es una afinidad de aplicación lineal asociada FoG.

Problema 4.8.35
Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección afín de base el plano $\Pi : x + y + z = 1$ y dirección $W = \langle(1,-1,2)\rangle$. Determina la imagen por dicha proyección

i) del punto $(1,1,1)$

ii) de la recta

$$x = 1 + \alpha$$

$$y = 1 - \alpha$$

$$z = 1 + 2\alpha$$

iii) de la recta

$$x = 1 + \alpha$$

$$y = 1 + \alpha$$

$$z = 1 + \alpha$$

Problema 4.8.36
Demuestra que la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, que al punto $M(x, y, z)$ asocia el punto $M'(x', y', z')$ tal que

$$x' = -y + z - 1$$
$$y' = -x + z - 1$$
$$z' = -x - y + 2z - 1$$

es una proyección. Determina sus elementos base y dirección.

Problema 4.8.37
Demuestra que la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, que al punto $M(x, y, z)$ asocia el punto $M'(x', y', z')$ tal que

$$x' = 2x - 2z - 3$$
$$y' = x - z - 2$$
$$z' = x - z - 3$$

es una proyección. Determina sus elementos base y dirección.

Problema 4.8.38
Sean Y y Z dos subespacios afines de $\mathbb{R}^n$ con la misma dimensión, y $W(Y)$ y $W(Z)$ los subespacios vectoriales asociados (llamados direccionesde Y y Z respectivamente). Se dice que Y y Z son paralelos si $W(Y) = W(Z)$.

i) Da ejemplos de rectas en $\mathbb{R}^3$ que sean paralelas.

ii) ¿Son paralelos los planos de $\mathbb{R}^3$ siguientes?

$$Y : x - y + 2z = 1$$
$$Z : x = 1 - a + 3b$$
$$y = 1 + a + b$$
$$z = 1 + a - b$$

iii) ¿Son paralelos los planos de $\mathbb{R}^3$ siguientes?

$$Y : x - y + 2z = 1$$
$$Z : x = 1 - a + 3b$$
$$y = a + b$$
$$z = a - b$$

iv) ¿Cómo son Y y Z si siendo paralelos tienen un punto en común?.

v) Demuestra que si Y y Z son rectas paralelas sin puntos en común, entonces existe un plano que contiene a ambas rectas.

vi) Demuestra que la imagen por una homotecia o traslación de una recta afín es otra recta paralela a la primera. Deduce que rectas paralelas se transforman por una homotecia o una traslación en rectas paralelas.

Problema 4.8.39
Da la ecuación matricial de la simetría afín de $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta de ecuación $x + y = 1$ paralelamente al subespacio vectorial engendrado por el vector $u = (1, 2)$.

Problema 4.8.40
Se considera el espacio afín estandar $\mathbb{R}^3$ con el sistema de referencia canónico. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto $M(x, y, z)$ le asocia el punto $f(M) : (x', y', z')$ siendo $x' = 3x - 4z - 6$, $y' = 2x - y - 2z - 4$, $z' = 2x - 3z - 6$. Demuestra que f es una aplicación afín. Prueba que f es una simetría determinando sus elementos (base y dirección).

Problema 4.8.41
De las rectas que hayas dado en el apartado i) del ejercicio 4.8.38, obtén sus imágenes por

i) la proyección del ejercicio 4.8.36.

ii) la simetría del ejercicio 4.8.40.

¿Los subespacios afines obtenidos en i) son paralelos? ¿Los subespacios afines obtenidos en ii) son paralelos?

Problema 4.8.42
En el espacio afín euclideo $X = \mathbb{R}^2$ se considera la siguiente aplicación afín:

$$f : X = \mathbb{R}^2 \longrightarrow X = \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow (x + 1, y - 2)$$

Demuestra que es un movimiento y dí de qué movimiento se trata dando los elementos que lo definen.

Problema 4.8.43
En el espacio afín $X = \mathbb{R}^2$ se consideran los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (2, -3)$. Si r es la recta que pasa por P y Q, ¿cuál es la ecuación de la recta imagen de r por una traslación de vector $v = (-1, 1)$?.

Problema 4.8.44
En el espacio afín $X = \mathbb{R}^3$ se considera el plano de puntos $\Pi = \{(x, y, z) \in X : x - y = z + 1\}$. Determina la imagen del punto $P = (0, 0, 0)$ por la simetria ortogonal de base el plano Π.

Problema 4.8.45
En el espacio afín $X = \mathbb{R}^3$ se considera el punto $P(1, 2, 3)$.

1. Determina la imagen del punto P por cada una de las aplicaciones afines siguientes.
   (a) Traslación de vector $v : (-1, -2, -3)$.
   (b) Proyección ortogonal de base el plano de puntos $x + 2y + 3z = 0$.
   (c) Simetría ortogonal de base el plano de puntos $x + 2y + 3z = 7$.
   (d) Homotecia de centro $C(2, 4, 6)$ y razón $\alpha = 2$.
2. Realiza dos dibujos que ilustren que las aplicaciones de los apartados 2. y 4. no son movimientos.

Parte II

Cuestionarios

Cuestionarios

Se incluye a continuación un conjunto de preguntas de respuesta múltiple cuya realización se aconseja con el fin de verificar que se han asimilado correctamente los conceptos que se han manejado en las siete lecciones de este volumen. En cada cuestión siempre hay, al menos, una respuesta correcta pudiendo ser correctas todas las respuestas posibles.

Cuestionario 1: Espacios Vectoriales

Cuestión 1
¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $(R^4, +, \cdot_{\mathbb{R}})$?

1. $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x, y, z \in \mathbb{Z},\, t = 0\}$
2. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y, z, t \in \mathbb{Q},\, x = 0\}$
3. $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y = 0\}$
4. $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, z = 3,\, t = 0\}$

Cuestión 2
Se considera el subespacio de $(R^4, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ siguiente:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son sistema generador de U?

1. $S_1 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (4, 0, 0, -1)\}$
2. $S_2 = \{(1, 1, -1, 0), (3, 2, -1, -1)\}$
3. $S_3 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (4, 0, 0, -1), (1, 1, -1, 0)\}$
4. $S_4 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$

Cuestión 3
¿Cuáles de las siguientes familias de vectores de $(R^4, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ son libres?

1. $L_1 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (4, 0, -1, 0)\}$

2. $L_2 = \{(2, -1, 0, 0), (3, 0, -1, 0), (1, 1, -1, 0)\}$
3. $L_3 = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$
4. $L_4 = \{(1, 1, 1, 1)\}$

Cuestión 4
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 6. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. En V existen sistemas generadores con 6, 7, 8 y más vectores.
2. Si L es una familia libre de vectores de V, entonces en L hay a lo sumo 6 vectores.
3. Si v_1, v_2, v_3 son vectores linealmente independientes de V, entonces existen vectores v_4, v_5 tales que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es una familia libre.
4. Si v_1, v_2, v_3 son vectores linealmente independientes de V, entonces existen vectores v_4, v_5 tales que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es un sistema generador.

Cuestión 5
Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y U y W subespacios de V y distintos entre sí. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Si U y W tienen ambos dimensión 3, entonces la dimensión de $U \cap W$ es 2.
2. Si $U = \{u_1, u_2\}$ y $u_1, u_2 \notin W$, entonces $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.
3. Si la dimensión de U es 3, la dimensión de W es 2 y W no es subespacio de U, entonces existe un subespacio T tal que $T \subset W$ y $V = U \oplus T$.
4. Si $\dim(U + W) = 3$ y $\dim(U \cap W) = 2$, entonces $U \subset W$ o $W \subset U$.

Cuestión 6
Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 5$
2. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ambas en V, son linealmente independientes.
3. El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V.

4. La matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$, no pertenece al subespacio generado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Cuestión 7
En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3 se consideran los subespacios:

$$U = \{p(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \,:\, (p(X))'' = cX + d\}$$

$$W = \{p(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \,:\, (p(X))' = bX^2 + cX + d\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. El conjunto $\{X^3 + 6X,\ X^2 + 2\}$ es base de U.
2. $W = \{X^3 + 3X^2 + 6X + 2\}$
3. $W \subset U$
4. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$

Cuestión 8
Se considera el subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle\{(1,1,1),(1,1,0)\}\rangle$$

y sean $u_k = (1,1,1) + k(1,1,0)$ y $U_k = \langle\{u_k\}\rangle$ con $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Si $i \neq j$, entonces $U_i \cap U_j = \{\mathbf{0}\}$.
2. $U_i \cap U_j = \{\mathbf{0}\}$ o $U_i = U_j$ cualesquiera que sean i, j.
3. En U hay una cantidad infinita de subespacios de dimensi'on 1.
4. $U_i = U_j$ cualesquiera que sean i, j.

Cuestión 9
Sea U el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \;:\; x + y + z = 0,\, t + u = 0\}$$

¿Cuáles de los subespacio W_i siguientes satisfacen la condición $U \oplus W_i = \mathbb{R}^5$?

1. $W_1 = \langle\{(1,1,-2,5,-5),(1,1,1,0,0)\}\rangle$

2. $W_2 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x + y + z + t + u = 0\}$

3. $W_3 = \langle\{(1, 0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 3, -4)\}\rangle$

4. $W_2 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x + 2y = 0, \ z = u = 0\}$

Cuestión 10
Señala qué afirmaciones de las siguientes son ciertas.

1. Para cada número natural n existen $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión n.

2. Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, entonces se puede considerrar una colección de subespacios $U_1, U_2, \cdots, U_n$ verificando
$$\{\mathbf{0}\} \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n = V$$

3. Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \cdots, v_1 + v_2 + v_3 + v_n\}$ es una base de V.

4. Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2m + 1$, y las dimensiones de dos subespacios U y W de V, tales que $U + W = V$, son pares, entonces $U \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$.

Cuestionario 2: Aplicaciones Lineales

Cuestión 11
Señala qué aplicaciones de las siguientes son lineales.

$$f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

1. $f_1(x, y, z, t) = (e^x, e^y, t + z)$
2. $f_2(x, y, z, t) = (x^2, y, t + z)$
3. $f_3(x, y, z, t) = (x, y, t + z)$
4. $f_4(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z, x + y)$

Cuestión 12
¿Indica qué aplicaciones de las siguientes son lineales.

$$g_i : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_3[X]$$

1. $g_1(p(X)) = p'(-1)$ donde $p'(X)$ es el polinomio derivado de $p(X)$.
2. $g_2(p(X)) = p'(X) + p''(X)$
3. $g_3(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) = bX^3 + cX^2 + dX + e$
4. $g_4(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) = bX^3 + cX^2 + dX + e + 1$

Cuestión 13
Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Indica qué afirmaciones de las siguientes son ciertas.

1. Si las coordenadas del vector v_1 respecto de la base $\mathcal{B}'$ son (α, β, γ), las coordenadas de v_1 en la base $\mathcal{B}_1 = \{w_2, w_1, w_3\}$ son (β, α, γ).
2. Si las coordenadas de los vectores v_1, v_2, v_3 en función de $\mathcal{B}'$ son respectivamente $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$, entonces $v_1 = w_3, v_2 = w_2, v_3 = w_1$.
3. Supongamos que las columnas de la matriz M están formadas, respectivamente, por las coordenadas de los vectores v_i (i=1,2,3) respecto $\mathcal{B}'$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En esas condiciones si las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}$ son (α, β, γ), entonces las coordenadas de v respecto $\mathcal{B}'$ son $(\alpha - \beta, \alpha + \beta + \gamma, \alpha - \beta + \gamma)$

4. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son distintas, entonces existe algún vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas diferentes respecto de ambas bases.

Cuestión 14

Sea $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por $v_1 = \dfrac{1}{2}(e_1+e_2)$, $v_2 = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_2)$ y $v_3 = e_2 + e_3$. ¿Cuáles de las siguientes frases son verdaderas?.

1. El vector de coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathcal{B}$, tiene coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathcal{B}_c$.
2. La matriz del endomorfismo identidad de $\mathbb{R}^3$, respecto de las bases $\mathcal{B}$ (en el espacio inicial) y $\mathcal{B}_c$ (en el espacio final) es:
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Un vector v de coordenadas (α, β, γ) respecto de la base $\mathcal{B}_c$ tiene coordenadas $(\alpha', \beta', \gamma')$ respecto de la base $\mathcal{B}$, donde
$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$
4. El vector de coordenadas $(0,0,0)$ respecto de la base $\mathcal{B}_c$ tiene coordenadas $(1,-1,0)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Cuestión 15

Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, 2x+y+x, 3x+y),$$

¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $ker(f) = \langle\{(1,-3,1,1)\}\rangle$
2. $Im(f) = \mathbb{R}^3$
3. $\dim(Im(f))$=2
4. f no es inyectiva y sí es sobreyectiva.

Cuestión 16

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la matriz siguiente cuando en los espacios inicial y final se consideran las bases canónicas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $ker(f) = \langle\{(1, -3, 1, 1)\}\rangle$
2. $Im(f) = \mathbb{R}^3$
3. $\dim(Im(f))$=2
4. f no es inyectiva y sí es sobreyectiva.

Cuestión 17

Si V y W son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensiones 2 y 5 respectivamente y $f : V \to W$ es una aplicación lineal, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. f no es sobreyectiva.
2. Si f no es inyectiva, entonces $\dim(Im(f)) = 1$ o f es la aplicación nula.
3. f siempre es inyectiva.
4. Si f es inyectiva, entonces la aplicación $\overline{f} : V \to Im(f)$ definida por $\overline{f}(v) = f(v)$ es un isomorfismo.

Cuestión 18

Sea $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ la aplicación lineal que a cada polinomio le asocia su polinomio derivado. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas?

1. f puede representarse, respecto bases apropiadas, por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. f puede representarse, respecto bases apropiadas, por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. f puede representarse, respecto bases apropiadas, por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. f puede representarse, respecto bases apropiadas, por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuestión 19

Denotemos por $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices con coeficientes reales de tamaño 2×3, y sea $f:\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada matriz

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

le asocia el vector $(a_{11}+a_{21},a_{12}+a_{22},a_{13}+a_{23})$ de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathcal{B}_C=\{E_{ij}:i=1,2,j=1,2,3\}$ la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ (E_{ij} es la matriz de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que tiene un 1 en el lugar (i,j) y 0 en el resto).

Sea $\mathcal{B}_c=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. La matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}_C$ y $\mathcal{B}_c$ es
$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$
2. El núcleo de f está generado por las matrices $E_{11}-E_{21}$, $E_{12}-E_{22}$ y $E_{13}-E_{23}$
3. El rango de la aplicación lineal es 3.
4. Respecto de las bases
$$\mathcal{B}=\{E_{11}-E_{21},E_{12}-E_{22},E_{13}-E_{23},E_{11},E_{12},E_{13}\}\quad \text{y}$$
$$\mathcal{B}'=\{e_3,e_2,e_1\}$$
la matriz asociada a f es
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Cuestión 20

En los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases respectivas

$$\mathcal{B}=\{(1,-1),(2,0)\}\quad \text{y}\quad \mathcal{B}'=\{(1,1,1),(1,-1,1),(2,0,0)\}$$

y sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto dichas bases tiene por matriz asociada

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 1&1\\ 0&1\\ 2&0\end{pmatrix}.$$

Señala de las frases siguientes las que sean verdaderas.

1. Si v es el vector de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas $(1,1)$ respecto $\mathcal{B}$, entonces $f(v)$ es el vector de $\mathbb{R}^3$ que tiene coordenadas $(2,1,2)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
2. Si u es el vector de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas $(1,-1)$ respecto $\mathcal{B}$, entonces $f(u)$ es el vector de $\mathbb{R}^3$ que tiene coordenadas $(1,0,2)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Si w es el vector de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (α, α) respecto $\mathcal{B}$, entonces $f(w)$ es el vector de $\mathbb{R}^3$ que tiene coordenadas $(2\alpha, \alpha, 2\alpha)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Los vectores e_1, e_2 de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ se transforman mediante f en los vectores $(1, 0, 1)$ y $(-4, -1, 0)$ respectivamente (expresados respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

Cuestión 21
Sean $V_1, V_2, \cdots, V_{1000}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, finito dimensionales, y supongamos que en la secuencia

$$V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \xrightarrow{f_3} \cdots\cdots \xrightarrow{f_{999}} V_{1000} \xrightarrow{f_{1000}} V_1$$

las aplicaciones f_i son lineales y sucede que la imagen de cada una de ellas coincide con el núcleo de la siguiente (entiéndase además f_1 siguiente a f_{1000}) . ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas?

1. $f_2 \circ f_1,\ f_3 \circ f_2,\ \cdots,\ f_{1000} \circ f_{999}$ son aplicaciones nulas.

2. $\dim V_1 - \dim V_2 + \dim V_3 - \dim V_4 + \cdots + \dim V_{999} - \dim V_{1000} = 0.$

3. $f_{1000} \circ f_{999} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ es la aplicación nula.

4. $\dim V_i$ es par para $i = 1, 2, 3, \cdots, 999, 1000.$

Cuestión 22
Sean U y W subespacios distintos de $\mathbb{R}^4$ tales que $\dim(U) = \dim(W) = 3$ y $f : U \to W$ tal que $\ker(f) = U \cap W$. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son ciertas?

1. Existen bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_W$ de U y W respectivamente tales que la matriz asociada a f respecto dichas bases es
$$M_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Existen bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_W$ de U y W respectivamente tales que la matriz asociada a f respecto dichas bases es
$$M_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Existen bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_W$ de U y W respectivamente tales que la matriz asociada a f respecto dichas bases es
$$M_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Existen bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_W$ de U y W respectivamente tales que la matriz asociada a f respecto dichas bases es
$$M_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿

Cuestionario 3: Teoría del endomorfismo (Diagonalización)

Cuestión 23
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

1. Si el polinomio característico de f es $p_f(X) = (X-1)^2 X$, entonces siempre existen vectores v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes tales que

$$f(v_1) = v_1, f(v_2) = v_2, f(v_3) = \mathbf{0}.$$

2. Si respecto de una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y f es diagonalizable, entonces el polinomio mínimo de f es $m_f(X) = (X-1)(X+1)$ y $a = 0$.

3. Si respecto de una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

existe otra base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f es

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Si f tiene dos autovalores distintos y $\dim(\ker(f)) = 2$, entonces f es diagonalizable.

Cuestión 24
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que respecto de la base canónica está representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

siendo a, b números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

1. f es no inyectiva.
2. Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces f no es diagonalizable.
3. Si $a \neq 0$ y $b = 0$ entonces f no es diagonalizable.
4. Si $a = 1$ y $b = 2$ entonces f es diagonalizable.

Cuestión 25
Sea f un endomorfismo no nulo de $\mathbb{R}^2$ tal que respecto de la base canónica está representado por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

siendo a, b, c números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

1. El polinomio característico de f siempre tiene raices reales.
2. f siempre es diagonalizable, independientemente de los valores de a, b, c.
3. Si $a = c$ y $b \neq 0$, entonces $\{(1,1),(1,-1)\}$ es una base de vectores propios.
4. Si $a = c$ y $b = 0$, entonces cualquier base de $\mathbb{R}^2$ es una base de vectores propios.

Cuestión 26
Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Señalar qué proposiciones de las siguientes son ciertas.

1. El polinomio característico de A es $(X-1)^2(X+1)$
2. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.
3. $A^{35} = A$
4. A^{35} es la matriz nula.

Cuestión 27
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}_2[X]$ que está representado respecto de la base canónica $\{1, X, X^2\}$ por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. $\{1, 3X + 2X^2, 1 + X\}$ es una base de vectores propios de f.
2. No existe una base de vectores propios para f.
3. El polinomio mínimo y el polinomio característico de f coinciden.
4. $f^6 - f^2$ es la aplicación idénticamente nula.

Cuestión 28
Sean f y g endomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. Si 0 es autovalor de f, entonces 0 es autovalor de $g \circ f$.
2. Si $\operatorname{im}(f) \cap \ker(g) \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces 0 es autovalor de $g \circ f$.
3. Si $\alpha \neq 0$ es autovalor de f, entonces α es autovalor de $g \circ f$.
4. Si $v \in \mathbb{R}^n$ es autovector de f y autovector de g, entonces v es autovector de $g \circ f$.

Cuestión 29
Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas, respecto de las bases canónicas correspondientes, por las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. $f \circ g$ es diagonalizable.
2. $e_3 - e_4$ es un vector propio de $f \circ g$.
3. $g \circ f$ es diagonalizable.
4. $g \circ f$ es inyectiva.

Cuestión 30
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida, respecto de la base canónica, por las matrices A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. El conjunto de vectores $\{e_1 + e_4, e_1 - e_3, 3e_1 + e_4, -3e_1 + 4e_2 + 4e_3 + e_4\}$ constituye una base de vectores propios para el endomorfismo f.
2. La matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B} = \{e_1 + e_4, e_3 + e_4, 5e_1 - e_3 + 2e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ es una matriz triangular superior.
3. f no puede ser representado por una matriz triangular.
4. Existe un número natural m tal que f^m es la aplicación nula.

Cuestión 31
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuyo polinomio característico es $p_f(X) = (X-1)^2(X+1)(X-3)$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. Si existen vectores $v, w \in \mathbb{R}^4$ linealmente independientes, tales que $f(v) = v$ y $f(w) = w$, entonces f es diagonalizable.
2. Si el número 1 no es raiz del polinomio $m'_f(X)$ (derivado del polinomio $m_f(X)$, polinomio mínimo de f), entonces f es diagonalizable.
3. Si el polinomio mínimo de f, $m_f(X)$, es de grado tres, entonces f es diagonalizable.
4. f^2 es la aplicación nula.

Cuestión 32
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^5$, del que se sabe que

- Su polinomio característico tiene tres raices distintas.
- $(f-I)^2(f^3-5f^2)$ es la aplicación nula.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. El polinomio característico de f es $(X-1)^2X^2(X-5)$.
2. El polinomio característico de f es de la forma $(X-1)^{r_1}X^{r_2}(X-5)^{r_3}$ con $r_1+r_2+r_3 = 5$ y $r_i \geq 1$ con $i = 1, 2, 3$.
3. f no es triangularizable.
4. Si $p_f(X) = (X-1)^2X^2(X-5)$, no es posible afirmar que f sea diagonalizable, pero sí que existen bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^5$ tales que la matriz asociada a f respecto dichas bases es

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 33
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^5$, del que se sabe:

- Su polinomio característico es $p_f(X) = (X-1)^2X^2(X-5)$
- Existe un vector $v_1 \in \ker(f-I)^2 - \ker(f-I)$
- v_2, v_3, v_4 son vectores propios asociados a $1, 0, 5$ respectivamente.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. $\dim(\ker(f-I)) = 1$ y $\ker(f-I)^2 = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

2. La familia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una parte libre de $\mathbb{R}^5$.
3. $f(v_1) \in \ker(f - I)^2$.
4. Si $\mathcal{B} = \{v_2, v_1, v_3, v_4, v_5\}$ es una base de $\mathbb{R}^5$, entonces la matriz asociada a f respecto a esa base es triangular.

Cuestionario 4: Teoría del endomorfismo (Formas de Jordan)

Cuestión 34
Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base canónica, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

¿cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

1. El endomorfismo $f^2 - 3f$ de $\mathbb{R}^3$ está definido, respecto de la base canónica, también por la matriz A.
2. Cualquier matriz de la forma $A^m + a_{m-1}A^{m-1} + a_{m-2}A^{m-2} + \cdots + a_1 A + a_0$ con $m \geq 3$ coincide con alguna matriz que se expresa como $b_2A^2 + b_1A + b_0$, donde los a_i y los b_j son números reales.
3. f no es biyectivo.
4. La matriz A tiene inversa y es $(-\frac{1}{4})(A^2 + 2A - 7I)$.

Cuestión 35
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, respecto de la base canónica por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $(X-1)(X^2+X+4)$. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

1. $\ker(f - I) = \operatorname{im}(f^2 + f + 4I)$
2. La forma de Jordan asociada a f es del tipo
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0$$
3. $\ker(f^2 + f + 4I) = \langle\{4e_1 - 3e_2, e_1 + e_2\}\rangle$
4. Respecto de la base $\mathcal{B} = \{e_1, 4e_1 - 3e_2, e_1 + e_3\}$ la matriz asociada f es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Cuestión 36
Sea f endomorfismo de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 4 con $\dim(\ker(f)) = 2$. Indica cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas.

1. Las posibles formas de Jordan de f son

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\alpha&0\\ 0&0&0&\beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\alpha&0\\ 0&0&0&\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\alpha&1\\ 0&0&0&\alpha \end{pmatrix}$$

   donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ distintos.

2. Si 1 y -1 son autovalores de f, el polinomio mínimo de f es $X(X^2-1)$

3. Si X^2+1 es un factor del polinomio característico de f entonces la forma de Jordan de f es diagonal y los elementos de la diagonal son $0, 0, i, -i$.

4. f no puede tener como polinomio característico $p_f(X) = X^4$.

Cuestión 37

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ tiene asociada la matriz de Jordan siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Indica cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas.

1. f es un isomorfismo.

2. La matriz asociada a f^{-1} respecto $\mathcal{B}$ es $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&-1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.

3. Respecto de la base $\mathcal{B}' = \{v_1, -v_2, v_3\}$ la matriz asociada a f^{-1} es J.

4. $\ker(f - I) = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

Cuestión 38

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión 4. Indica cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas.

1. No puede existir f tal que su polinomio característico sea $p_f(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 4X - 2$ y su matriz de Jordan sea de la forma

$$\begin{pmatrix} *&1&0&0\\ 0&*&1&0\\ 0&0&*&1\\ 0&0&0&* \end{pmatrix}$$

   donde los $*$ representan los autovalores de f.

2. No puede existir f tal que su polinomio mínimo sea de grado 4.

3. Las matrices
$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
no pueden representar ambas a f.

4. Las matrices
$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
no pueden representar ambas a f.

Cuestión 39
Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión 5, y sea $d(X)$ el máximo común divisor entre el polinomio mínimo de f y la derivada de éste. Indica cuáles de las siguientes frases son verdaderas teniendo en cuenta que

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Si los autovalores de f son 1, 2 y 3, y $d(X) = (X-1)^2$, entonces la forma de Jordan de f es J_1.

2. Si los autovalores de f son 1, 2 y 3, y $d(X) = (X-1)$, entonces la forma de Jordan de f es J_2.

3. Si los autovalores de f son 1, 2 y 3, y $d(X) = (X-1)(X-2)$, entonces la forma de Jordan de f es J_4.

4. Si los autovalores de f son 1 y 2, y $d(X) = (X-1)(X-2)$, entonces la forma de Jordan de f es J_3.

Cuestión 40
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Si A es una matriz cualquiera y α es uno de sus autovalores, entonces $\alpha^2+3\alpha+1$ es un autovalor de la matriz A^2+3A+I

2. Si J es la forma de Jordan de una matriz M cuyos autovalores son $1, 2, 3$, entonces J no es nilpotente.
3. Si J es la forma de Jordan de una matriz M, y J es nilpotente, entonces el polinomio característico de M tiene como único factor irreducible X.
4. Los autovalores de una matriz y su forma de Jordan pueden ser distintos.

Cuestión 41
Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. Dos matrices semejantes tienen el mismo rango, el mismo polinomio característico y el mismo polinomio mínimo.
2. Una matriz y su forma de Jordan tienen el mismo rango, el mismo polinomio característico y el mismo polinomio mínimo.
3. Dos matrices de igual tamaño pueden tener el mismo rango, el mismo polinomio característico y el mismo polinomio mínimo, y no ser semejantes.
4. Si dos matrices de igual tamaño tienen polinomos mínimos diferentes, entonces no son semejantes.

Cuestión 42
Se consideran las siguientes matrices de tamaño 6×6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Las matrices A y B son de Jordan.
2. Las matrices A y B tienen el mismo rango, el mismo polinomio característico y el mismo polinomio mínimo.
3. Las matrices A y B no son semejantes.
4. Las matrices A y B son semejantes.

Cuestión 43
Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ d & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. Si $a = b = 1$ y $cd \neq 0$, entonces las matrices A y B son semejantes.

2. A y B tienen igual forma de Jordan si y sólo si se da una de las condiciones siguientes
$$(a = b = 1, c \neq 0) \quad \text{o} \quad (a = b = 1, d \neq 0).$$

3. Si $c = d = 0$, entonces A y B no tienen la misma forma de Jordan.

4. Si A y B son semejantes entonces $a = b = 1$.

Cuestión 44
Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 300 y A una de sus matrices asociadas. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

1. Si $f^3 - 3f = f$ entonces el polinomio característico de f es $p_f(X) = (X-2)^r(X+2)^s X^t$ con $r + s + t = 300$ y $r, s, t \geq 0$ y f es diagonalizable.

2. Si f es inyectivo, $f^3 - 2f^2 = -f$ y el subespacio propio asociado al valor propio 1 tiene dimensión 1, entonces la matriz de Jordan de f es la matriz $J = (x_{ij})$ donde $x_{ij} = 1$ si $j = i$ o $j = i+1$ y 0 en el resto de los casos.

3. Si $f^3 - 3f = f$ entonces f es un isomorfismo.

4. Si $p_f(X) = (X-1)^{100}(X-2)^{200}$ y los rangos de las matrices $A - I$ y $A - 2I$ son 200 y 299 respectivamente, entonces la forma de Jordan de f es
$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$
donde
· J_1 es la matriz identidad de orden 100,
· $J_2 = (x_{ij})$ es una matriz 200×200 tal que $x_{ii} = 2$, $x_{ii+1} = 1$ para todo i y
· los ceros son matrices nulas de tamaños adecuados.

Cuestionario final. Preguntas de carácter general

Cuestión 45
¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ son subespacios?

1. $\{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] : p'(X) = 3\}$
2. $\{X^2 + 1, X\}$
3. $\{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] : p(0) = 0\}$
4. $\{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$

Cuestión 46
Se consideran el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ y los siguientes subespacios de V

$$U =< \{(1,1,2),(3,4,0)\} >, \quad W = \{(x,y,z) \in V : x = 0, 6y + z = 0\}$$

¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

1. $U \cap W = \{\vec{0}\}$
2. $W \subset U$
3. $U + W = \mathbb{R}^3$
4. $U = W$

Cuestión 47
Se considera el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$, y sea U el siguiente subespacio de V

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad 2x + y - 3z = 0\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. $< \{(1,-2,0,0),(0,3,1,0)\} >$ es base de U.
2. U tiene dimensión 3.
3. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad x + y - z = 0,\ x - 2z = 0\}$ es un subespacio de U.
4. No existe un subespacio T de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Cuestión 48
Las coordenadas del vector $v = (1,2,3,4)$ respecto de la base

$$B = \{v_1 = (4,3,2,1), v_2 = (3,2,1,0), v_3 = (2,1,0,0), v_4 = (1,0,0,0)\}$$

son:

Cuestión 49
Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por su matriz asociada respecto las bases canónicas en los espacios inicial y final:

$$M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $f(\alpha e_1 + \beta e_4) = (\alpha + 3\beta, \alpha + 4\beta, \alpha + 5\beta)$
2. El rango de la aplicación lineal es 4.
3. f es inyectiva.
4. La dimensión del núcleo de la aplicación lineal es 1.

Cuestión 50
Sea $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por su matriz asociada respecto las bases canónicas en los espacios inicial y final:

$$M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. f es sobreyeectiva.
2. La dimensión del núcleo de la aplicación lineal es 4.
3. $\ker(f) = < \{e_1 - e_5, e_1 - e_9, e_2 - e_6, e_2 - e_{10}, e_3 - e_7, e_3 - e_{11},$
   $e_4 - e_8, e_4 - e_{12}, \} >$.
4. $(1, 1, 1, 1) \notin \mathrm{im}(f)$

Cuestión 51
Se consideran las siguientes matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 2, 1), v_2 = (-1, 1, 3), v_3 = (1, 0, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$ y la base canónica $\mathcal{B}'_c$ en $\mathbb{R}^4$ es $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'_c}(f) = M$
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = MP$
2. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = MP^{-1}$
3. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = PM$
4. $M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = P^{-1}M$

Cuestión 52
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica la matriz

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_4, e_2, e_3\}$ entonces la matriz asociada a f respecto de $\mathcal{B}$ es
$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Existen bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$ tales que $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = I_4$
3. No existen matrices inversibles P y Q tales que $QMP = I_4$
4. No es posible hablar de f^{-1}

Cuestión 53
Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica la matriz

$$M = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. $e_1 + e_4$ es vector propio asociado a algún autovalor de f.
2. $2, -2, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$ son los valores propios asociados a f.
3. f no es diagonalizable.
4. $2e_1 + e_4$ es vector propio asociado a algún autovalor de f.

Cuestión 54
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (4x + y + z, x + y + 2z, -x - 2y - 5z, 0)$$

¿Cuál de las siguientes matrices es la matriz asociada a f cuando en el espacio inicial y en el final se consideran las bases canónicas respectivas?

$$1) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad 4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Cuestión 55
Se considera el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$, y sea U el siguiente subespacio de V

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad 2x - y = 0,\ x + 3z - t = 0\}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

1. Si $W_1 =< \{(1, 1, 1, 1)\} >$, entonces la suma $U + W_1$ es directa: $U \oplus W_1$.
2. Si $W_2 =< \{(-2, 1, 1, 3)\} >$, entonces W_2 está contenido en U: $W_2 \subset U$
3. Si $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad 3x - y + 3z - t = 0\}$, entonces $U \cap W_3 = U$.
4. Si $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{tales que} \quad x + y + z = 0,\ t = 0\}$, entonces $U \oplus W_4 = V$.

Cuestión 56
Las coordenadas del vector $v = (1, 2, 3, 7)$ respecto de la base

$$B = \{v_1 = (7, 6, 5, 4), v_2 = (3, 2, 1, 0), v_3 = (2, 1, 0, 0), v_4 = (1, 0, 0, 0)\}$$

son:

Cuestión 57
Se consideran los siguientes subespacios del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in V \quad \text{tales que} \quad x + y + z = 0, t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in V \quad \text{tales que} \quad x + y = 0,\ y - t = 0,\ z + 2t = 0\}$$

Sea $f : U \to W$ una aplicación lineal.
¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas?

1. Cualquier matriz asociada a f es de tamaño 4×4
2. Si f no es la aplicación nula, entonces f es sobreyectiva.
3. Cualquier matriz asociada a f es de tamaño 1×2
4. La aplicación f nunca puede ser isomorfismo.

Cuestión 58
Sea $f : \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por su matriz asociada respecto las bases canónicas en los espacios inicial y final:

$$M_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. f no es sobreyeectiva.
2. La dimensión del núcleo de la aplicación lineal es 4.
3. ker(f)=$< \{e_1 - e_5, e_1 - e_9, e_2 - e_6, e_2 - e_{10}, e_3 - e_7, e_3 - e_{11},$
   $e_4 - e_8, e_4 - e_{12}, \} >$.
4. $(1, 1, 1, 1) \notin \mathrm{im}(f)$

Cuestión 59
Sean U y W dos subespacios de $\mathbb{R}_4[X]$, de los que se sabe que

$$< \{X^2 - 3X + 2, X^4 - 1\} > \subset U \cap W$$

Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. Si $X^3 \in U$ y $X^4 - X^3 - 1 \in W$ entonces $\dim(U \cap W) \geq 3$.
2. Si $\dim(U)$=2 entonces $< \{X^2 - 3X + 2, X^4 - 1\} >= U \cap W = U$.
3. Si $\dim(U + W)$=3, entonces $\dim(U)$=3 y $\dim(W)$=3.
4. Si $\dim(U + W)$=3, entonces $\dim(U)$=3 ó $\dim(W)$=3.

Cuestión 60
¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$ son subespacios?

1. $\{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] : p''(X) = 0\}$
2. $\{X^2, X, X + 3\}$
3. $\{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] : p(0) = 1\}$
4. $\{\alpha X^2 + \beta X + \gamma(X + 3) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$
