



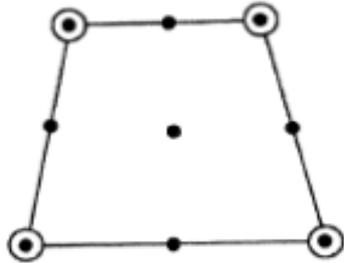
Introducción al método de los Elementos Finitos en 2D

Lección 14 Variantes para la aproximación en elementos finitos 2D

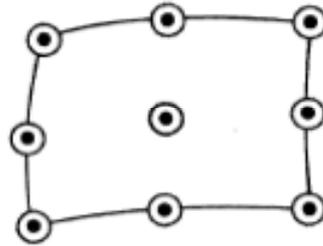
Adaptado por Jaime Puig-Pey (UC) de:
. Zabararas, N. Curso 'FE Analysis for Mech&Aerospace Design'. U. Cornell. 2012.
. Fish, J., Belytschko, T. "A First Course in Finite Elements". Ed. Wiley, 2007.



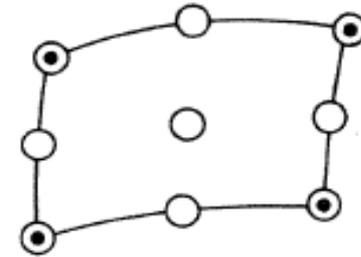
- . Las funciones base utilizadas en las transformaciones T_e no tienen por qué ser las mismas que las que se emplean para la aproximación de funciones.
- . Sea M el número de funciones base utilizadas para definir T_e y sea n_e el número de funciones base (nodos por elemento) utilizadas para la aproximación de funciones.
- . Los polinomios empleados para definir la geometría pueden ser de mayor orden ($M > n_e$), igual ($M = n_e$) o menor ($M < n_e$) que los empleados para la aproximación de la función incógnita principal.
- . Esto define elementos finitos superparamétricos, isoparamétricos y subparamétricos respectivamente.



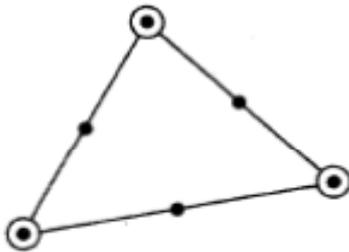
$M = 4$
 $ne=9$



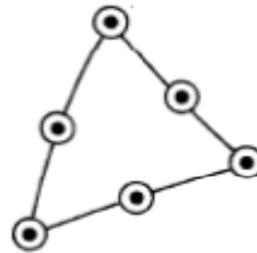
$M = 9$
 $ne=9$



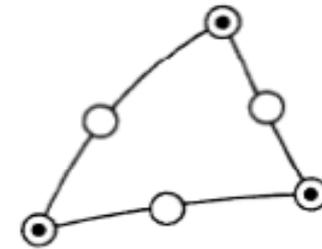
$M = 9$
 $ne=4$



$M = 3$
 $ne=6$



$M = 6$
 $ne=6$



$M = 6$
 $ne=3$

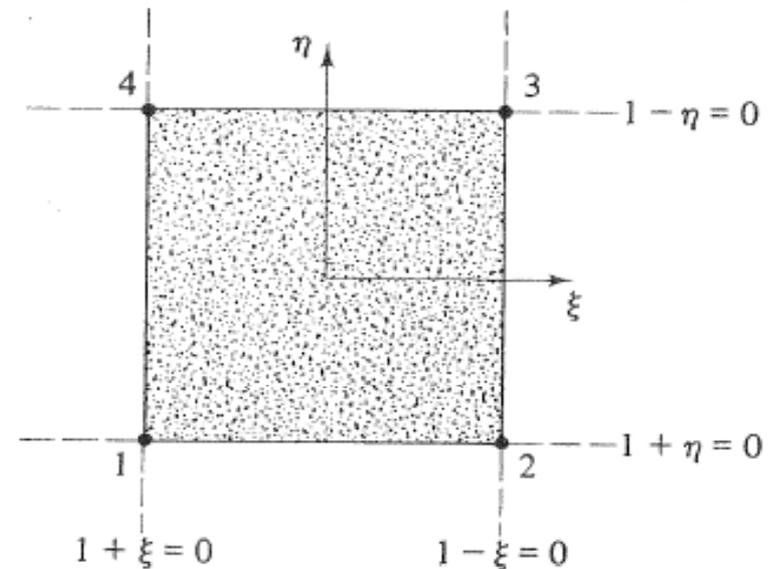
. Utilizamos el producto tensorial de polinomios de Lagrange 1D de grado 1:

$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta)$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta)$$

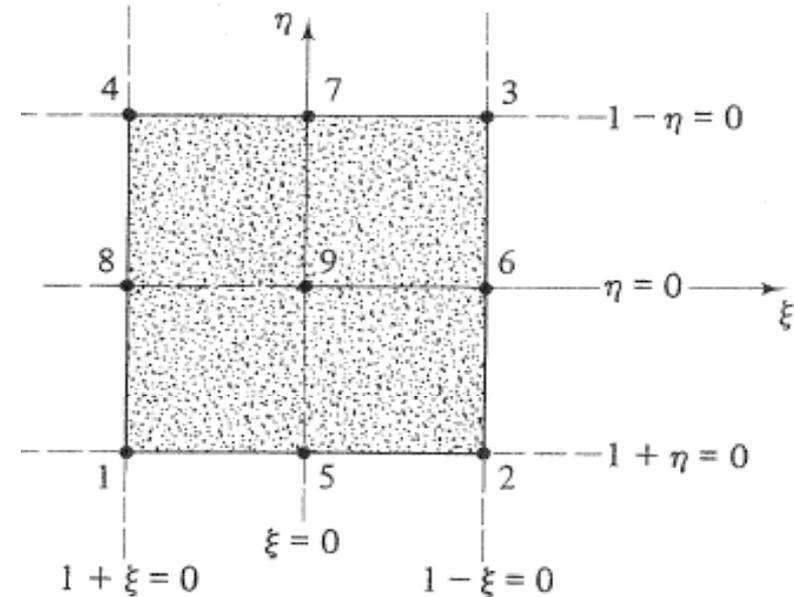
$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 + \eta)$$

$$\hat{N}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 + \eta)$$



. Utilizamos el producto tensorial de polinomios de Lagrange 1D de grado 2.

$$\begin{aligned}\hat{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi) \cdot (\eta^2 - \eta) , & \hat{N}_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \cdot (\eta^2 - \eta) \\ \hat{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi) \cdot (\eta^2 - \eta) , & \hat{N}_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \cdot (1 - \eta^2) \\ \hat{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi) \cdot (\eta^2 + \eta) , & \hat{N}_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \cdot (\eta^2 + \eta) \\ \hat{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi) \cdot (\eta^2 + \eta) , & \hat{N}_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \cdot (1 - \eta^2) \\ & & \hat{N}_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2)\end{aligned}$$



. Observar que en este modelo existe un nodo interno (9).

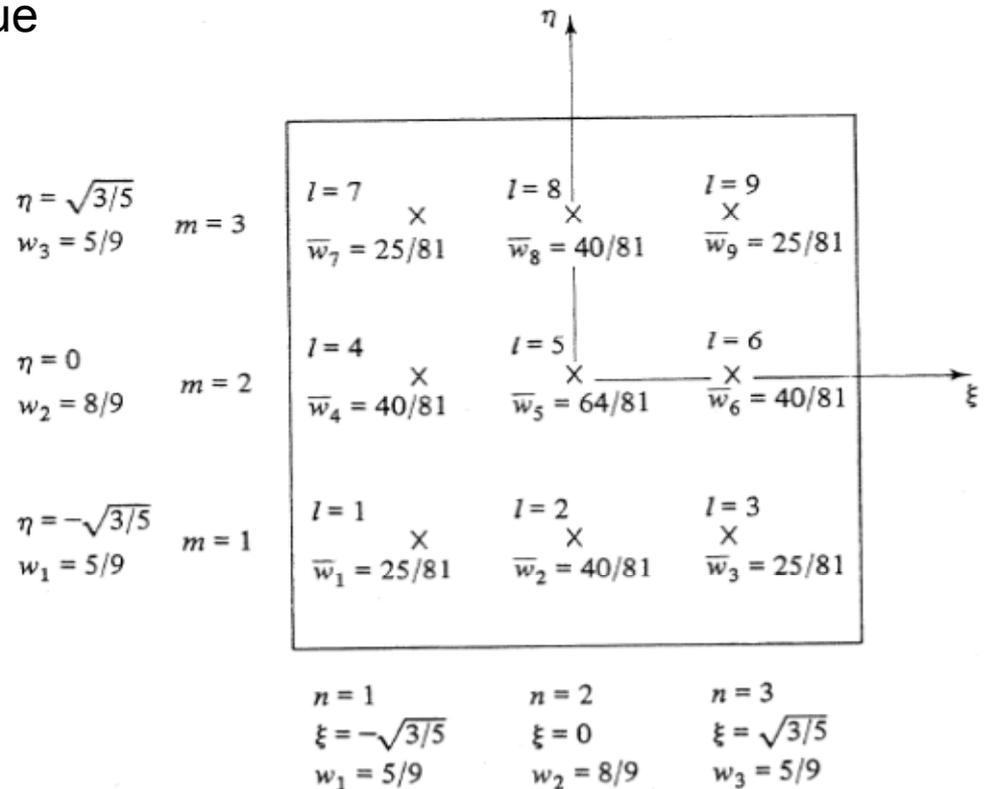


. Las reglas de cuadratura 2D se basan en las reglas de Gauss 1D:

. Aquí renombramos los índices (m,n) con sólo uno l, variando de 1 a N_p^2 , en este caso N_p es el num. de p. base de Gauss-Legendre en 1D, supuesto que se toma el mismo valor N_p en cada dirección.

$$\int_{\hat{A}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (G(\xi, \eta) d\xi) d\eta = \sum_{i=1}^{N_p} \left(\sum_{j=1}^{N_p} G(\xi_i, \eta_j) \cdot w_i \right) \cdot w_j = \sum_{l=1}^{(N_p)^2} G(\xi_l, \eta_l) \cdot \bar{w}_l$$

. Esta regla de Gauss-Legendre de 3x3 puntos integra exactamente polinomios de grado menor o igual que 5 en cada variable en el dominio (ξ, η) !!

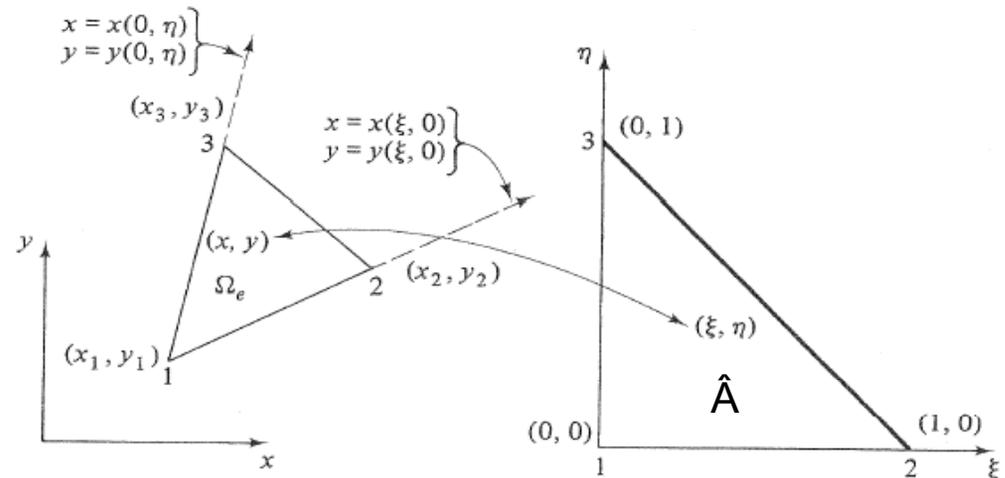


. Se consideran primero elementos triangulares de lados rectos. Consideremos la transformación entre un elemento maestro triángulo rectángulo isósceles $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Las funciones base de Lagrange se comprueba fácilmente que son:

$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$$



. La transformación de coordenadas se define como:

$$x = \sum_{j=1}^3 x_j \cdot \hat{N}_j(\xi, \eta)$$
$$y = \sum_{j=1}^3 y_j \cdot \hat{N}_j(\xi, \eta)$$

$$x = \sum_{j=1}^3 x_j \cdot \hat{N}_j(\xi, \eta) \quad \hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

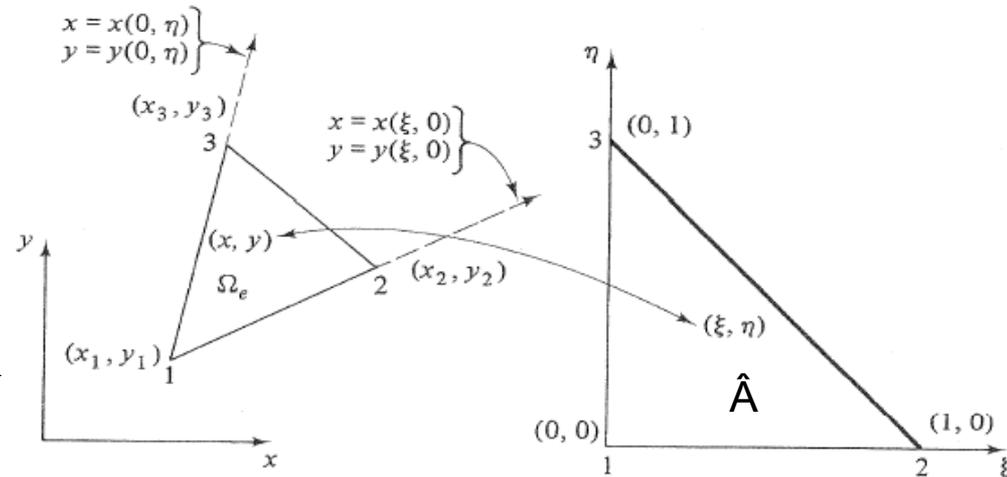
$$y = \sum_{j=1}^3 y_j \cdot \hat{N}_j(\xi, \eta) \quad \hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\quad \quad \quad \hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$$

. Invertiendo la transformación:

$$\xi = \frac{1}{2A_e} \{ (y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1) \}$$

$$\eta = \frac{1}{2 \underbrace{A_e}_{\text{Area de } \Omega_e}} \{ -(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) \}$$



$$\left. \begin{aligned} 1 - \xi - \eta &= \hat{N}_1(\xi, \eta) = N_1^e(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \\ \xi &= \hat{N}_2(\xi, \eta) = N_2^e(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \\ \eta &= \hat{N}_3(\xi, \eta) = N_3^e(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \end{aligned} \right\}$$

. De estas expresiones, se puede calcular fácilmente:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, |J|$$

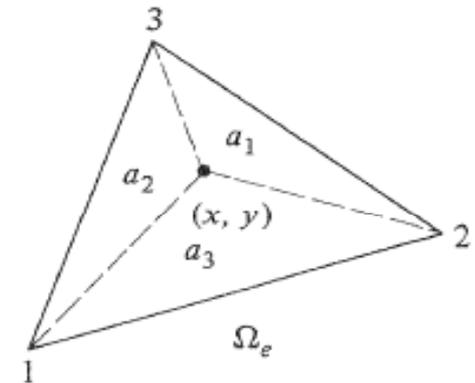
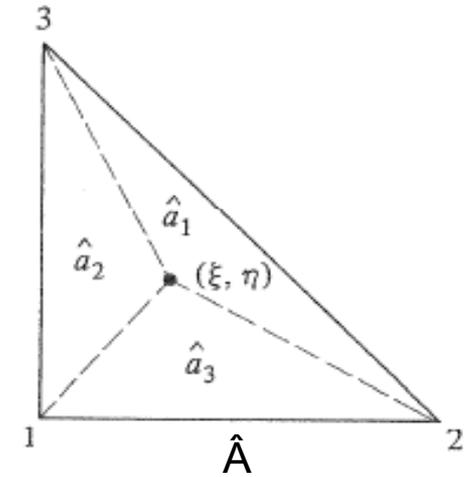
Y de ellas la matriz de 'rigidez' y el vector de 'cargas' del elemento

. Los valores de ξ , η , $1 - \xi - \eta$ se pueden interpretar fácilmente como **cocientes de áreas**. Ello es útil para deducir elementos triangulares de mayor orden.

. Únanse los puntos genéricos interiores a los triángulos, (ξ, η) y (x, y) , con los vértices de los triángulos \hat{A} y Ω_e respectivamente.

Denótese \hat{a}_i , a_i , como las áreas de los subtriángulos opuestos a los nodos i en \hat{A} y Ω_e respectivamente.

. Definimos las coordenadas de área en \hat{A} como:
 $\zeta_i = \hat{a}_i / \hat{A}_m$, $i=1, 2, 3$, donde $\hat{A}_m = 1/2$ es el área del elemento maestro \hat{A} .



$$\zeta_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$\zeta_2 = \xi$$

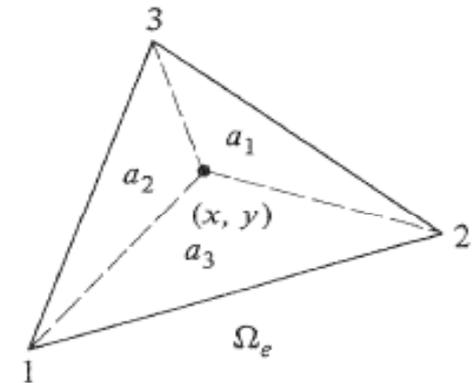
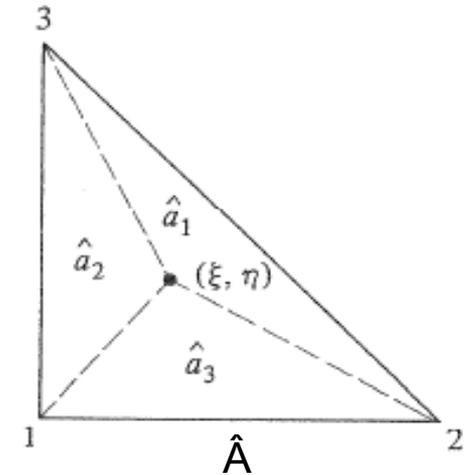
$$\zeta_3 = \eta$$

. Puesto que $|J|$ es constante (representa el cociente de áreas de Ω_e y \hat{A}), la transformación T_e transforma las áreas uniformemente.

Así: $\zeta_i = \hat{a}_i / \hat{A}_m = a_i / A_e$, $i=1, 2, 3$, donde A_e es el área del triángulo en el espacio original

. Esto es cierto sólo para triángulos de lados rectos.

. Las coordenadas de área también se denominan coordenadas baricéntricas.

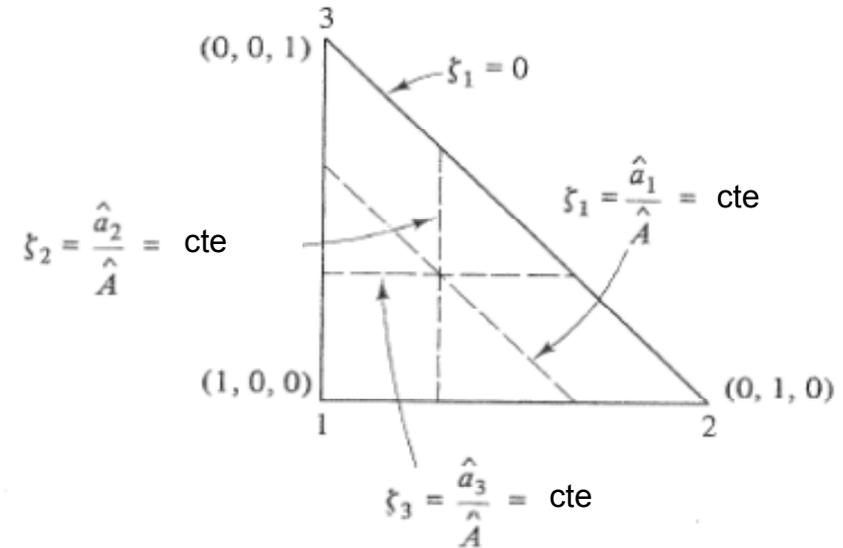


$$\zeta_1 = 1 - \xi - \eta$$

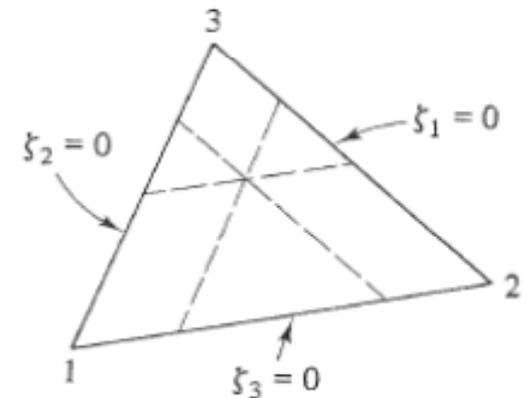
$$\zeta_2 = \xi$$

$$\zeta_3 = \eta$$

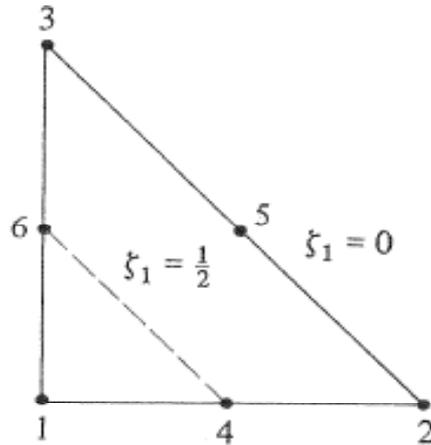
- . En las figuras se muestran varias propiedades interesantes de las coordenadas de área .
- . En un punto interior arbitrario, la recta $\zeta_i = \text{cte}$ es paralela al lado opuesto al nodo i en el elemento.
- . Los lados del borde del elemento tiene como ecuación: $\zeta_i = 0$, $i=1, 2, 3$.
- . Las coordenadas de área o baricéntricas de los vértices del triángulo son: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.



$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1 - \xi - \eta \\ \zeta_2 &= \xi \\ \zeta_3 &= \eta \end{aligned}$$



. Las coordenadas de área ζ_i sobre \hat{A} se pueden utilizar para definir funciones de forma de mayor grado . (Fish, J., Belytschko T. , 'A First Course in Finite Elements'. Wiley. 2007))

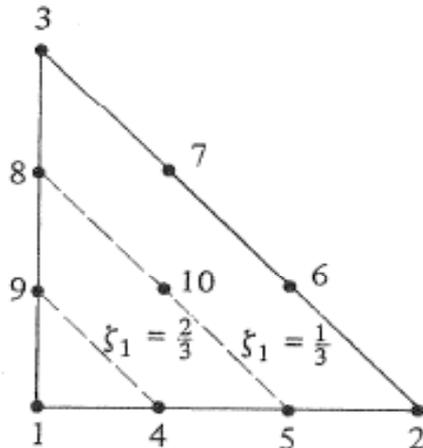


$$\hat{N}_1 = 2\zeta_1(\zeta_1 - 1/2) \quad , \quad \hat{N}_4 = 4\zeta_1\zeta_2$$

$$\hat{N}_2 = 2\zeta_2(\zeta_2 - 1/2) \quad , \quad \hat{N}_5 = 4\zeta_2\zeta_3$$

$$\hat{N}_3 = 2\zeta_3(\zeta_3 - 1/2) \quad , \quad \hat{N}_6 = 4\zeta_3\zeta_1$$

Funciones de forma cuadráticas



$$\hat{N}_1 = (9/2)\zeta_1(\zeta_1 - 2/3)(\zeta_1 - 1/3)$$

$$\hat{N}_2 = (9/2)\zeta_2(\zeta_2 - 2/3)(\zeta_2 - 1/3)$$

$$\hat{N}_3 = (9/2)\zeta_3(\zeta_3 - 2/3)(\zeta_3 - 1/3)$$

$$\hat{N}_4 = (27/2)\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 - 1/3)$$

$$\hat{N}_5 = (27/2)\zeta_1\zeta_2(\zeta_2 - 1/3)$$

$$\hat{N}_6 = (27/2)\zeta_2\zeta_3(\zeta_2 - 1/3)$$

$$\hat{N}_7 = (27/2)\zeta_2\zeta_3(\zeta_3 - 1/3)$$

$$\hat{N}_8 = (27/2)\zeta_1\zeta_3(\zeta_3 - 1/3)$$

$$\hat{N}_9 = (27/2)\zeta_1\zeta_3(\zeta_1 - 1/3)$$

$$\hat{N}_{10} = 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3$$

Funciones de forma cúbicas



. La transformación de coordenadas se hace ahora mediante las expresiones:

$$x(\xi, \eta) \equiv x(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{j=1}^N x_j \cdot \hat{N}_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$
$$y(\xi, \eta) \equiv y(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{j=1}^N y_j \cdot \hat{N}_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

. Los cálculos difieren de los usados en cuadriláteros por la presencia de la coordenada redundante $\zeta_1 = 1 - \zeta_2 - \zeta_3$.

. Para el cálculo de las derivadas se procede así:

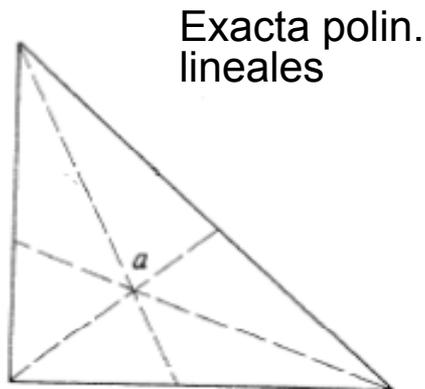
$$\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} = \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \zeta_3} \cdot \frac{\partial \zeta_3}{\partial x}$$

. De modo alternativo, se puede utilizar $\zeta_1 = 1 - \zeta_2 - \zeta_3$, $\zeta_2 \equiv \xi$, $\zeta_3 \equiv \eta$, y operar como se hace con los cuadriláteros.

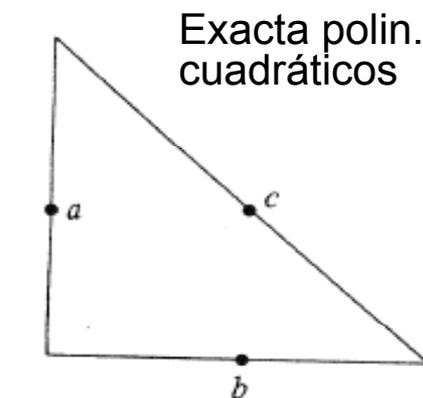
. Se pueden utilizar reglas de cuadratura especiales para aplicarse empleando coordenadas de área.

$$\int_{\hat{A}} G(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \cdot d\zeta_2 \cdot d\zeta_3 = (\text{recordar que } \zeta_1 = 1 - \zeta_2 - \zeta_3) = \sum_{l=1}^{N_g} G(\zeta_{1l}, \zeta_{2l}, \zeta_{3l}) \cdot w_l$$

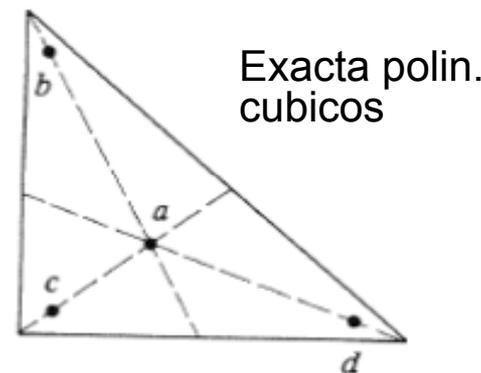
Donde $\zeta_{1l}, \zeta_{2l}, \zeta_{3l}$ son los puntos base para la integración en \hat{A} , N_g su número y w_l los pesos.



Puntos	ζ_i	w_i
a	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$



Puntos	ζ_i	w_i
a	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{6}$
b	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{6}$
c	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{6}$



Puntos	ζ_i	w_i
a	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$-\frac{27}{96}$
b	$(\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15})$	} $\frac{25}{96}$
c	$(\frac{11}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$	
d	$(\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15})$	