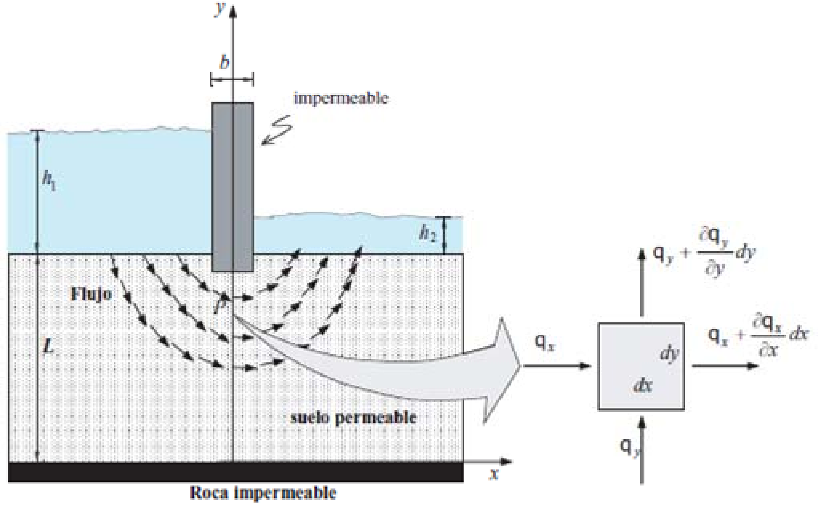
Introducción al método de los Elementos Finitos en 2D

Lección 15
Elementos Finitos en Problemas de Contorno 2D con Evolución Temporal

Adaptado por Jaime Puig-Pey (UC) de:
. Zabaras, N. Curso ‘FE Analysis for Mech&Aerospace Design’. U. Cornell. 2012.
. Reddy, J.N. “An introd to the FEM” . 3rd ed, McGraw-Hill, 2005.

. En diversos problemas de ‘campo’, como la transmisión del calor o el flujo de fluidos, es necesario tener en cuenta la evolución en el tiempo. Para los problemas citados, en la ecuación diferencial en derivadas parciales del problema interviene la variable tiempo, de la siguiente forma, considerando un dominio espacial Ω :

$$\boxed{c\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla(k(x,y)\cdot\nabla u)=f(x,y,t)}$$



con las condiciones auxiliares en el contorno $\partial\Omega$ de Ω a lo largo del tiempo, (t >= 0):

* $u(x,y,t)=\hat{u}(t)$ en $\partial\Omega_1$ tipo (Dirichlet)

$$\boxed{* \ -\left[k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega_2}=q_n \text{ en } \partial\Omega_2\,, n: normal\ exterior, \forall t, \text{(tipo Neumann, flujo - gradiente normal dado)}}$$

. Por otra parte se tienen unas condiciones ‘iniciales’ (t=0) en todo Ω, de la forma:

$$u(x,y,0)=u_0(x,y) \text{ en } \Omega$$

. Se ha estudiado la transformación de la EDP siguiente, con sus condiciones auxiliares tipo Dirichlet y Neumann, problema estacionario, independiente del tiempo t :

$$-\nabla \bullet (k(x,y)\cdot\nabla u(x,y) + b(x,y)\cdot u(x,y)) = f(x,y), \ , \quad (x,y) \in \Omega$$

a una formulación débil equivalente, que ha de verificarse para todas las funciones de peso admisibles w(x,y) que se anulan sobre $\partial\Omega_1$, borde con condiciones esenciales de tipo Dirichlet, donde se obliga a u(x,y) a tomar valores dados.

$$\int_\Omega [k\cdot\nabla u \bullet \nabla w\cdot + b\cdot u\cdot w]dxdy = \int_\Omega f\cdot w\cdot dxdy + \int_{\partial\Omega_2} k\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot w\cdot ds$$

En la ecuación $c\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}\cdot - \nabla \bullet (k(x,y)\cdot\nabla u) = f(x,y,t)$

el término $b\cdot u$ no aparece, y sí el de la derivada temporal de u y el tiempo t como variable independiente adicional, que puede aparecer en f, c y k.

Se considera u(x,y,t), las condiciones auxiliares descritas, y las funciones de peso w(x,y), independientes de t, admisibles, para construir la formulación débil. Para un tiempo fijo, un proceso análogo de transformación aplicando teoremas integrales tipo Divergencia y Green en el dominio espacial Ω en (x,y), lleva a la formulación débil:

$$\boxed{\int_\Omega c\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\cdot w\cdot dxdy + \int_\Omega [k\cdot\nabla u \bullet \nabla w]dxdy = \int_\Omega f\cdot w\cdot dxdy + \int_{\partial\Omega_2} k\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot w\cdot ds}$$

$$\int_{\Omega} c\cdot\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}\cdot w\cdot dxdy + \int_{\Omega}[k\cdot\nabla u \bullet \nabla w]dxdy = \int_{\Omega} f\cdot w\cdot dxdy + \int_{\partial\Omega_2} k\cdot\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial n}\right)\cdot w\cdot ds$$

Se construirá la aproximación por elementos finitos en el espacio x-y, con el proceso habitual de aproximación discretizada del dominio espacial. El dominio discretizado Ω_h aproximará al Ω. Los bordes espaciales serán como antes $\partial\Omega_{1h}$ (esenciales, Dirichlet) y $\partial\Omega_{2h}$ (para gradiente espacial de u, Neumann)

La solución aproximada global se formulará separando las variables espaciales, x,y del tiempo t quedando $u_j(t)$ a determinar):

$$u_h(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\cdot N_j(x,y)$$

siendo "n" el número de funciones base en la discretización, expresándose la solución aproximada $u_h(x,y,t)$ interpolando los valores nodales $u_j(t)$ dependientes del tiempo y las mismas funciones de forma globales $N_j(x,y)$ utilizadas en el caso estacionario, que sólo dependen de (x,y).

Por otra parte, *se emplean las mismas funciones de peso $w_h(x,y)$ que en el caso estacionario, sólo dependientes de (x,y).*

Las $w_h(x,y)$ se anulan en las zonas del borde donde se aplican condiciones esenciales, esto es, donde u es conocida.

$$w_h(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{w_j}_{w_h(x_j,y_j)} \cdot N_j(x,y)$$

$$\int_{\Omega_h} c\cdot\frac{\partial \mathrm{u_h}}{\partial t}\cdot w_h\cdot dxdy + \int_{\Omega_h}[k\cdot\nabla u_h \bullet \nabla w_h]dxdy = \int_{\Omega_h} f\cdot w_h\cdot dxdy + \int_{\partial\Omega_{2h}} k\cdot\left(\frac{\partial u_h}{\partial n}\right)\cdot w_h\cdot ds$$

Vamos a dar una forma matricial a las expresiones anteriores:

$$u_h(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\cdot N_j(x,y) = \underbrace{\mathbf{U}_h(t)^T}_{1xn}\cdot\underbrace{\mathbf{N}^T(x,y)}_{nx1} = \underbrace{\mathbf{N}(x,y)}_{1xn}\cdot\underbrace{\mathbf{U}_h(t)}_{nx1},$$

$$\mathbf{U}_h(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)]^T, \quad \mathbf{N}(x,y) = [N_1(x,y), N_2(x,y), \ldots, N_n(x,y)]$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = \mathbf{N}\cdot\frac{d\mathbf{U}_h(t)}{dt} = \mathbf{N}\cdot\dot{\mathbf{U}}_h(t) \ , \ k\cdot\nabla u_h = D\cdot\begin{Bmatrix}\partial u_h/\partial x \\ \partial u_h/\partial y\end{Bmatrix} = D\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y\end{bmatrix}\cdot\mathbf{U}_h = D\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}_h \ , \ \mathbf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_y\end{bmatrix}}_{2xn}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_h(t) = [du_1(t)/dt, du_2(t)/dt, \ldots, du_n(t)/dt]^T$$

$$w_h(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{w_j}_{w_h(x_j,y_j)}\cdot N_j(x,y) = \underbrace{\mathbf{W}^T}_{1xn}\cdot\underbrace{\mathbf{N}^T}_{nx1} \ ,$$

las componentes de $\mathbf{W}^T$ *son cero en todos los nodos con condiciones esenciales* (u *conocido*)

$$\nabla w_h(x,y) = \left[\frac{\partial w_h}{\partial x}, \frac{\partial w_h}{\partial y}\right] = \mathbf{W}^T\cdot\left[\mathbf{N}_x{}^T, \mathbf{N}_y{}^T\right] = \mathbf{W}^T\cdot\mathbf{B}^T$$

$$\int_{\Omega_h} c\cdot\frac{\partial \mathrm{u_h}}{\partial t}\cdot w_h\cdot dxdy + \int_{\Omega_h}[k\cdot\nabla u_h \bullet \nabla w_h]dxdy = \int_{\Omega_h} f\cdot w_h\cdot dxdy + \int_{\partial\Omega_{2h}} k\cdot\left(\frac{\partial \mathrm{u}_h}{\partial n}\right)\cdot w_h\cdot ds$$

Vamos a dar una forma matricial a las expresiones anteriores:

$$k\cdot\left(\frac{\partial \mathrm{u}_h}{\partial n}\right) = \underbrace{(\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\nabla u}_{2x1})\bullet\vec{n}}_{1x1} \;, D: matriz\ \ prop\ \ constit\ , \vec{n}: versor\ \ exterior\ \ borde\ , \bullet : prod\ \ escalar$$

$$k\cdot\left(\frac{\partial \mathrm{u}_h}{\partial n}\right) = [D\cdot\nabla u_h]_{\vec{n}} = -q_n \quad , \ de\ valor\ \ conocido\ \ en\ \partial\Omega_{2h}\ es\ la\ condición\ \ de\ gradiente\ \ /\ flujo\ conocido$$

Sustituyendo en la forma integral o débil, término a término:

$$\int_{\Omega_h} c\cdot\frac{\partial \mathrm{u_h}}{\partial t}\cdot w_h\cdot dxdy = \int_{\Omega_h} c\cdot\mathbf{W}^T\cdot\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{N}\cdot\dot{\mathbf{U}}_h(t)\cdot dxdy = \mathbf{W}^T\cdot\int_{\Omega_h} c\cdot\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{N}\cdot\dot{\mathbf{U}}_h(t)\cdot dxdy$$

$$\int_{\Omega_h}[k\cdot\nabla u_h \bullet \nabla w_h]dxdy = \int_{\Omega_h}\mathbf{W}^T\cdot\mathbf{B}^T\cdot D\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}_h\,dxdy = \mathbf{W}^T\cdot\int_{\Omega_h}\mathbf{B}^T\cdot D\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}_h\,dxdy$$

$$\int_{\Omega_h} f\cdot w_h\cdot dxdy = \int_{\Omega_h}\mathbf{W}^T\cdot\mathbf{N}^T\cdot f\,dxdy = \mathbf{W}^T\cdot\int_{\Omega_h}\mathbf{N}^T\cdot f\,dxdy$$

$$\int_{\partial\Omega_{2h}} k\cdot\left(\frac{\partial \mathrm{u}_h}{\partial n}\right)\cdot w_h\cdot ds = \int_{\partial\Omega_{2h}}\mathbf{W}^T\cdot\mathbf{N}^T\cdot[D\cdot\nabla u_h]_{\vec{n}}\cdot ds = -\mathbf{W}^T\cdot\int_{\partial\Omega_{2h}}\mathbf{N}^T\cdot q_n\cdot ds$$

$$\int_{\Omega_h} c\cdot\frac{\partial \mathrm{u_h}}{\partial t}\cdot w_h\cdot dxdy + \int_{\Omega_h}[k\cdot\nabla u_h \bullet \nabla w_h]dxdy = \int_{\Omega_h} f\cdot w_h\cdot dxdy + \int_{\partial\Omega_{2h}} k\cdot\left(\frac{\partial u_h}{\partial n}\right)\cdot w_h\cdot ds$$

Quedando la forma débil en formato matricial:

$$\mathbf{W}^T\cdot\left\{\left(\int_{\Omega_h} c\cdot\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{N}\cdot dxdy\right)\cdot\dot{\mathbf{U}}_h(t) + \left(\int_{\Omega_h}\mathbf{B}^T\cdot D\cdot\mathbf{B}\cdot dxdy\right)\cdot\mathbf{U}_h(t) - \int_{\Omega_h}\mathbf{N}^T\cdot f\,dxdy - \int_{\partial\Omega_{2h}}\mathbf{N}^T\cdot\overbrace{[D\cdot\nabla u_h]_{\vec{n}}}^{-q_n}\cdot ds\right\} = 0$$

Recuérdese que las componentes de **W** son cero en todos los nodos con u dado (condiciones de Dirichlet).Observar que la expresión anterior es escalar: $\mathbf{W}^T\cdot\mathbf{R}=0$, producto del vector fila $\mathbf{W}^T$ (1xn) por el columna **R** (nx1), entre 'llaves { }'). Es la representación aproximada de la formulación débil del problema. Se debe cumplir para valores arbitrarios de las componentes del vector **W**, que no sean las establecidas como nulas a priori, es decir, las correspondientes a los nodos con condición esencial (Dirichlet), valor conocido de u.

Se consideran agrupadas las componentes de W y R en la expresión anterior como :

$$\mathbf{W}^T\cdot\mathbf{R} = \left[\mathbf{W}_E{}^T, \mathbf{W}_D{}^T\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{R}_E\\ \mathbf{R}_D\end{Bmatrix} = 0$$

en que están en primer lugar las componentes asociadas a los nodos con condiciones esenciales , subvector E, y luego las demás, subvector D.

Se observa que al ser $\mathbf{W}_E$ un vector de 'ceros', ha de ser $\mathbf{W}_D{}^T\cdot\mathbf{R}_D=0$, para cualesquiera valores W_i de las componentes de $\mathbf{W}_D$.

Ello implica que todas las componentes de $\mathbf{R}_D$ *han de ser nulas !!*

$$\mathbf{W}^T\cdot\left\{\left(\int_{\Omega_h} c\cdot\mathbf{N}^T\cdot\mathbf{N}\cdot dxdy\right)\cdot\dot{\mathbf{U}}_h(t)+\left(\int_{\Omega_h}\mathbf{B}^T\cdot D\cdot\mathbf{B}\cdot dxdy\right)\cdot\mathbf{U}_h-\int_{\Omega_h}\mathbf{N}^T\cdot f\,dxdy-\int_{\partial\Omega_{2h}}\mathbf{N}^T\cdot[D\cdot\nabla u_h]_{\vec{n}}\cdot ds\right\}=0$$

Llamando:

$$\underbrace{\mathbf{M}}_{n\,x\,n}=\int_\Omega c\cdot\mathbf{N}^T\cdot\underbrace{\mathbf{N}}_{1xn}\cdot d\Omega\;\;,\;\;\underbrace{\mathbf{K}}_{n\,x\,n}=\int_\Omega k\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{B}\cdot d\Omega=\int_\Omega\mathbf{B}^T\cdot D\cdot\underbrace{\mathbf{B}}_{2xn}\cdot d\Omega\;\;,\;\;\underbrace{\mathbf{F}}_{n\,x\,1}=\int_\Omega f\cdot\mathbf{N}^T\cdot d\Omega-\int_{\partial\Omega_2} q_n\cdot\mathbf{N}^T ds$$

$$\mathbf{W}^T\cdot\left[\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{U}}_h(t)+\mathbf{K}\cdot\mathbf{U}_h-\mathbf{F}\right]=0$$

Y considerando establecida la ordenación de índices siendo los primeros los de los nodos con condiciones Esenciales, conjunto de índices E, y los demás, conjunto de índices D, se tiene la siguiente expresión por bloques en matrices y vectores:

$$\left[\mathbf{W}_E{}^T,\mathbf{W}_D{}^T\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{R}_E\\\mathbf{R}_D\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{W}_E{}^T,\mathbf{W}_D{}^T\right]\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{M}_E & \mathbf{M}_{ED}\\\mathbf{M}_{DE} & \mathbf{M}_D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_{hE}\\\dot{\mathbf{U}}_{hD}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_E & \mathbf{K}_{ED}\\\mathbf{K}_{DE} & \mathbf{K}_D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_{hE}\\\mathbf{U}_{hD}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mathbf{F}_E\\\mathbf{F}_D\end{Bmatrix}\right\}=0$$

Como $\mathbf{W}_E$ tiene todas sus componentes nulas y las de $\mathbf{W}_D$ son arbitrarias, ha de ser: $\mathbf{R}_D=\mathbf{0}$:

$$\mathbf{M}_D\cdot\dot{\mathbf{U}}_{hD}(t)+\mathbf{K}_D\cdot\mathbf{U}_{hD}(t)=\mathbf{F}_D-\mathbf{M}_{DE}\cdot\dot{\mathbf{U}}_{hE}(t)-\mathbf{K}_{DE}\cdot\mathbf{U}_{hE}(t)$$

que es un sistema de EDO de 1er orden lineal explícito que se puede resolver paso a paso. Recuérdese que $\mathbf{U}_{hE}(t)$ es conocido para todo t>=0 (Dirichlet), y por tanto $d\mathbf{U}_{hE}(t)/dt$.

$$\mathbf{M}_D \cdot \dot{\mathbf{U}}_{hD}(t) + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{U}_{hD}(t) = \mathbf{F}_D - \mathbf{M}_{DE} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{hE}(t) - \mathbf{K}_{DE} \cdot \mathbf{U}_{hE}(t)$$

que es un sistema de EDO de 1er orden lineal explícito que se puede resolver paso a paso. Recuérdese que $\mathbf{U}_{hE}$(t) es conocido para todo t>=0 (Dirichlet), y por tanto d$\mathbf{U}_{hE}$(t)/dt .

Para simplificar, llamando $$\mathbf{S}(t) = \mathbf{F}_D - \mathbf{M}_{DE} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{hE}(t) - \mathbf{K}_{DE} \cdot \mathbf{U}_{hE}(t)$$

donde **M** y **K** no dependen de t si no lo hacen c y k, y **F** depende de t si f o q_n dependen de t,

se puede escribir como un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en t :**

$$\mathbf{M}_D \cdot \dot{\mathbf{U}}_{hD}(t) + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{U}_{hD}(t) = \mathbf{S}(t)$$

Recuérdese que: $\mathbf{U}_{hD}(t)\ y\ \dot{\mathbf{U}}_{hD}(t)$

contienen como incógnitas los valores aproximados, dependientes del tiempo t, de la función incógnita u(x,y,t) así como sus derivadas respecto al tiempo, en los nodos de la malla en que NO se imponen condiciones esenciales, en nuestro caso, nodos en que no se conocen a priori los valores para la función u(x,y,t).

Por otra parte, $\mathbf{U}_{hE}(t)\ y\ \dot{\mathbf{U}}_{hE}(t)$

contienen valores conocidos en los nodos con condiciones esenciales, que son datos que forman parte de las condiciones auxiliares del problema.

Vamos a simplificar la notación representando:

$$\boxed{\mathbf{M}_D \cdot \dot{\mathbf{U}}_{hD}(t) + \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{U}_{hD}(t) = \mathbf{S}(t)}$$ como: $$\boxed{M \cdot \dot{u} + K \cdot u = S}$$

En que recordamos las condiciones 'iniciales' para t=0, en todo el dominio Ω de la forma: u(x,y,0)=u^0(x,y) en Ω, aproximado en su discretización espacial: **U**(t=0)=$\mathbf{U}^0$(x,y) en Ω_h, *u*(t=0)=u^0 , en todos los nodos de la malla.

La solución se aborda mediante un modo denominado de 'semidiscretización', con elementos finitos en el espacio.

Un procedimiento habitual para la resolución del problema transitorio es la familia de métodos de aproximación denominada "θ".

Consiste en aproximar las derivadas respecto al tiempo en dos momentos consecutivos t^m y t^{m+1} mediante una interpolación lineal de la variable de campo *u* en dichos instantes:

$$(1-\theta)\cdot\dot{u}^m + \theta\cdot\dot{u}^{m+1} = \frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t} \quad para \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

y de aquí:

$$\boxed{\begin{array}{l} u^{m+1} = u^m + \dot{u}^{m+\theta}\cdot(1-\theta) \\ siendo: \quad \dot{u}^{m+\theta} = (1-\theta)\cdot\dot{u}^m + \theta\cdot\dot{u}^{m+1} \qquad para \quad 0 \leq \theta \leq 1 \end{array}}$$

Esquema de integración temporal

El sistema de EDOs es válido para todo t > 0, y para los instantes $t = t^m$ y $t = t^{m+1}$:

$$M\cdot\dot{u}^m + K\cdot u^m = S^m \qquad \dot{u}^m = M^{-1}\cdot(-K\cdot u^m + S^m)$$

$$M\cdot\dot{u}^{m+1} + K\cdot u^{m+1} = S^{m+1} \qquad \dot{u}^{m+1} = M^{-1}\cdot(-K\cdot u^{m+1} + S^{m+1})$$

(En lo anterior se está suponiendo que el vector S depende del tiempo, y no así las matrices M y K)

Sustituyendo $\dot{u}^m, \dot{u}^{m+1}$ en:

$$(1-\theta)\cdot\dot{u}^m + \theta\cdot\dot{u}^{m+1} = \frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t} \quad para \;\; 0 \le \theta \le 1$$

se llega a:

$$\Delta t\cdot[(1-\theta)\cdot(-K\cdot u^m + S^m) + \theta\cdot(-K\cdot u^{m+1} + S^{m+1})] = M\cdot(u^{m+1} - u^m)$$

Agrupando:

$$(M + \theta\cdot K\cdot\Delta t)\cdot u^{m+1} = \Delta t\cdot[\theta\cdot S^{m+1} + (1-\theta)\cdot S^m] + [M - (1-\theta)\cdot K\cdot\Delta t]\cdot u^m$$

Resulta la sucesión de sistemas de ecuaciones en u^{m+1}, m=0,1,… ; t_0, t_1, …

$$\hat{K}\cdot u^{m+1} = \hat{S}^{m+1}, \;\; u^0 \;\; conocido$$

siendo:

$$\hat{K}^{m+1} = M + \theta\cdot K\cdot\Delta t \quad , \quad \hat{S}^{m+1} = \Delta t\cdot[\theta\cdot S^{m+1} + (1-\theta)\cdot S^m]\cdot + [M - (1-\theta)\cdot K\cdot\Delta t]\cdot u^m$$

Esquema de integración temporal

Resulta la sucesión de sistemas de ecuaciones en u^{m+1} , m=0,1,… ; t_0, t_1, …

$$\hat{K}\cdot u^{m+1} = \hat{S}^{m+1},\ u^0\ \ conocido$$

$$\hat{K}^{m+1} = M + \theta\cdot K\cdot\Delta t \quad , \quad \hat{S}^{m+1} = \Delta t\cdot[\theta\cdot S^{m+1} + (1-\theta)\cdot S^m]\cdot + [M - (1-\theta)\cdot K\cdot\Delta t]\cdot u^m$$

. Tras hacer el ensamblado de las aportaciones de los elementos finitos, se resuelve esta ecuación para cada paso de tiempo obteniéndose los valores nodales u^{m+1} correspondientes al instante t_{m+1} .

Eligiendo diferentes valores para θ se tienen los siguientes **esquemas de integración paso a paso en el tiempo:**

θ = 1/2: Esquema de **Crank-Nicolson**. Incond. estable. Precisión $O(\Delta t)^2$

θ = 2/3: Esquema de **Galerkin**. Incondicionalmente estable. Precisión $O(\Delta t)^2$

θ = 1: Esquema en difer. finitas hacia atrás. Incond. estable. Precisión $O(\Delta t)$

θ = 0: Esquema en difer. finitas hacia adelante (Euler). Condic. estable. Prec. $O(\Delta t)$

Esquema de integración temporal

. Para todos los esquemas numéricos en que θ < 1/2, esta familia de métodos θ es estable solamente si el paso de tiempo Δt satisface la siguiente condición de estabilidad: $\Delta t <= \Delta t_{cri} = 2/[(1-2\cdot\theta)\cdot\lambda]$

donde λ es el mayor autovalor asociado al problema de autovalores generalizado:

$$K\cdot v = \lambda\cdot M\cdot v$$

Resulta la secuencia de sistemas de ecuaciones en u^{m+1} , m=0,1,… ; t_0, t_1, …

$$\hat{K}\cdot u^{m+1} = \hat{S}^{m+1}, \ u^0 \ \ conocido$$

$$\hat{K}^{m+1} = M + \theta\cdot K\cdot\Delta t \quad , \quad \hat{S}^{m+1} = \Delta t\cdot[\theta\cdot S^{m+1} + (1-\theta)\cdot S^m]\cdot + [M - (1-\theta)\cdot K\cdot\Delta t]\cdot u^m$$

. El esquema de Crank-Nicolson (θ = 1/2) se puede escribir:

$$(M + \frac{1}{2}\cdot K\cdot\Delta t)\cdot u^{m+1} = (M - \frac{\Delta t}{2}\cdot K)\cdot u^m + \frac{\Delta t}{2}(S^{m+1} + S^m)$$

$$(M + \frac{1}{2}\cdot K\cdot\Delta t)\cdot u^{m+1} = M\cdot u^m + \frac{\Delta t}{2}\cdot(S^{m+1} + S^m - K\cdot u^m)$$

Resulta la sucesión de sistemas de ecuaciones en u^{m+1} , m=0,1,… ; t_0, t_1, …

$$\hat{K}\cdot u^{m+1} = \hat{S}^{m+1}, \ u^0 \ \ conocido$$

$$\hat{K}^{m+1} = M + \theta\cdot K\cdot\Delta t \quad , \quad \hat{S}^{m+1} = \Delta t\cdot[\theta\cdot S^{m+1} + (1-\theta)\cdot S^m]\cdot + [M - (1-\theta)\cdot K\cdot\Delta t]\cdot u^m$$

. El esquema de Galerkin (θ = 2/3) se puede escribir:

$$(M + \frac{2\cdot\Delta t}{3}\cdot K)\, u^{m+1} = (M - \frac{\Delta t}{3}\cdot K)\, u^m + \frac{\Delta t}{3}\cdot(2\cdot S^{m+1} + S^m)$$

$$(M + \frac{2\cdot\Delta t}{3}\cdot K)\, u^{m+1} = M u^m + \frac{\Delta t}{3}\cdot(2\cdot S^{m+1} + S^m - K u^m)$$

. El caso (θ = 1) se puede escribir: $(M + \Delta t\cdot K)\cdot u_{n+1} = M\cdot u_n + \Delta t\cdot F_{n+1}$

. El caso (θ = 0) se puede escribir:

$$M\cdot u^{m+1} = (M - K\cdot\Delta t)\cdot u^m + \Delta t\cdot F^m = M\cdot u^m + \Delta t\cdot(F^m - K\cdot u^m)$$