Introducción al método de los Elementos Finitos en 2D

Lección 13
Proceso operativo en Elementos Finitos de Problemas de Contorno 2D

V12. 201702

Adaptado por Jaime Puig-Pey (UC) de:
. Zabaras, N. Curso ‘FE Analysis for Mech&Aerospace Design’. U. Cornell. 2012.
. Fish, J., Belytschko, T. “A First Course in Finite Elements”. Ed. Wiley, 2007.

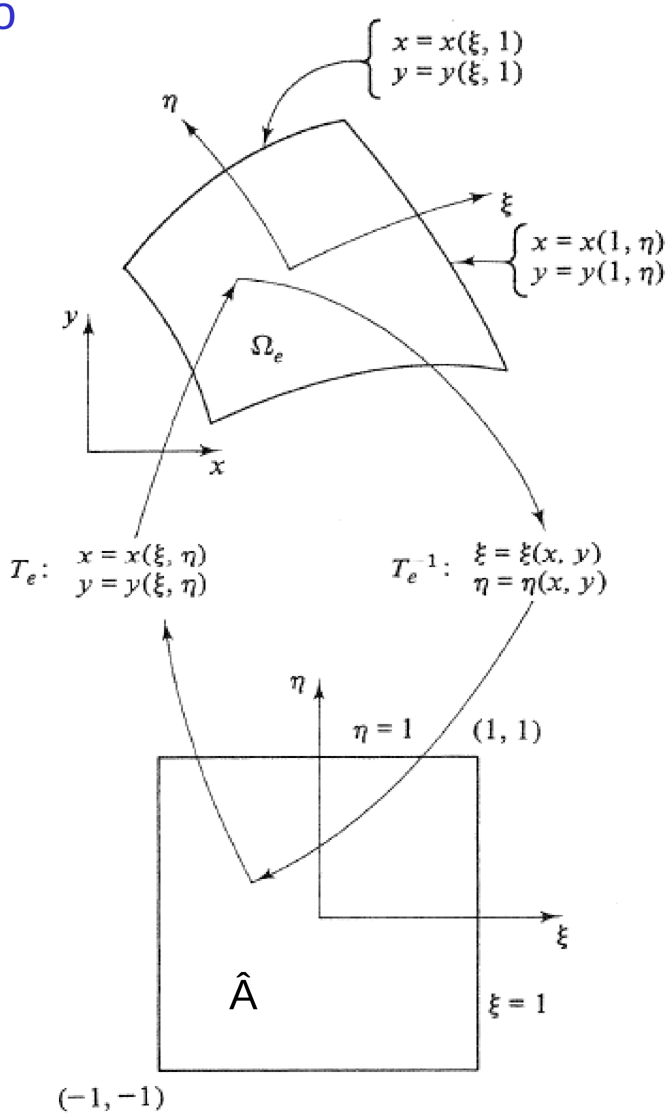
Cálculos con el elemento finito 2D

. Se definirá un elemento maestro o normalizado en coordenadas “naturales” (ξ,η).

. Cuando un elemento tiene lados curvos (figura), los cálculos resultan más complicados en las coordenadas (x,y) de partida.

- Por ejemplo, los límites de integración varían de un elemento a otro.

¿Se podría encontrar un elemento normalizado Â que se puede hacer corresponder adecuadamente con cada elemento Ω_e? Entonces, aplicando la transformación de coordenadas de Ω_e->Â se podrán realizar todas las integraciones sobre el elemento maestro Â.



Elemento finito 2D cuadrilátero

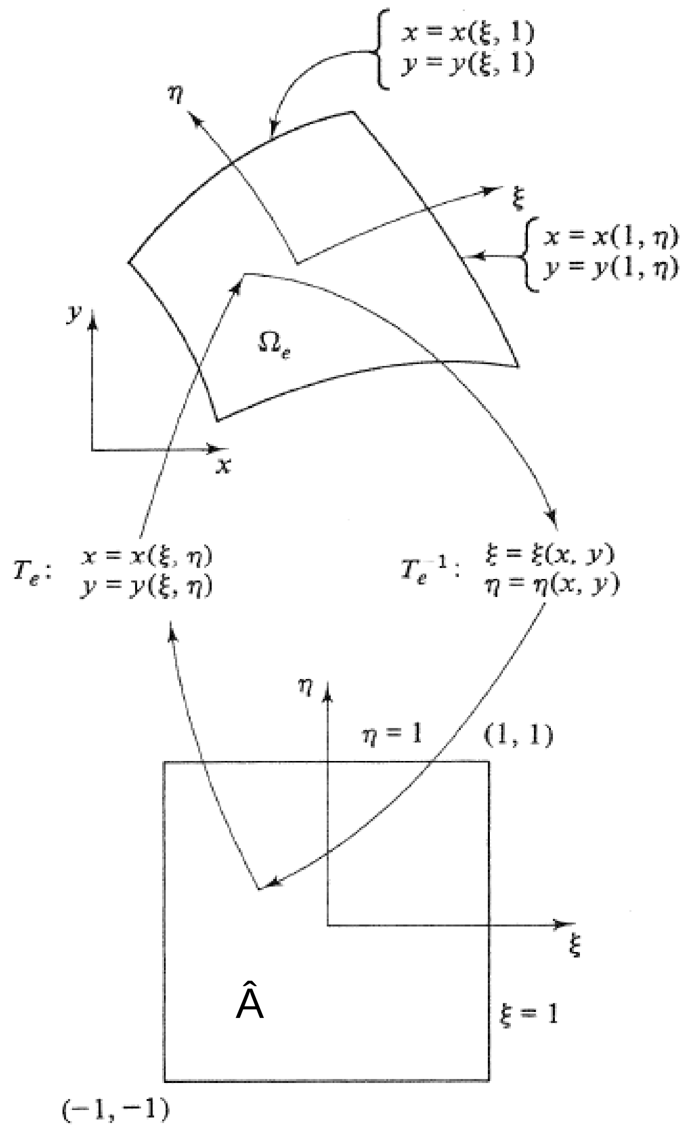
. Se tomará un elemento maestro Â cuadrado en el espacio 2D (ξ,η), -1<= ξ,η<=1.

. Se define la transformación Â-> Ω_e como sigue:

$$T_e: \begin{cases} x=x(\xi,\eta) \\ y=y(\xi,\eta) \end{cases}$$

. Obsérvese que el lado ξ=1 de Â se corresponde con el lado curvo: x=x(1, η), y=y(1, η) del elemento genérico Ω_e, η es un parámetro.

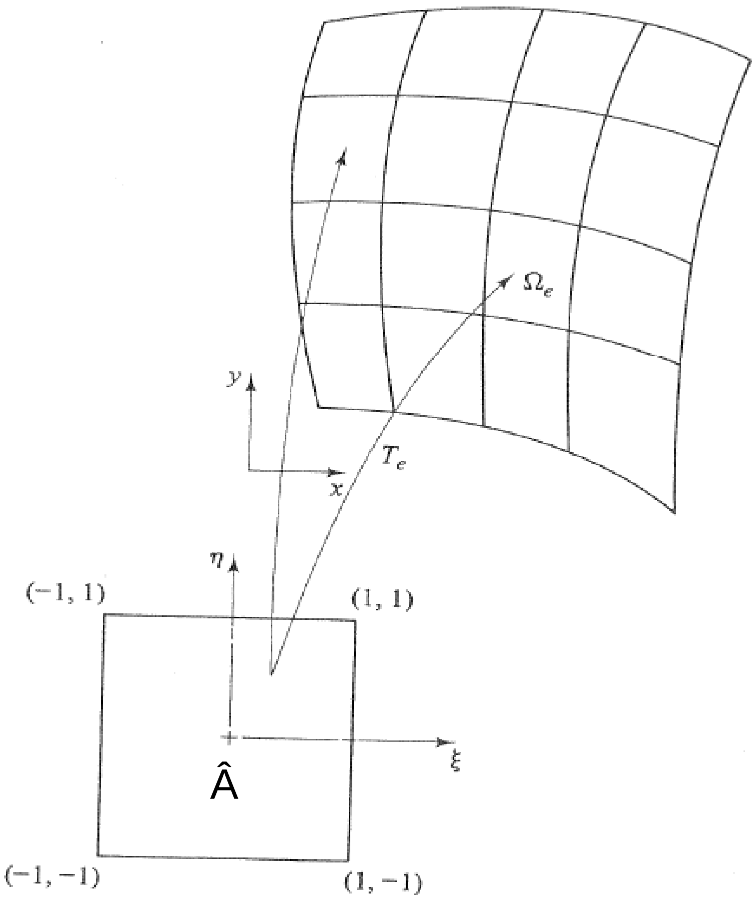
. Consideraciones similares se pueden hacer con los otros 3 lados del contorno de estos elementos de topología cuadrilátera.



. Se puede realizar la secuencia completa de transformaciones $\{T_1, T_2, \ldots, T_E\}$ de cada elemento finito en el espacio original (x, y) sobre el elemento maestro: T_e: Â-> Ω_e , e=1,…,E

. Hay que establecer cómo transferir todos los cálculos necesarios en cada elemento Ω_e al elemento maestro Â.

. El proceso se hará expresando los cálculos en términos de las transformaciones $\{T_1, T_2, \ldots, T_E\}$



Ecuaciones de transformación

. Se supondrá que las transformaciones $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ son diferenciables. Entonces puede escribirse:

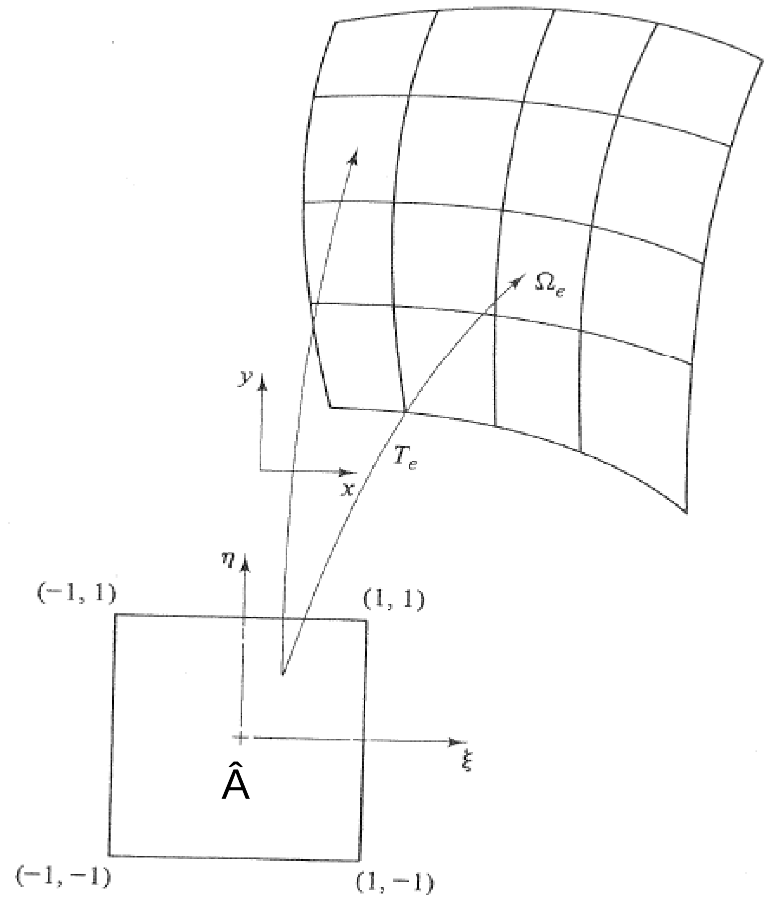
$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

. Esto se puede escribir matricialmente como sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

Matriz Jacobiana [J]

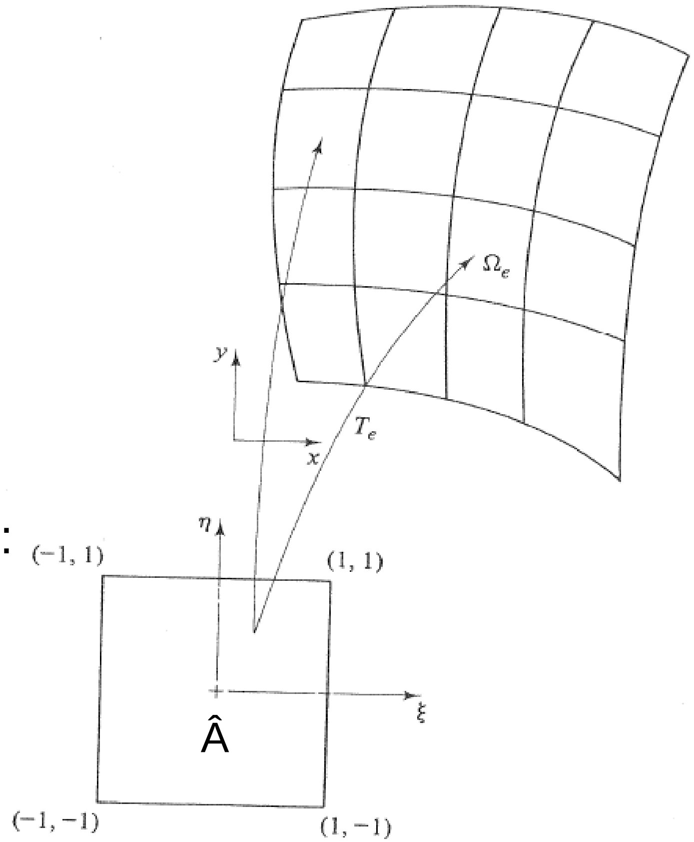


Ecuaciones de transformación

. La matriz Jacobiana J transforma los segmentos diferenciales dξ , dη de Â en los dx, dy de Ω_e

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

Matriz Jacobiana J



. Suponiendo que existe la transformación inversa:

$\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$

T_e^{-1}: Ω_e-> Â , e=1,2,…,E

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

Determinante de la matriz Jacobiana:

$$|J| = \det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$T_e^{-1}: \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

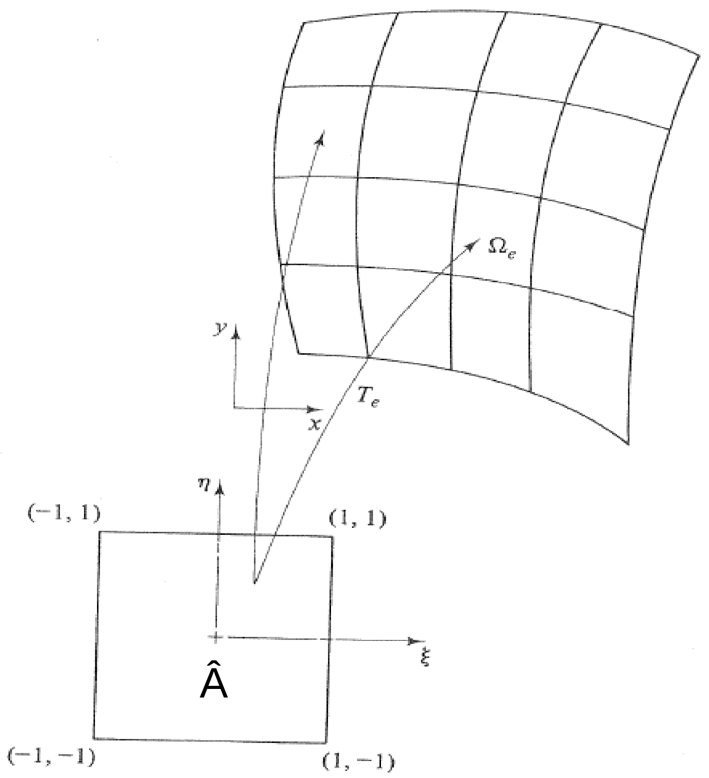
Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-1}{|J|} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}$$



. Se buscan transformaciones diferenciables $\{T_1, T_2, \ldots, T_E\}$ de la forma $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ para cada elemento finito, que no cree huecos o solapes entre elementos y que sean fáciles de construir a partir de la geometría de cada elemento Ω_e .

. Continuando con la aproximación mediante funciones base en un elemento, se tendrá un conjunto de funciones base $\hat{N}_j(\xi,\eta)$ en Â tal que una función

$$\hat{g}\ (\xi,\eta)\ en\ \hat{A}$$

se puede aproximar combinando esas funciones base:

$$\boxed{\hat{g}(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{M} g_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)\ ,\quad g_j=\hat{g}(\xi_j,\eta_j)}$$

. (ξ_j,η_j) son las coordenadas del nodo j en el elemento maestro.

. M=ne es el número de nodos en el elemento maestro.

Construcción de la transformación T_e

. Las transformaciones T_e se pueden construir utilizando las funciones base de elementos finitos como sigue:

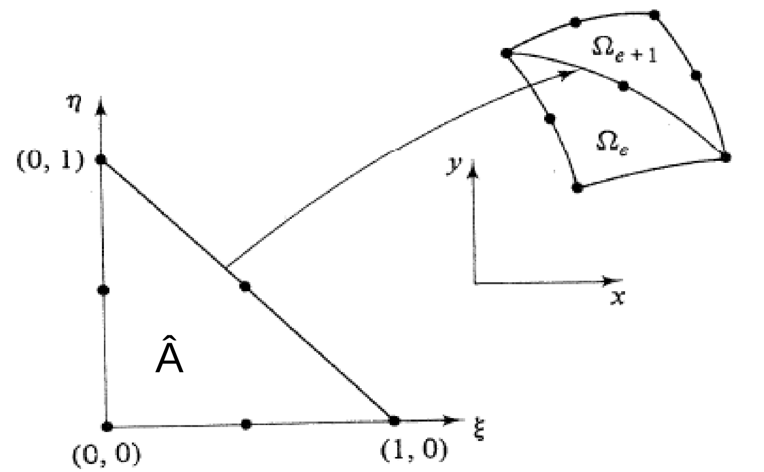
$$x=\sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)\ \ ,\ \ y=\sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

- Donde (x_j,y_j) son las coordenadas del nodo j en el elemento Ω_e .

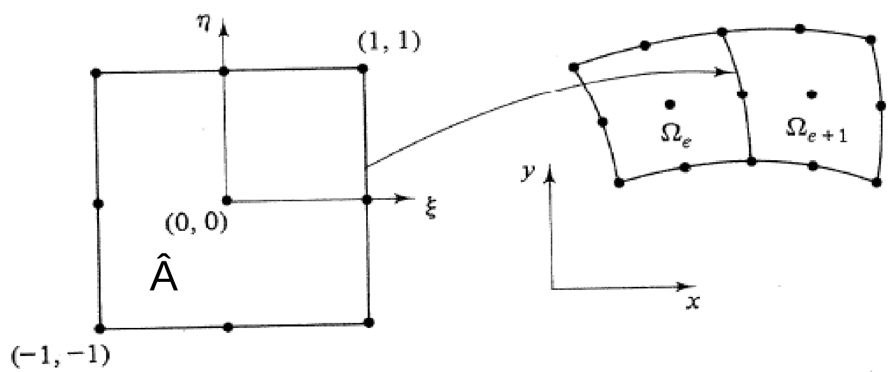
- Obsérvese que, por las propiedades de las funciones base ('efecto 0-1 en los nodos'), al nodo (ξ_k,η_k) en el elemento maestro le corresponde el (x_k,y_k) en el elemento Ω_e.

Obsérvese que un lado común entre los elementos e y (e+1) queda definido unívocamente conociendo las coordenadas de los nodos que comparten los 2 elementos e y (e+1)

Funciones de forma cuadráticas

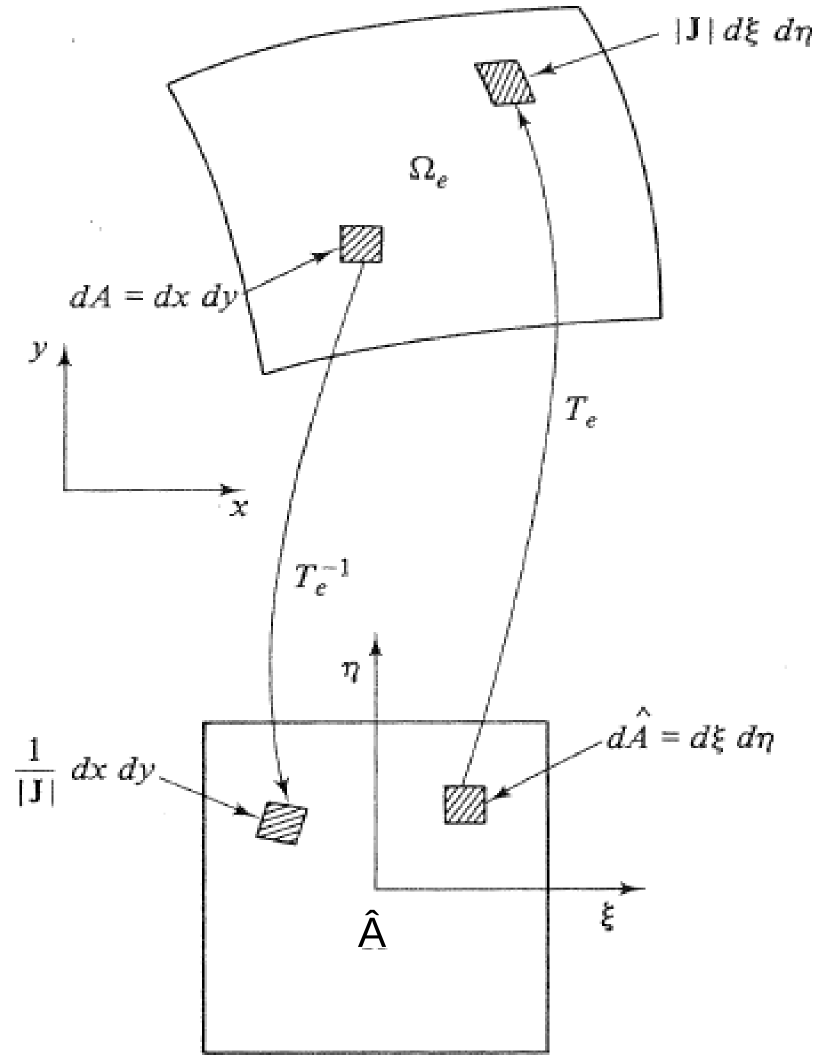


Funciones de forma bicuadráticas



. El determinante de la matriz Jacobiana de la transformación, |J|, Jacobiano, es el cociente entre las áreas de elementos en la transformación $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$:

$$dA=|J|\cdot d\hat{A}$$



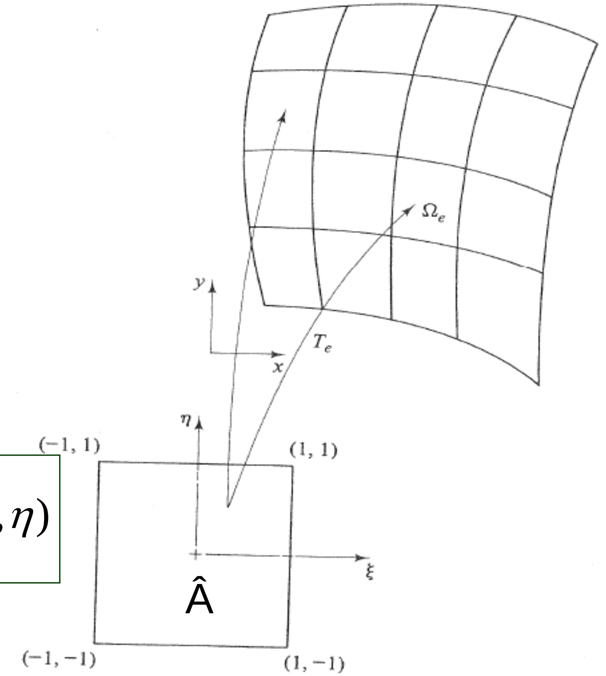
- Hay que seleccionar las funciones base y los nodos (x_i, y_i) de modo que |J|>0 (el área no se transforme en un segmento, en un punto o en un polígono no convexo).

. Esto garantiza que la transformación T_e es invertible.

. Vamos a obtener el valor del Jacobiano en términos de las coordenadas de nodos en la malla original y las funciones base en el elemento maestro:

$$|J| = \det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} \;,\; \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} \;,\; \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-1}{|J|}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} \;,\; \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}$$



. Para la transformación: $$x = \sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) \;,\; y = \sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

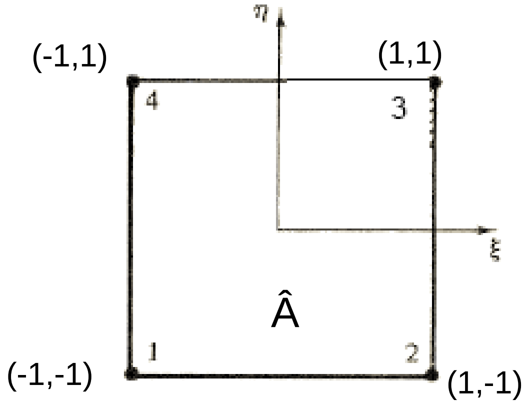
Se deduce:

$$|J| = \det(J) = \left(\sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right) - \left(\sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|}\cdot\sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \eta} \;,\; \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|}\cdot\sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-1}{|J|}\cdot\sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \xi} \;,\; \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|}\cdot\sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \xi}$$

. Considérese el siguiente elemento maestro:



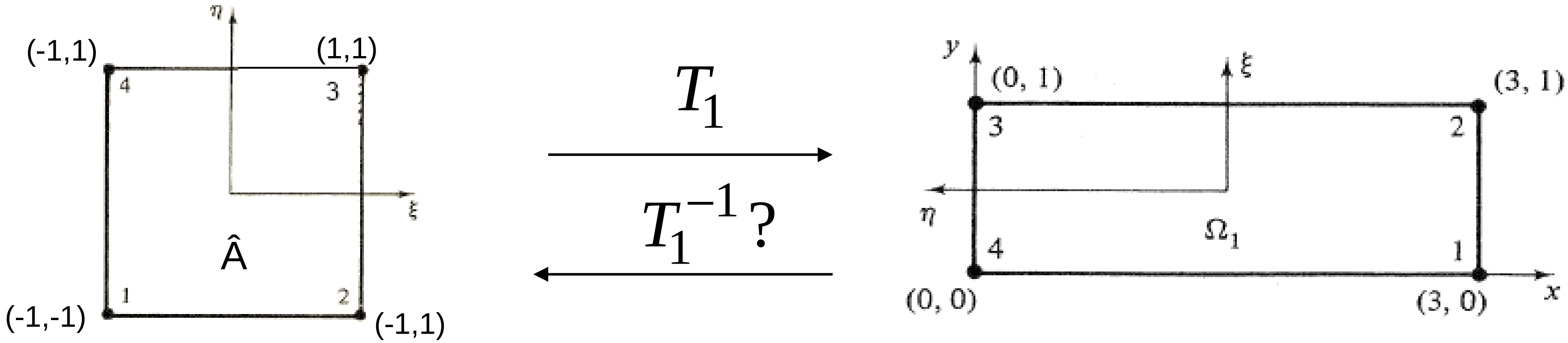
. Las funciones base para este elemento son:

$$\hat{N}_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1-\eta)$$

$$\hat{N}_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1-\eta) \quad , \quad \text{observar el efecto } (0 \leftrightarrow 1),\ \hat{N}_2(1,-1) = 1\ ;\ \hat{N}_2(resto\ \ de\ \ nodos) = 0$$

$$\hat{N}_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1+\eta)$$

$$\hat{N}_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1+\eta)$$



$$x = \sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = 3\cdot\hat{N}_1(\xi,\eta) + 3\cdot\hat{N}_2(\xi,\eta) = \frac{3}{2}\cdot(1-\eta)$$

$$y = \sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = \hat{N}_2(\xi,\eta) + 1\cdot\hat{N}_3(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\cdot(1+\xi)$$

. Calculando el Jacobiano de la transformación:

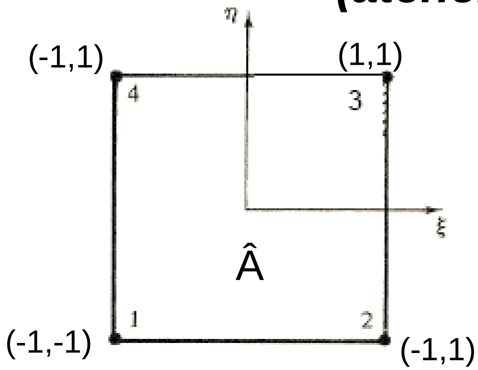
$$|J| = \det\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$$

. Luego la transformación es invertible:

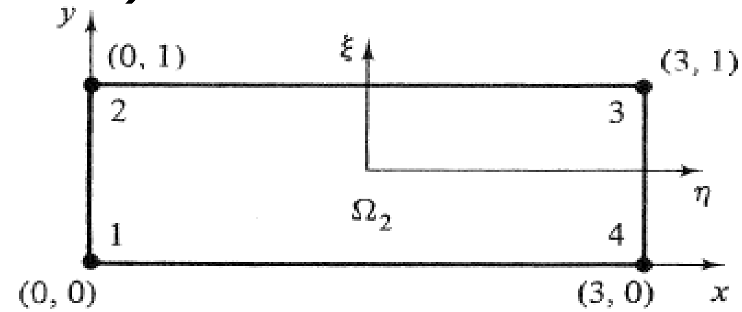
. Observar que |J| es el cociente de áreas de elementos correspondientes en (x,y) y en (ξ,η)

. Analizar si la siguiente transformación es invertible

(atención al orden de los nodos!!):



$$\xrightarrow{\quad T_2 \quad} \qquad \xleftarrow{\quad T_2^{-1}? \quad}$$



$$x = \sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = 3 \cdot \hat{N}_3(\xi,\eta) + 3 \cdot \hat{N}_4(\xi,\eta) = \frac{3}{2} \cdot (1+\eta)$$

$$y = \sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = \hat{N}_2(\xi,\eta) + \hat{N}_3(\xi,\eta) = \frac{1}{2} \cdot (1+\xi)$$

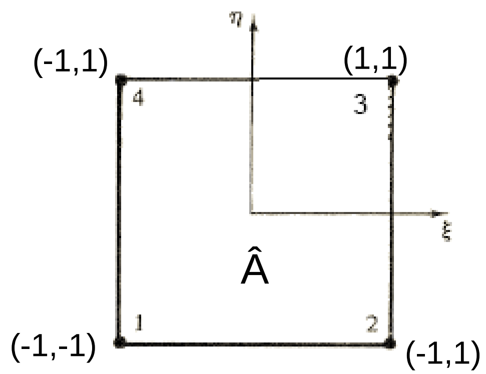
. Calculando el Jacobiano de la transformación:

$$|J| = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow$$

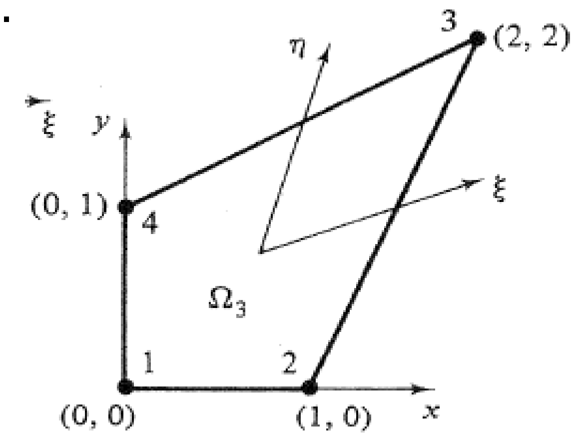
. Luego la transformación NO es invertible:

. ¡ No se deben numerar los nodos en sentido horario !

. Analizar si la siguiente transformación es invertible.



$$\xrightarrow{\quad T_3 \quad} \qquad \xleftarrow{\quad T_3^{-1}\,? \quad}$$



$$x = \sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = \hat{N}_2(\xi,\eta) + 2\cdot\hat{N}_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\cdot(3 + 3\xi + \eta + \xi\eta)$$

$$y = \sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = 2\cdot\hat{N}_2(\xi,\eta) + \hat{N}_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\cdot(3 + \xi + 3\eta + \xi\eta)$$

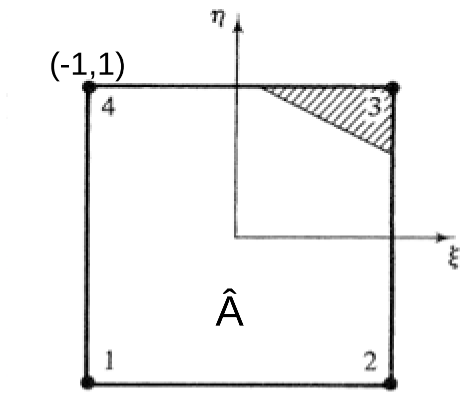
$$|J| = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3+\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi) \\ \frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{1}{4}(3+\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta \Rightarrow$$

. |J| >0 dentro del elemento maestro .

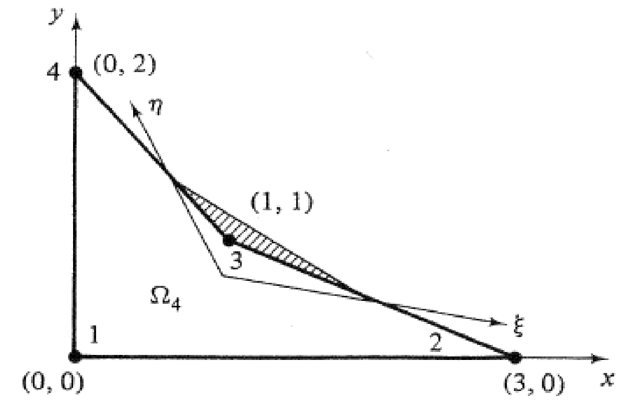
. Luego la transformación SÍ es invertible:

. |J| es más pequeño cerca del nodo 1 y mayor cerca del nodo 3

. Analizar si la siguiente transformación es invertible



$$\xrightarrow{\;T_4\;}$$
$$\xleftarrow{\;T_4^{-1}\,?\;}$$



$$x = \sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = 3 \cdot \hat{N}_2(\xi,\eta) + \hat{N}_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4} \cdot (4 + 4\xi - 2\eta - 2\xi\eta)$$

$$y = \sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) = \hat{N}_3(\xi,\eta) + 2 \cdot \hat{N}_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4} \cdot (3 - \xi + 3\eta - \xi\eta)$$

$$|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(4-2\eta) & -\frac{1}{4}(2+2\xi) \\ -\frac{1}{4}(1+\eta) & \frac{1}{4}(3-\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{8}(5-3\xi-4\eta) \Rightarrow$$

. |J| no es >0 en todo punto dentro del elemento, por lo que la transformación NO es invertible. La región junto al nodo 3, sobre la recta $\xi = 5/3 - (4/3) \cdot \eta$ se transforma al exterior del elemento original.

. Todos los ángulos de elementos cuadriláteros deben ser < π

. Para resolver el problema de contorno en cuestión . Hay que calcular las matrices y vectores siguientes (1<=e<=E , 1<=i, j<=M=N_e):

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left(k \cdot \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) + b \cdot N_i^e \cdot N_j^e \right) dx\, dy$$

$$f_i^e = \int_{\Omega_e} f \cdot N_i^e \, dx\, dy$$

$$P_{ij}^e = \int_{\partial\Omega_{2h}^e} p \cdot N_i^e \cdot N_j^e \, ds$$

$$\gamma_i^e = \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \gamma \cdot N_i^e \, ds$$

. Esto es con condic. naturales de la forma: σ_n(s)=p(s)·(u(s)-û(s))=p(s)·u(s)-γ(s)

γ(s)=p(s)·û(s), û(s) función conocida en el borde $\partial\Omega_{2h}$ con condic. naturales.

. Se supone que k y f son funciones de (x,y), mientras p y γ son funciones de s, abscisa curvilínea del contorno $\partial\Omega_{2h}$ (x(s), y(s)), en el que se imponen las condiciones de 'flujo' o naturales, relativas a las derivadas de la función escalar, incógnita (u, T si temperatura, … según notación)

.Queda por discutir cómo se calculan estas expresiones empleando el elemento maestro y la transformación T_e .

. Se construyen las transformaciones T_e: Â->Ω_e . e=1. 2. …, E siendo Â el elemento maestro y Ω_e cada elemento de la malla 'original', como sigue, siendo M=ne el número de nodos en cada elemento finito:

$$x = \sum_{j=1}^{M=ne} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

$$y = \sum_{j=1}^{M=ne} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

. La transformación queda completamente definida conociendo las coordenadas (x_j, y_j) de los nodos del elemento e de la malla. Las funciones base del elemento maestro no cambian.

Cálculos con el elemento maestro: Paso 2

. Sea g(x,y) cualquier función de (x,y) en Ω_e . Se puede convertir g en una función de (ξ,η) definida en el elemento maestro Â como sigue:

$$g(x,y) = g(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \equiv \hat{g}(\xi,\eta)$$

. La transformación $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ está definida en el Paso 1.

. Las funciones de forma del elemento e, $N_j^e(x,y)$, se obtienen de las del elemento maestro $\hat{N}_j(\xi,\eta)$ como sigue:

(estamos construyendo transformaciones biunívocas)

$$N_j^e(x,y) = \hat{N}_j(\xi,\eta) = \hat{N}_j(\xi(x,y), \eta(x,y)) = N_j^e(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$$
$$,\quad j = 1, 2, ,..., ne = M \quad , \quad n^o\, de\, nodos\, por\, elemento$$

. Las derivadas de $N_j^e(x,y)$ respecto a x e y son:

$$\frac{\partial N_j^e(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_j^e(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \ , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \ ,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-1}{|J|} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \ , \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$x = \sum_{j=1}^{M=ne} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) \quad , \quad y = \sum_{j=1}^{M=ne} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \cdot \sum_{k=1}^{M} y_k \cdot \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \eta} \ , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|} \cdot \sum_{k=1}^{M} x_k \cdot \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \eta} \ , \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-1}{|J|} \cdot \sum_{k=1}^{M} y_k \cdot \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \xi} \ , \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \cdot \sum_{k=1}^{M} x_k \cdot \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \xi}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial N_j^e(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \cdot \left\{ \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \xi} \sum_{k=1}^{M} y_k \cdot \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{M} y_k \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right\}$$

$$\frac{\partial N_j^e(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \cdot \left\{ - \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \xi} \sum_{k=1}^{M} x_k \cdot \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{N}_j(\xi,\eta)}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{M} x_k \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right\}$$

. Se ha presentado anteriormente que los órdenes de convergencia son válidos sólo si

$$\boxed{w_h^e(x,y) = \sum_{j=1}^{ne} w_j \cdot N_j^e(x,y)}$$

contiene polinomios completos de grado k para funciones interpoladas con suavidad:

. Sin embargo, con la transformación

$$N_j^e(x,y) = \hat{N}_j(\xi,\eta) = \hat{N}_j(\xi(x,y),\eta(x,y)) = N_j^e(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

$$j = 1,2,,\dots,ne = M \ \ , \ n^{o}\, de\, nodos\ por\ elemento$$

puede incluso ocurrir que las funciones de forma $N_j^e(x,y)$ no sean ni polinomios.

. Se puede demostrar que si las funciones base $\hat{N}_j(\xi,\eta)$ del elemento maestro contienen polinomios completos de grado k y |J|>0, las estimaciones de error siguen siendo válidas.

. En las integrales de dominio del problema hay que efectuar el cambio al elemento maestro Â:

$$\int_{\Omega_e} g(x,y)\,dx\,dy = \int_{\hat{A}} g(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\cdot|J|\,d\xi\,d\eta = \int_{\hat{A}} \hat{g}(\xi,\eta)\cdot|J|\,d\xi\,d\eta = \int_{\hat{A}} \hat{G}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

. Estas integrales se efectúan habitualmente empleando reglas de integración numérica aproximada de tipo Gauss:

$$\int_{\hat{A}} \hat{G}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \approx \sum_{i=1}^{N_p} \hat{G}(\xi_i,\eta_i)\cdot w_i$$

siendo (ξ_i,η_i) los puntos de Gauss, w_i los coeficientes (pesos) asociados y N_p el número de puntos de Gauss de la fórmula en uso.

. Por ejemplo, para el dominio Â que consiste en el cuadrado [-1,1]x[-1,1]

$$\boxed{\int_{\hat{A}} \hat{\mathrm{G}}(\xi,\eta)\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv} \approx \mathrm{w}_1\cdot\hat{\mathrm{G}}(\xi_1,\eta_1) + \mathrm{w}_2\cdot\hat{\mathrm{G}}(\xi_2,\eta_2) + \mathrm{w}_3\cdot\hat{\mathrm{G}}(\xi_3,\eta_3) + \mathrm{w}_4\cdot\hat{\mathrm{G}}(\xi_4,\eta_4)}$$

donde $w_1=w_2=w_3=w_4=1$, $(\xi_1,\eta_1)=(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$, $(\xi_2,\eta_2)=(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$,
$(\xi_3,\eta_3)=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $(\xi_4,\eta_4)=(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$

Esta regla gaussiana integra exactamente en el dominio Â polinomios de grado 3 o menor en cada variable.

. En el proceso numérico, hay que calcular integrales en el dominio 2D:

$$k_{ij}^{e} = \int_{\Omega_e} [k \cdot (\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j^e}{\partial y}) + b \cdot N_i^e \cdot N_j^e)] \, dx \, dy \qquad f_i^{e} = \int_{\Omega_e} f \; N_i^e \, dx \, dy$$

. Lo habitual es aproximar las funciones k(x,y), b(x,y), f(x,y) mediante interpolación utilizando las funciones de forma:

$$k_h(x,y) = \sum_{j=1}^{ne} k(x_j, y_j) \cdot N_j^e(x,y) = \sum_{j=1}^{ne} k_j \cdot N_j^e(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = \sum_{j=1}^{ne} k_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

. Esto requiere dar los valores de k(x,y) en los nodos de la malla.

. Para b(x,y) y f(x,y) se realizan cálculos similares.

. En el proceso hay que calcular integrales sobre el contorno:

$$P_{ij}^{e}=\int_{\partial\Omega_{2h}^{e}} p\, N_i^{e}\cdot N_j^{e}\, ds \qquad\qquad \gamma_i^{e}=\int_{\partial\Omega_{2h}^{e}} \gamma\cdot N_j^{e}\, ds$$

. Introduzcamos la restricción de las funciones base $\hat{N}_j(\xi,\eta)$ <u>sobre el lado ξ=1 del elemento, por ejemplo</u>. Denotémoslas como: $\hat{\theta}_j(\eta)\equiv \hat{N}_j(1,\eta)\ ,\ \ j=1,\ 2,\ldots,ne$

Estas funciones son no nulas solamente para nodos sobre el borde ξ=1.

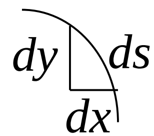
Las 2 integrales anteriores se pueden calcular:

$$P_{ij}^{e}=\int_{\partial\Omega_{2h}^{e}} p\, N_i^{e}\cdot N_j^{e}\, ds = \int_{-1}^{1}\hat{p}(\eta)\cdot\hat{\theta}_i(\eta)\cdot\hat{\theta}_j(\eta)\cdot|\, j(\eta)\,|\, d\eta$$

$|j(\eta)|$ es el " jacobiano" de la transformación de η en s:

$$ds=|j(\eta)|\cdot d\eta \quad , \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$\gamma_i^{e}=\int_{\partial\Omega_{2h}^{e}} \gamma\, N_i^{e}\, ds = \int_{-1}^{1}\hat{\gamma}(\eta)\cdot\hat{\theta}_i(\eta)\cdot|j(\eta)|\, d\eta$$



$$|j(\eta)|=\sqrt{\left(\frac{\partial x(1,\eta)}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y(1,\eta)}{\partial\eta}\right)^2}$$

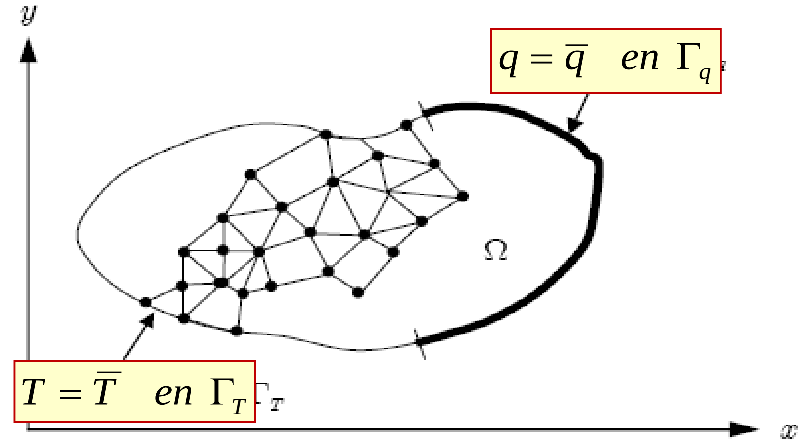
(a): Usar interpolantes FE, funciones de forma, para $\hat{p}(\eta)$ *y* $\hat{\gamma}(\eta)$

(b): Usar integracion de Gauss 1D

. Considérese el problema general, estudiado anteriormente, de la conducción del calor en 2D.

. Se trata de calcular T(x,y), temperatura, tal que:

$$
\begin{aligned}
&-\nabla\cdot(D\cdot\nabla T) = f(x,y)\\
&T=\overline{T} \quad sobre\ \Gamma_T\\
&(cc\ \ Esenciales, valor\ \ T)\\
&q = -D\cdot\vec{\nabla}T\cdot\mathbf{n} = \overline{q} \quad sobre\ \Gamma_q\\
&(cc\ \ naturales,\ valor\ \ flujo\ de\ T)
\end{aligned}
$$



Recuérdese que expresión final de la forma débil es:

$$
\mathrm{W}^{\mathrm{T}}\cdot\sum_{e=1}^{E} L^{eT}\cdot\underbrace{\int_{\Omega^e} B^{e\mathrm{T}}\cdot \mathrm{D}^e\cdot B^e\cdot d\Omega}_{K^e}\cdot L^e\cdot\{d\} = \mathrm{W}^{\mathrm{T}}\cdot\sum_{e=1}^{E} L^{eT}\,\underbrace{\left(\int_{\Omega^e} N^{eT}\cdot f\cdot d\Omega - \int_{\Gamma^e} N^{eT}\cdot\overline{q}\cdot d\Gamma\right)}_{F^e}\cdot \quad \forall\ \text{vector W}\ nulo\ en\ \Gamma_T
$$

$$
B^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{N}_1^e}{\partial \mathrm{x}} \cdots \dfrac{\partial \mathrm{N}_{ne}^e}{\partial \mathrm{x}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{N}_1^e}{\partial \mathrm{y}} \cdots \dfrac{\partial \mathrm{N}_{ne}^e}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix}
$$

$$
N^e = [N_1^e, \ldots, N_{ne}^e]
$$

d_E: T conocida en los nodos borde con condiciones esenciales

d_r: el resto de los coeficientes, son las incógnitas, T en nodos no esenciales

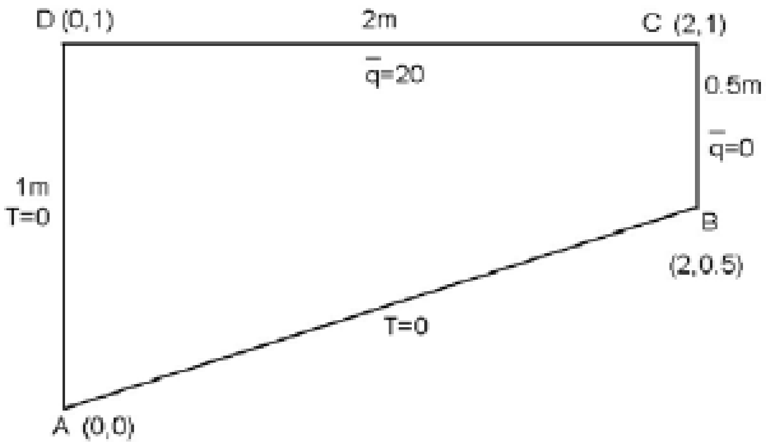
$[W_E, W_r]^T\cdot[K\cdot d - F] = 0$

(1xn) · (nx1) = (1x1)

$$
\begin{bmatrix} K_E & K_{Er} \\ K_{rE} & K_r \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} d_E \\ d_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_E + R_E \\ F_r \end{Bmatrix}\ ,\ \ d_r,\ R_E\ \ (desconocidos)
$$

$$
\boxed{K_r\cdot d_r = F_r - K_{rE}\cdot d_E}
$$

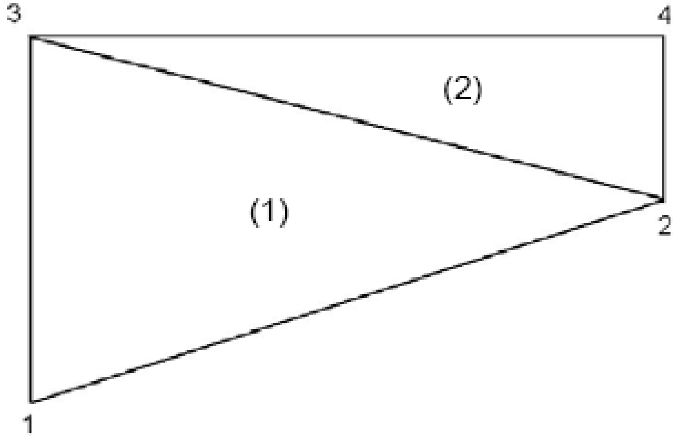
. Considérese el problema de conducción del calor de la figura:



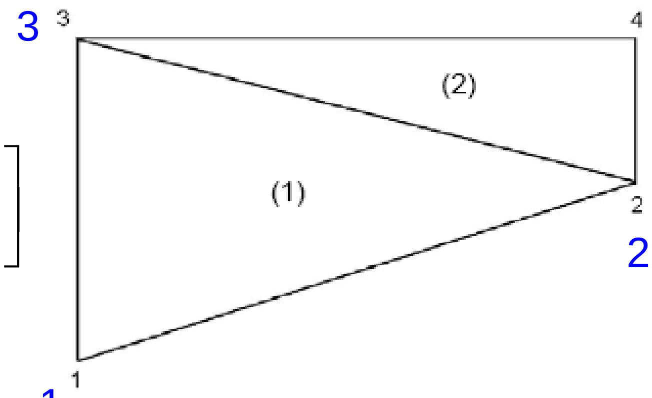
. Se supone una conductividad térmica isotrópica con k=5 WºC^{-1} y Un término fuente f=6 Wm^{-2}.

. Las condiciones de borde se indican en la figura.

. Se desea calcular el campo de temperatura empleando 2 elementos triangulares lineales:



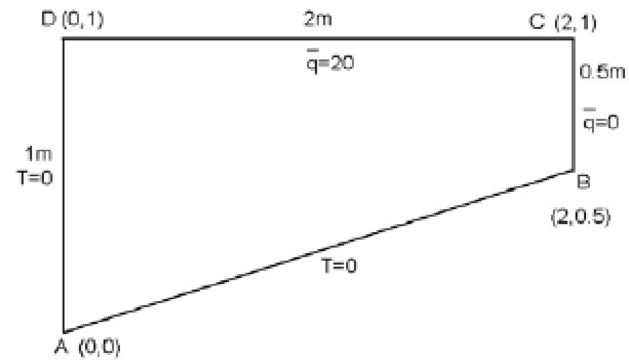
. Empleando expresiones anteriormente deducidas para elementos triangulares, se tiene:



$$\underbrace{\left[B^e\right]}_{\text{Matriz constante}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_2^e - y_3^e & y_3^e - y_1^1 & y_1^e - y_2^e \\ x_3^e - x_2^e & x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix}$$

$$2A^e = \left(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e\right) - \left(x_1^e y_3^e - x_3^e y_1^e\right) + \left(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e\right)$$

$$\left[K^e\right] = \int_{\Omega^e} \left[B^e\right]^T \left[D^e\right]\left[B^e\right] d\Omega = \left[B^e\right]^T k \left[B^e\right] A^e$$



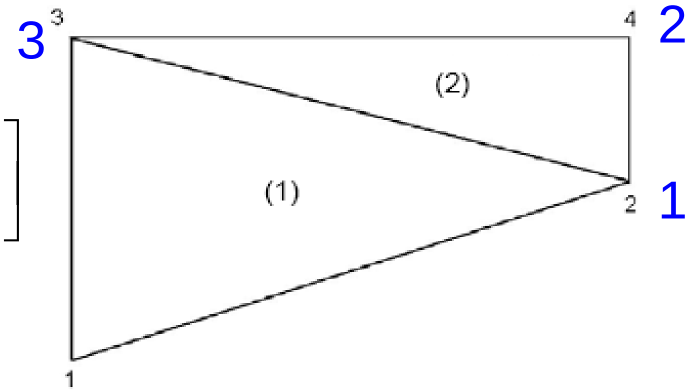
Para e=1: $\left[B^1\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0.5 & 1 & -0.5 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

k=5, A^1=1·2/2=1

$$K^1 = B^{1^T} B^1 k A^1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 \\ -0.625 & 1.25 & -0.625 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.3125 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

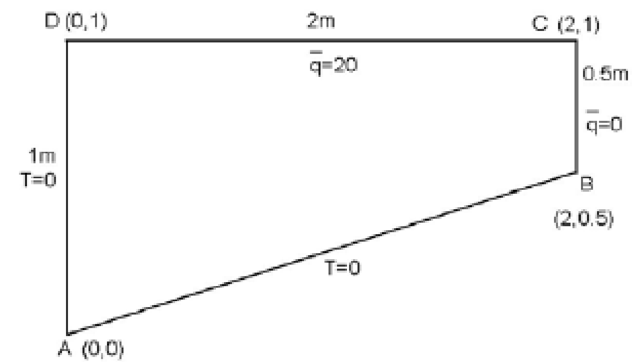
Ejemplo : matriz ‘rigidez’ elemento 2

. Empleando expresiones anteriormente deducidas para elementos triangulares, se tiene:



$$\underbrace{\left[B^e\right]}_{\text{Matriz constante}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_2^e - y_3^e & y_3^e - y_1^1 & y_1^e - y_2^e \\ x_3^e - x_2^e & x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix}$$

$$2A^e = \left(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e\right) - \left(x_1^e y_3^e - x_3^e y_1^e\right) + \left(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e\right)$$



$$\left[K^e\right] = \int_{\Omega^e} \left[B^e\right]^T [D^e] \left[B^e\right] d\Omega = \left[B^e\right]^T k \left[B^e\right] A^e$$

Para e=2:

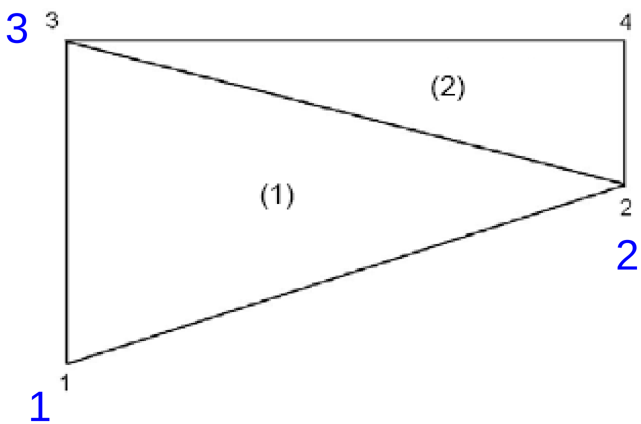
$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

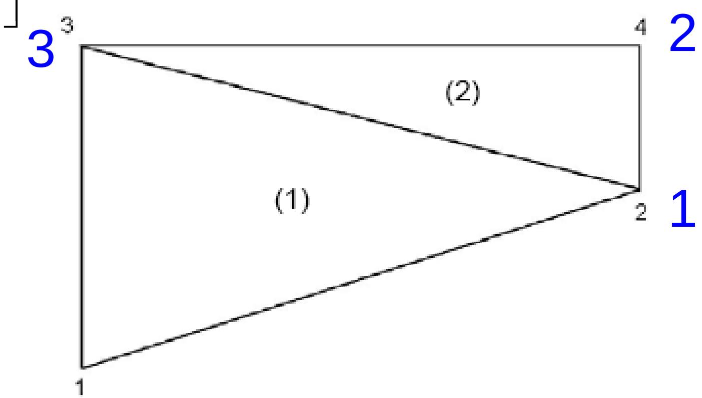
k=5, A^2=0.5·2/2=0.5

$$\left[K^2\right] = \left[B^2\right]^T \left[B^2\right] k A^2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 10.625 & -0.625 \\ 0 & -0.625 & 0.625 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

. Ensamblado de las 2 matrices de ‘rigidez’ (hay 2 elementos):

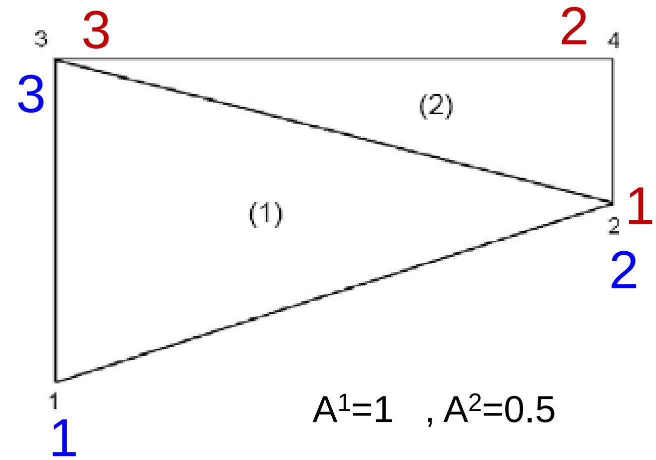
$$K=\underbrace{\begin{bmatrix} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 & 0 \\ -0.625 & 1.25 & -0.625 & 0 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.3125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{L1^T\cdot K^1\cdot L1}+\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0.625 & -0.625 \\ 0 & -10 & -0.625 & 10.625 \end{matrix}}_{L2^T\cdot K^2\cdot L2} \end{bmatrix}$$





$$[K]=\left[L^1\right]^T\left[K^1\right]\left[L^1\right]+\left[L^2\right]^T\left[K^2\right]\left[L^2\right]=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 & 0 \\ -0.625 & 11.25 & -0.625 & -10 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.9375 & -0.625 \\ 0 & -10 & -0.625 & 10.625 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

. Las funciones de forma para los elementos triangulares de 3 nodos son:



$$\left[N^e\right] = \left[N_1^e \quad N_2^e \quad N_3^e\right]$$

$$N_1^e = \frac{1}{2A^e}\left(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + (y_2^e - y_3^e)x + (x_3^e - x_2^e)y\right)$$ $N_1^1=(2-0.5x-2y)/2$

$$N_2^e = \frac{1}{2A^e}\left(x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + (y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y\right)$$ $N_2^1=x/2$

$$N_3^e = \frac{1}{2A^e}\left(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + (y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y\right)$$ $N_3^1=(-0.5x+2y)/2$

$A^1=1$, $A^2=0.5$

$N_1^2=2-2y$, $N_2^2=-2+0.5x+2y$, $N_3^2=1-0.5x$

Contribución de fuente distribuida:

Vol pirám=A·h/3 ,h=1 !!

$$F_\Omega^e = f\cdot\int_{\Omega^e} N^{eT}\cdot d\Omega = \frac{f\cdot A^e}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

Esta expresión resulta para f=6 constante !

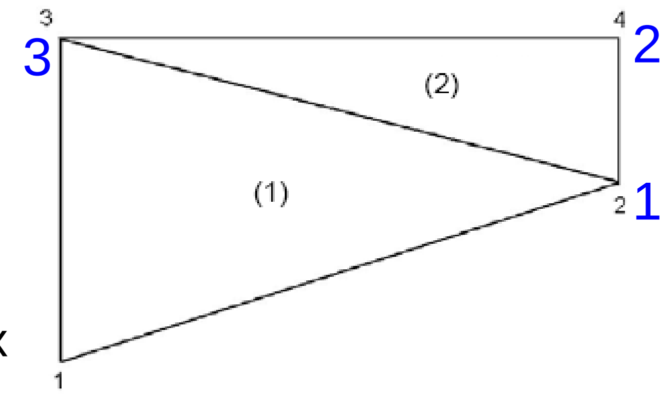
. Para e=1 $F_\Omega^1 = \dfrac{f\cdot A^1}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{6\times 1}{3}\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} = \begin{array}{c}\begin{Bmatrix}2\\2\\2\end{Bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}$

. Para e=2 $F_\Omega^2 = \dfrac{f\cdot A^2}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{6\times 0.5}{3}\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} = \begin{array}{c}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}2\\4\\3\end{array}$

$$F_\Omega = L^{1^T}\cdot F_\Omega{}^1 + L^{2^T}\cdot F_\Omega{}^2 = \begin{Bmatrix}2\\2+1\\2+1\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\\3\\3\\1\end{Bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}$$

Contribución a F ('cargas') de las condiciones de contorno naturales:

. Para elementos con lados sobre Γ_q hay que calcular: $$F_\Gamma^e = -\int_{\Gamma_q^e} N^{e^T} \cdot \bar{q} \cdot d\Gamma$$



. Sólo hay que considerar en el elemento e=2, el lado 2-3, pues en el 1-2 el flujo es 0.

$N_1^2(x,y)=2-2y$, $N_2^2(x,y)=-2+0.5x+2y$, $N_3^2(x,y)=1-0.5x$

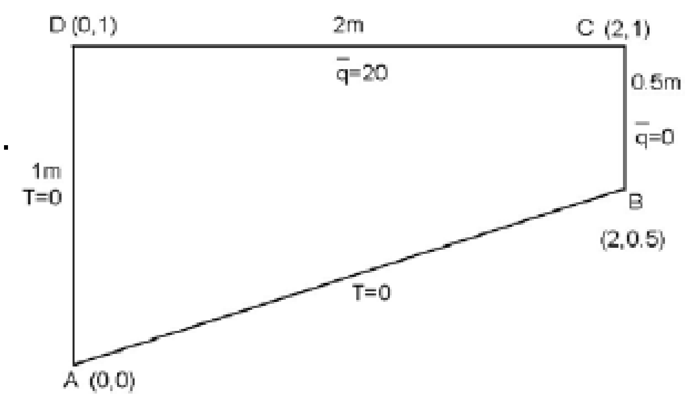
$N_1^2(x,1)=0$, $N_2^2=(x,1)=0.5x$, $N_3^2(x,1)=1-0.5x$

$d\Gamma$ es <u>longitud de arco</u>. En este caso, recorrido 'local 2-3', sentido contrario a Eje +X, $d\Gamma= -dx$, x entre 2 y 0. Queda la integral:

$$F_\Gamma^2 = -\int_{\Gamma_q^2} N^{2^T} \cdot \bar{q} \cdot d\Gamma = -\int_2^0 N^{2^T} \cdot \bar{q} \cdot (-dx) = -\int_0^2 N^{2^T} \cdot \bar{q} \cdot dx$$

También equivale al 'área' bajo la curva del integrando sobre el borde Γ_q^2. No importa el sentido de recorrido del borde.

$$F_\Gamma^2 = -\int_0^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5x \\ -0.5x+1 \end{Bmatrix} \cdot 20 \cdot dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$$



. Ensamblando el vector de 'cargas' resulta:

$$F = F_\Gamma + F_\Omega + R_E = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ -20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 + 2 \\ r_2 + 3 \\ r_3 - 17 \\ 0 - 19 \end{Bmatrix}$$

r_1, r_2, r_3, relacionados con flujos de calor en zonas de nodos con temperatura dada (cond. 'esenciales'), como fuerzas tipo reacción!

. El sistema final de ecuaciones es:

$$\left[\begin{array}{cccc} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 & 0 \\ -0.625 & 11.25 & -0.625 & -10 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.9375 & -0.625 \\ \hline 0 & -10 & -0.625 & 10.625 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline T_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} r_1 + 2 \\ r_2 + 3 \\ r_3 - 17 \\ \hline -19 \end{array}\right]$$

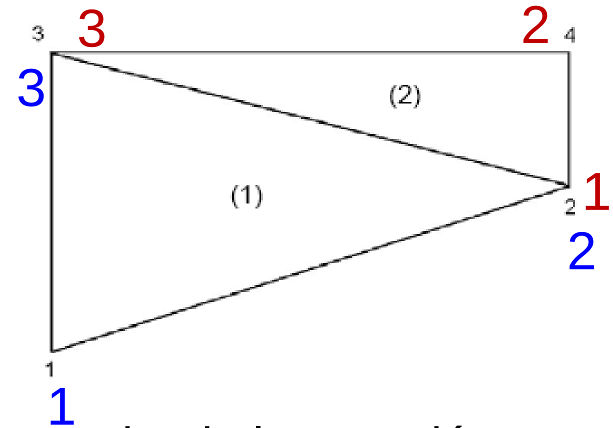
. Particionando este sistema resulta T_4:

$$\boxed{T_4 = -\frac{19}{10.625} = -1.788}$$

. 'Flujos reacción':

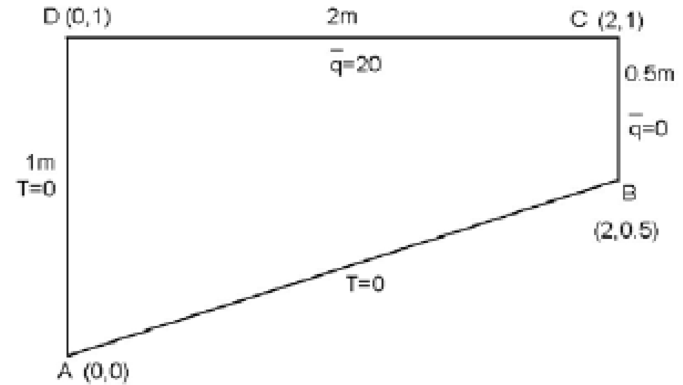
$$\begin{bmatrix} 5.3125 & -0.625 & -4.6875 & 0 \\ -0.625 & 11.25 & -0.625 & -10 \\ -4.6875 & -0.625 & 5.9375 & -0.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.788 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + 2 \\ r_2 + 3 \\ r_3 - 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14.88 \\ 18.1175 \end{bmatrix}$$

. Las temperaturas nodales (respuestas en cada 'grado de libertad') en cada elemento son por tanto:



$$\{d^1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \{d^2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.788 \\ 0 \end{bmatrix}$$

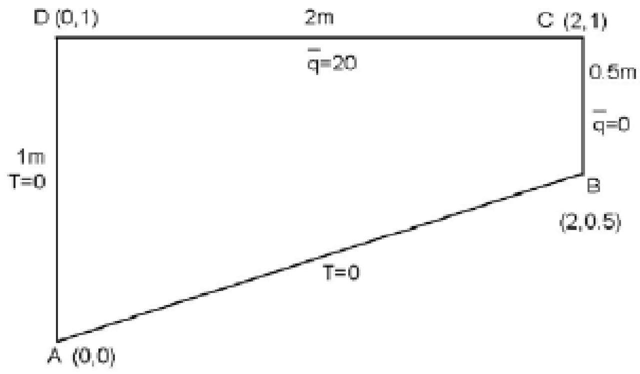
Los vectores flujo se calculan para cada elemento recordando la ecuación constitutiva: $q(x,y) = -k(x,y)\cdot\nabla u(x,y)$

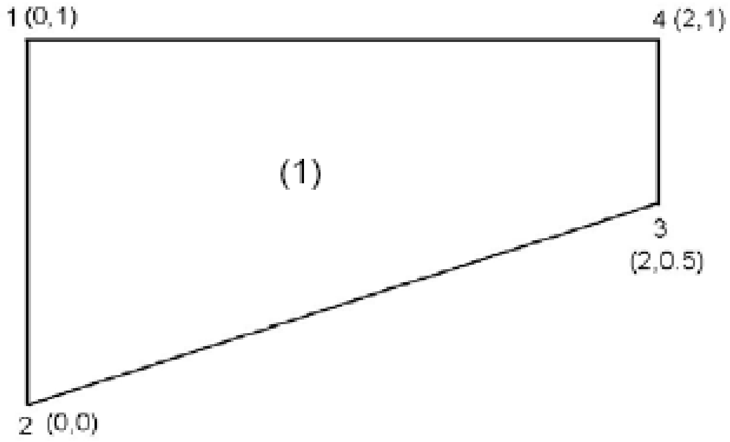


$$\{q^1\} \equiv \begin{bmatrix} q_x^1 \\ q_y^1 \end{bmatrix} = -k\left[B^1\right]\{d^1\} = -5\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0.5 & 1 & -0.5 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{q^2\} \equiv \begin{bmatrix} q_x^2 \\ q_y^2 \end{bmatrix} = -k\left[B^2\right]\{d^2\} = -5\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1.788 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.47 \\ 17.88 \end{bmatrix}$$

. Se repite el ejemplo anterior empleando ahora 1 único elemento cuadrilátero de 4 nodos. Se continúa utilizando ‘notación matricial’





. Las coordenadas de los nodos en el elemento son:

$$\begin{bmatrix} x^e & y^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_j^e(x,y)=\hat{N}_j(\xi,\eta)=\hat{N}_j(\xi(x,y),\eta(x,y))=N_j^e(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\quad j=1,2,,\ldots,N_e=M\ ,\text{nº nodos por elemento}$$

. Las funciones base en coordenadas 'locales' o 'naturales' son:

$$\hat{N}_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1-\eta)\qquad \hat{N}_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1-\eta)$$

$$\hat{N}_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1+\eta)\qquad \hat{N}_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_j^e(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Es necesario calcular la matriz B^e que relaciona las derivadas respecto a x e y con los valores nodales:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T^e}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial T^e}{\partial y}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_4^e}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_4^e}{\partial y}\end{bmatrix}}_{B^e}\cdot\begin{bmatrix}T_1^e\\ T_2^e\\ T_3^e\\ T_4^e\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T^e}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial T^e}{\partial y}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi}\cdot\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\end{Vmatrix}}_{B^e}\cdot\begin{bmatrix}T_1^e\\ T_2^e\\ T_3^e\\ T_4^e\end{bmatrix}$$

$$B^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Esta matriz se puede escribir:

$$B^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y^e}{\partial \eta} & -\frac{\partial y^e}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x^e}{\partial \eta} & \frac{\partial x^e}{\partial \xi} \end{bmatrix}}_{[inversa(J^e)]^T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

. Lo anterior proviene
de la transformación ya vista:

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

$$B^e = \underbrace{\frac{1}{|J^e|}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^e}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y^e}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x^e}{\partial \xi} \end{bmatrix}}_{[inversa(J^e)]^T} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

. La matriz Jacobiana J^e se puede calcular de :

$$x^e = \sum_{j=1}^{4} x_j^e \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

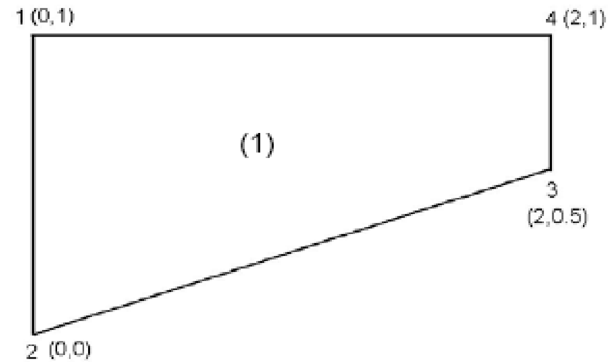
$$y^e = \sum_{j=1}^{4} y_j^e \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

$$\left[J^e\right]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \hat{N}_1^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \hat{N}_2^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \hat{N}_3^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \hat{N}_4^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix}$$

. Para el elemento 1:

$$\hat{N}_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1-\eta) \qquad \hat{N}_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1-\eta)$$

$$\hat{N}_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1+\eta) \qquad \hat{N}_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1+\eta)$$



$$\left[J^1\right]^T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -\eta-1\\ \xi-1 & -\xi-1 & 1+\xi & 1-\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 2 & 0.5\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.125\eta-0.375\\ 1 & 0.125\xi+0.125\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left[J^1\right]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1+\xi}{3-\eta} & 1\\ \dfrac{8}{\eta-3} & 0\end{bmatrix},\ \det J^1=-0.125\eta+0.375$$

$$\left[B^1\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{1+\xi}{3-\eta} & 1\\ \dfrac{8}{\eta-3} & 0\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -\eta-1\\ \xi-1 & -\xi-1 & 1+\xi & 1-\xi\end{bmatrix}$$

. La matriz de 'rigidez' del elemento es:

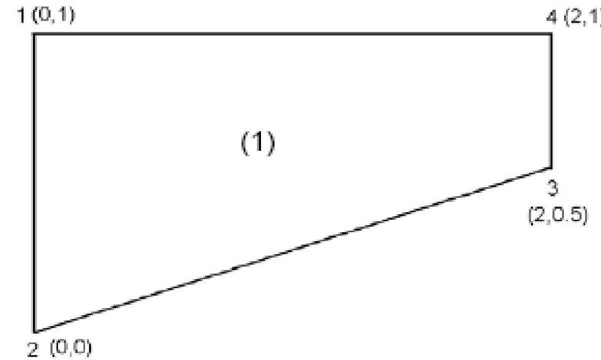
$$K^1=\int_\Omega B^{1^T}\cdot D^1\cdot B^1\cdot d\Omega=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}B^{1^T}\cdot\underbrace{D^1}_{k\cdot I}\cdot B^1\cdot|J1|\cdot d\xi\cdot d\eta\Rightarrow$$ {Integ Gauss-Leg N_p =2 ptos} :

$$K^1=\sum_{i=1}^{N_p=2}\sum_{j=1}^{N_p=2}k\cdot\left(B^{1^T}\cdot B^1\cdot|J^1|\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_i\\ \eta=\eta_j}}\cdot w_i\cdot w_j\ ,\ (\xi_i,\eta_j)=(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})\ ,\ (w_i,w_j)=(1,1)$$

Mismo ejemplo: con elementos cuadriláteros de 4 nodos

. La matriz de 'rigidez' del elemento es finalmente:

$$\left[K^1\right] = \begin{bmatrix} 4.76 & -3.51 & -2.98 & 1.73 \\ -3.51 & 4.13 & 1.73 & -2.36 \\ -2.98 & 1.73 & 6.54 & -5.29 \\ 1.73 & -2.36 & -5.29 & 5.91 \end{bmatrix}$$

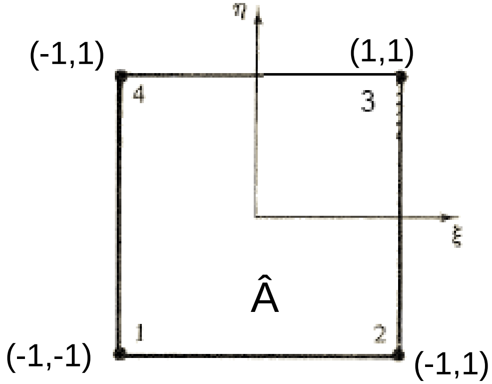


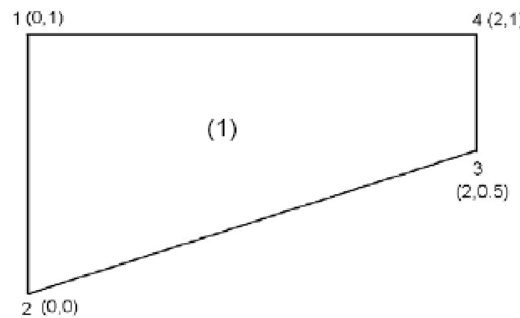
. La contribución al vector F de 'cargas' de la de la fuente interna 6 W/m^2 distribuida en la superficie del elemento es (se hace la integración de Gauss)

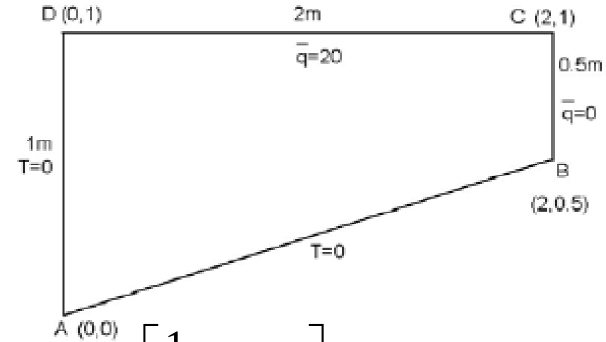
$$\left\{F_\Omega^e\right\} = \int_\Omega f\cdot\left[N^e\right]^T d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\cdot\left[N^e\right]^T \,|\,J^1\,|\cdot d\xi\cdot d\eta = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 6\cdot\begin{bmatrix}\hat{N}_1^e \\ \hat{N}_2^e \\ \hat{N}_3^e \\ \hat{N}_4^e\end{bmatrix} |\,J^1\,|\cdot d\xi\cdot d\eta = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$|J_1| = -0.125\cdot\square + 0.375$

. Ahora hay que calcular la contribución al vector F de ‘cargas’ debida a las condiciones naturales en el elemento e=1 para ξ=-1(Borde 4-1 en Ω, es ξ=-1 en Â.







$$\{F_q^e\} = -\int_{\Gamma_q^e} \bar{q}\cdot N^e \cdot d\Gamma = -\int_{1}^{-1} \bar{q}\cdot\left[N^e\right]_{\xi=-1} \underbrace{|J^1|}_{\text{Jacobiano 1D}=L/2} \cdot(-d\eta) = -\int_{-1}^{1} 20\cdot \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-\eta)\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{2}(1+\eta)\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\frac{2-0}{2}}_{|J|}\cdot d\eta = \begin{bmatrix}-20\\ 0\\ 0\\ -20\end{bmatrix}$$

Sobre borde 4 - 1 (ξ = -1) sólo son no nulas $\hat{N}_1(-1,\eta) = (1-\eta)/2$ y $\hat{N}_4(-1,\eta) = (1+\eta)/2$:

$x = x_1\cdot(1-\eta)/2 + x_4\cdot(1+\eta)/2,\ dx = (1/2)\cdot(-x_1 + x_4)\cdot d\eta$

$y = y_1\cdot(1/2)\cdot(1-\eta) + y_4\cdot(1/2)\cdot(1+\eta),\ dy = (1/2)\cdot(-y_1 + y_4)\cdot d\eta,$

$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm(L/2)\cdot d\eta$ en gral para 4 - 1, L : long lado, aquí L = 2

$x_1 = 0, x_4 = 2, y_1 = y_2 = 1,\ dx = ((-x_1 + x_4)/2)\cdot d\eta = d\eta, dy = 0$

$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm d\eta$, sg(+) si η crece con s, sg(-) si decrece al crecer s.

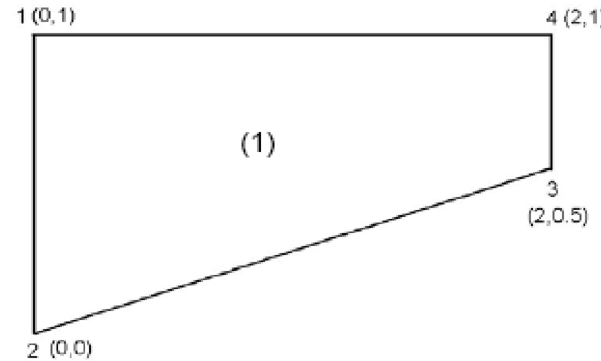
$$\hat{N}_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1-\eta)$$

$$\hat{N}_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1+\eta)$$

. Ensamblando todas las contribuciones a F :

$$F = F_\Omega + F_\Gamma + R_E = \begin{bmatrix} r_1 - 17.5\\ r_2 + 2.5\\ r_3 + 2\\ -18\end{bmatrix}$$

. Finalmente se obtiene:

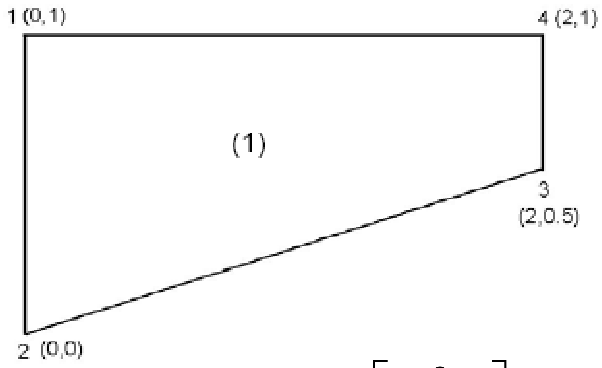


$$\begin{bmatrix} 4.76 & -3.51 & -2.98 & 1.73 \\ -3.51 & 4.13 & 1.73 & -2.36 \\ -2.98 & 1.73 & 6.54 & -5.29 \\ 1.73 & -2.36 & -5.29 & 5.91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - 17.5 \\ r_2 + 2.5 \\ r_3 + 2 \\ -18 \end{bmatrix}$$

. Resolviendo la caja inferior derecha: T_4=-18/5.91=-3.04

. La solución de la variable T en los nodos:
(solución en los 'grados de libertad')

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.04 \end{bmatrix}$$



. Las componentes del flujo
en cada punto de Gauss son:

$$\left\{q^1(\xi,\eta)\right\} = \begin{bmatrix} -k\dfrac{\partial T^e}{\partial x} \\ -k\dfrac{\partial T^e}{\partial y} \end{bmatrix} = -k\left[B^e\right]\begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \\ T_4^e \end{bmatrix} = -k\begin{bmatrix} \dfrac{1+\xi}{3-\eta} & 1 \\ \dfrac{8}{\eta-3} & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -\eta-1 \\ \xi-1 & -\xi-1 & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.04 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{q^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \begin{bmatrix} 0.8979 \\ 3.5916 \end{bmatrix}$$

$$\left\{q^1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \begin{bmatrix} -2.2965 \\ 19.793 \end{bmatrix}$$

$$\left\{q^1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} = \begin{bmatrix} 4.9482 \\ 19.793 \end{bmatrix}$$

$$\left\lfloor q^1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rfloor = \begin{bmatrix} 5.8042 \\ 3.5916 \end{bmatrix}$$

Mismo ejemplo: con elementos cuadriláteros de 4 nodos