Introducción al método de los Elementos Finitos en 2D

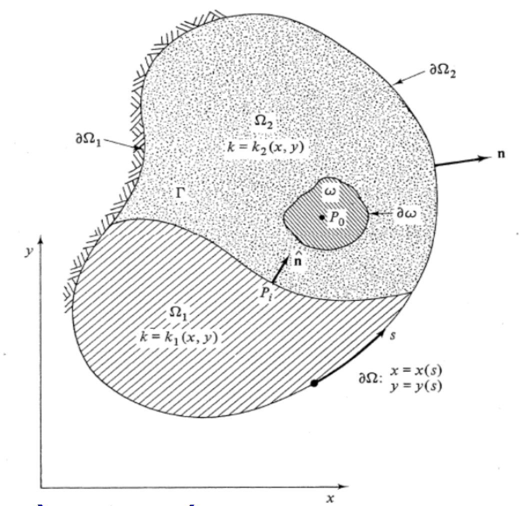
Lección 12
Aproximación por Elementos Finitos de Problemas de Contorno 2D

v20160610

Adaptado por Jaime Puig-Pey (UC) de:

. Zabaras, N. Curso 'FE Analysis for Mech&Aerospace Design'. U. Cornell. 2012.
. Fish, J., Belytschko, T. "A First Course in Finite Elements". Ed. Wiley, 2007.

Los datos en un dominio Ω de contorno $\partial\Omega$
- La 'fuente' f=f(x,y) en Ω
- 'Parámetros' de material $k_i=k_i(x,y)$, $b_i=b_i(x,y)$, (x,y) en Ω
- Los datos para las condiciones de borde:
  . Esenciales : $u(s)=\hat{u}(s)$, $s\in\partial\Omega_1$
  . Naturales: $\alpha(s)$, $\beta(s)$ en $\partial\Omega_2$,
  (o bien q(s) y/o p(s) y $\bar{u}$ (s), en $\partial\Omega_2$)



Con estos datos, queremos calcular la función escalar *u(x,y)* en Ω (temperatura, potencial hidráulico,…) :

EDP:

$$-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y))+b(x,y)\cdot u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega_i, i=1,2$$

$$-k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n}=p(s)\cdot(u(s)-\hat{u}(s)),\ s\in\partial\Omega_2$$

$$-k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n}=q(s)\ ,s\in\partial\Omega_2$$

Condiciones globales de contorno

$$o\ \ en\ síntesis:\quad -k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n}=\alpha(s)\cdot u(s)+\beta(s),\ s\in\partial\Omega_2\quad \alpha(s)\ y\ \beta(s)\ conocidas$$

$$(en\ el\ programa\ 2DBVP\ es:\quad +k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n}=\alpha(s)\cdot u(s)+\beta(s),\ s\in\partial\Omega_2)$$

$$u(s)=\hat{u}(s)\ ,\ s\in\partial\Omega_1$$

Conservación flujo normal en interfaz Γ entre subdominios en su caso:

$$k^+(s)\vec{\nabla}u^+(s)\cdot\vec{n}(s)-k^-(s)\cdot\vec{\nabla}u^-(s)\cdot\vec{n}(s)=0\ ,s\in\Gamma$$

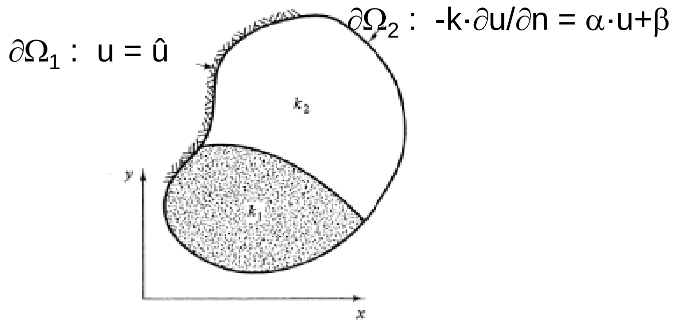
La formulación débil de la anterior EDP se expresa:

. Encontrar una función u(x,y) $\in H^1(\Omega)$ tal que u(s)=û(s) , s $\in \Gamma_u \equiv \partial\Omega_1$ y para todas las funciones w(x,y) $\in H^1(\Omega)$, con w(x,y) =0 en $\partial\Omega_1$ que cumpla:

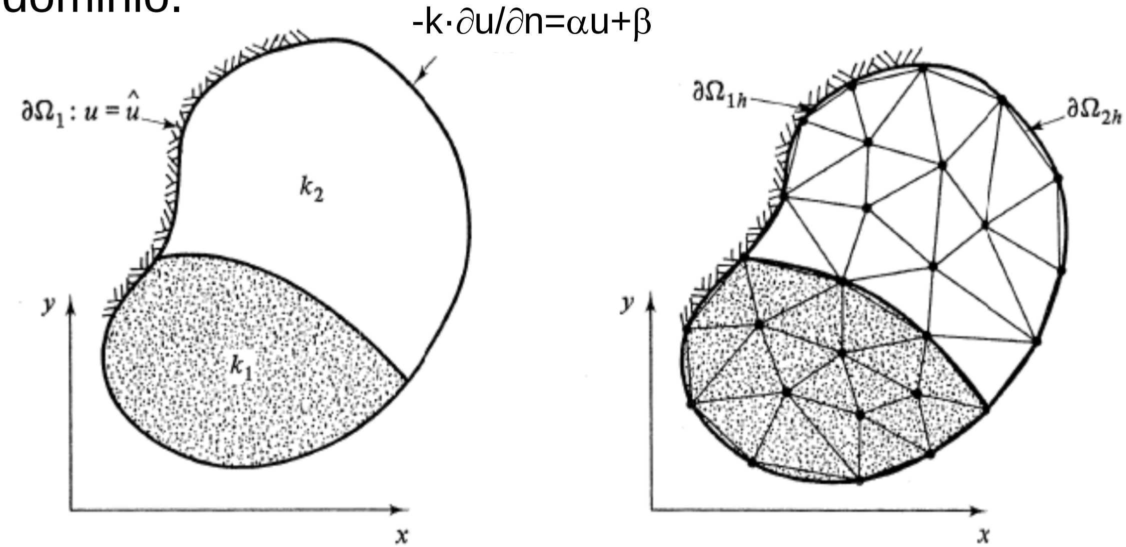
$$\boxed{\begin{aligned}&\int_\Omega [\vec{\nabla} w(x,y) \bullet (k(x,y)\cdot\vec{\nabla} u(x,y)) + w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)]\cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot\alpha(s)\cdot u(s)\cdot ds = \\ &= \int_\Omega w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot\beta(s)]\cdot ds\end{aligned}}$$

. Reescribiéndolo en forma matricial, asignado al coeficiente k(x,y) de las propiedades constitutivas una expresión matricial D (2x2) operando sobre ∇u:

$$\boxed{\int_\Omega [\underbrace{\vec{\nabla} w^T}_{1x2}\cdot\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\vec{\nabla} u}_{2x1}+\underbrace{w}_{1x1}\cdot\underbrace{b}_{1x1}\cdot\underbrace{u}_{1x1}]\cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_2}\underbrace{w}_{1x1}\cdot\underbrace{\alpha}_{1x1}\cdot\underbrace{u}_{1x1}\cdot ds = \int_\Omega \underbrace{w}_{1x1}\cdot\underbrace{f}_{1x1}\cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_2}\underbrace{w}_{1x1}\cdot\underbrace{\beta}_{1x1}\cdot ds}$$



. El dominio Ω se aproxima mediante un dominio aproximado Ω_h con E elementos finitos y n nodos, ubicando nodos y elementos de tal modo que los bordes de elementos coincidan lo mejor posible con el contorno e interfaces que existan entre zonas con diferente valor en k u otros parámetros característicos del material que constituye el dominio.



Se seguirán haciendo las integraciones extendidas sobre Ω_h y sobre la parte de su contorno $\partial\Omega_{2h}$ afectado por condiciones de contorno 'naturales'. Y se calcularán acumulando las contribuciones de cada elemento finito en la malla. Como se vio, no hay que incorporar integrales sobre lados contiguos entre elementos, incluso con distintas propiedades constitutivas. Por el equilibrio de flujos normales en esos bordes, se cancelan las integrales sobre dichos lados.

Aprox por EF de Prob de Contorno 2D

. Definimos un subespacio finito n-dimensional H^h de $H^1(\Omega_h)$ construyendo unas funciones de base globales adecuadas: N_i, i=1, 2, …,n, (nº de nodos), empleando los elementos comentados antes. Estas funciones básicas se utilizarán para aproximar tanto u(x,y) como las funciones de peso w(x,y) (método de Galerkin).

. Llamando N(x,y) ≡ N al vector fila: $[N_1(x,y),\ldots N_n(x,y)]$

. Una función de prueba w_h típica en H^h, de coeficientes en el vector columna W_h, es de la forma:

$$w_h(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{W_j}_{w_h(x_j,y_j)}\cdot N_j(x,y)=\underbrace{W_h^T}_{1xn}\cdot\underbrace{N(x,y)^T}_{nx1}=\underbrace{N(x,y)}_{1xn}\cdot\underbrace{W_h}_{nx1}$$

. La función solución u(x,y), en H^h, de coeficientes constantes en el vector U_h, conocidos en $\partial\Omega_1$, se aproxima mediante:

$$\boxed{u_h(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{u_j}_{u_h(x_j,y_j)}\cdot N_j(x,y)=\underbrace{N(x,y)}_{1xn}\cdot\underbrace{U_h}_{nx1}}$$

- Recuérdese que la función $N_j(x,y)$ (j=1,…,n) vale 1 en (x_j,y_j) y 0 en los demás nodos.

. En general los datos de las condiciones de contorno esenciales (de Dirichlet) û en $\partial\Omega_1$ curva de borde con parámetro s, se aproximan mediante:

$$\hat{u}_h(x,y)=\sum_j \hat{u}_j\cdot N_j(x(s),y(s))$$

donde la suma se extiende a todos los nodos de $\partial\Omega_{1h}$

. Encontrar una función $u_h(x,y) \in H^h(\Omega)$

$$u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{u_j}_{u_h(x_j,y_j)} \cdot N_j(x,y) = \underbrace{N(x,y)}_{1xn} \cdot \underbrace{U_h}_{nx1}$$

$u_h(x,y)=\hat{u}(s)$ sobre $\partial\Omega_{1h}$, tal que para todas las $w_h(x,y) \in H^h(\Omega_h)$, con $w_h(x,y)=0$ en $\partial\Omega_{1h}$ (CC esenciales), se cumpla:

$$\int_{\Omega_h} [\underbrace{\vec{\nabla} w_h{}^T}_{1x2} \cdot \underbrace{D}_{2x2} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u_h}_{2x1}) + \underbrace{w_h}_{1x1} \cdot \underbrace{b}_{1x1} \cdot \underbrace{u_h}_{1x1} \cdot] d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}} \underbrace{w_h}_{1x1} \cdot \underbrace{\alpha}_{1x1} \cdot \underbrace{u_h}_{1x1} \cdot ds = \int_{\Omega_h} \underbrace{w_h}_{1x1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_{2h}} \underbrace{w_h}_{1x1} \cdot \underbrace{\beta}_{1x1} \cdot ds$$

. Se sustituirán las expresiones matriciales para u_h y w_h, anteriores. Veámoslo término a término en la ecuación

$$\underbrace{\vec{\nabla} u_h}_{2x1} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}}_{2xn} \cdot \underbrace{U_h}_{nx1}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} w_h{}^T}_{1x2} = \underbrace{W_h{}^T}_{1xn} \cdot \underbrace{[N_x{}^T, N_y{}^T]}_{nx2} \quad , \quad \underbrace{\vec{\nabla} w_h}_{2x1} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}}_{2xn} \cdot \underbrace{W_h}_{nx1}$$

N_x y N_y son vectores fila con las derivadas parciales respectivas del vector N respecto a x e y

$$\int_{\Omega_h} \underbrace{\vec{\nabla} w_h{}^T}_{1x2} \cdot \underbrace{D}_{2x2} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u_h}_{2x1} \cdot d\Omega = \int_{\Omega_h} \underbrace{W_h{}^T}_{1xn} \cdot \underbrace{[N_x{}^T, N_y{}^T]}_{nx2} \cdot \underbrace{D}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}}_{2xn} \cdot \underbrace{U_h}_{nx1} \cdot d\Omega$$

$$\int_{\Omega_h}[\underbrace{\vec{\nabla} w_h{}^T}_{1x2}\cdot\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\vec{\nabla} u_h}_{2x1})+\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{b}_{1x1}\cdot\underbrace{u_h}_{1x1}]d\Omega+\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{\alpha}_{1x1}\cdot\underbrace{u_h}_{1x1}\cdot ds=\int_{\Omega_h}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{f}_{1x1}\cdot d\Omega-\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{\beta}_{1x1}\cdot ds$$

$$\int_{\Omega_h}\underbrace{\vec{\nabla} w_h{}^T}_{1x2}\cdot\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\vec{\nabla} u_h}_{2x1}\cdot d\Omega=\int_{\Omega_h}\underbrace{W_h{}^T}_{1xn}\cdot\underbrace{[N_x{}^T,N_y{}^T]}_{nx2}\cdot\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}N_x\\N_y\end{bmatrix}}_{2xn}\cdot\underbrace{U_h}_{nx1}\cdot d\Omega$$

$$\int_{\Omega_h}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{f}_{1x1}\cdot d\Omega=\int_{\Omega_h}\underbrace{W_h{}^T}_{1xn}\cdot\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{f}_{1x1}\cdot d\Omega$$

$$\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{\beta}_{1x1}\cdot ds=\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{W_h{}^T}_{1xn}\cdot\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{\beta}_{1x1}\cdot ds$$

$$\int_{\Omega_h}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{b}_{1x1}\cdot\underbrace{u_h}_{1x1}\cdot d\Omega=\int_{\Omega_h}\underbrace{W_h{}^T}_{1xn}\cdot\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{b}_{1x1}\cdot\underbrace{N}_{1xn}\cdot\underbrace{U_h}_{nx1}\cdot d\Omega$$

$$\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{w_h}_{1x1}\cdot\underbrace{\alpha}_{1x1}\cdot\underbrace{u_h}_{1x1}\cdot ds=\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{W_h{}^T}_{1xn}\cdot\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{\alpha}_{1x1}\cdot\underbrace{N}_{1xn}\cdot\underbrace{U_h}_{nx1}\cdot ds$$

$$\underbrace{W_h{}^T}_{1xn}\cdot$$
$$[\{\int_{\Omega_h}(\underbrace{[N_x{}^T,N_y{}^T]}_{nx2}\cdot\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}N_x\\N_y\end{bmatrix}}_{2xn}+\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{b}_{1x1}\cdot\underbrace{N}_{1xn})d\Omega+\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{N}_{nx1}\cdot\underbrace{\alpha}_{1x1}\cdot\underbrace{N^T}_{1xn}\cdot ds\}\cdot\underbrace{U_h}_{nx1}-$$
$$-\int_{\Omega_h}\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{f}_{1x1}\cdot d\Omega+\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{\beta}_{1x1}\cdot ds]=0$$

Sintetizando matricialmente:
$W_h{}^T\cdot(K\cdot U_h-F)=0$ (1x1)

$W_h{}^T=[W_1,W_2,\ldots,W_n]$

$U_h=[U_1,U_2,\ldots,U_n]^T$

Valores de U_h y W_h en los nodos

$$K=\int_{\Omega_h}(\underbrace{[N_x{}^T,N_y{}^T]}_{nx2}\cdot\underbrace{D}_{2x2}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}N_x\\N_y\end{bmatrix}}_{2xn}+\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{b}_{1x1}\cdot\underbrace{N}_{1xn})\cdot d\Omega+\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{\alpha}_{1x1}\cdot\underbrace{N}_{1xn}\cdot ds$$

$$F=\int_{\Omega_h}\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{f}_{1x1}\cdot d\Omega-\int_{\partial\Omega_{2h}}\underbrace{N^T}_{nx1}\cdot\underbrace{\beta}_{1x1}\cdot ds$$

Sintetizando matricialmente: $W_h^T \cdot (K \cdot U_h - F) = 0$ (1x1)

$W_h^T = [W_1, W_2, \ldots, W_n]$, $U_h = [U_1, U_2, \ldots, U_n]^T$ Valores de U_h y W_h en los nodos

$$K = \int_{\Omega_h} (\underbrace{[N_x^T, N_y^T]}_{nx2} \cdot \underbrace{D}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}}_{2xn} + \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{b}_{1x1} \cdot \underbrace{N}_{1xn}) \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{\alpha}_{1x1} \cdot \underbrace{N}_{1xn} \cdot ds$$

$$F = \int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_{2h}} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{\beta}_{1x1} \cdot ds$$

. Obsérvese que la matriz K es simétrica si lo es la D de propiedades constitutivas.

. Como las funciones de peso $w_h(x,y)$ se anulan en $\partial\Omega_{1h}$, podemos subdividir el vector de sus coeficientes W_h (valores de w_h en los nodos) en dos bloques: $W_h^T = [W_{hE}^T, W_{hr}^T]$ esto es, W_{hE} con todas las componentes nulas (pues son los valores de $w_h(x,y)$ en los nodos con condiciones de contorno u=û conocidas (condiciones esenciales), y W_{hr} el resto.

. Se hará esta misma partición en el vector U_h, bloques U_{hE} y U_{hr} .
Esta ordenación se considerará igualmente en el vector N de las funciones base, y a las submatrices que resultan en K: K_E, K_{Er}, K_{rE}, K_r , y a los subvectores de F: F_E, F_r a las particiones en F. En la síntesis matricial queda:

$$[W_{hE}^T, W_{hr}^T] \cdot \left[K \cdot \begin{Bmatrix} U_{hE} \\ U_{hr} \end{Bmatrix} - F \right] = [W_{hE}^T, W_{hr}^T] \cdot \left[\begin{bmatrix} K_E & K_{Er} \\ K_{rE} & K_r \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{hE} \\ U_{hr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_E \\ F_r \end{Bmatrix} \right] = 0$$

Se tiene la síntesis matricial: $W_h^T\cdot(K\cdot U_h-F)=0$ (1x1) de la formulación débil, con

$W_h^T=[W_1,W_2,\ldots,W_n]$, $U_h=[U_1,U_2,\ldots,U_n]^T$,valores de w_h y u_h en los nodos.

Separando componentes asociadas a nodos con condiciones esenciales (E), $W_h^T=[W_{hE}^T,W_{hr}^T]$, teniendo W_{hE} todos los elementos nulos y siendo W_{hr} el resto:

$$[W_{hE}{}^T, W_{hr}{}^T]\cdot\left[K\cdot\begin{Bmatrix}U_{hE}\\U_{hr}\end{Bmatrix}-F\right]=[W_{hE}{}^T, W_{hr}{}^T]\cdot\left[\begin{bmatrix}K_E & K_{Er}\\K_{rE} & K_r\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_{hE}\\U_{hr}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}F_E\\F_r\end{Bmatrix}\right]=0$$

Llamemos: $R_E=K_E\cdot U_{hE}+K_{Er}\cdot U_{hr}-F_E$, $R_r=K_{rE}\cdot U_{hE}+K_r\cdot U_{hr}-F_r$

$$[W_{hE}{}^T, W_{hr}{}^T]\cdot\begin{Bmatrix}R_E\\R_r\end{Bmatrix}=0$$

Esto es: $W_{hE}^T\cdot R_E+W_{hr}^T\cdot R_r=0$ (1x1)

Puesto que $W_{hE}=\mathbf{0}$, resulta que ha de ser $W_{hr}^T\cdot R_r=0$ para cualesquiera valores de las componentes de W_{hr} .¡¡Pero esto implica que R_r debe ser el vector nulo: $R_r=0$!!,

Esto es: $\boxed{K_{rE}\cdot U_{hE}+K_r\cdot U_{hr} - F_r= 0}$

Así que los valores aproximados U_{hr} de la función incógnita en los nodos sin condiciones esenciales, resultan de resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\boxed{K_r\cdot U_{hr} = F_r-K_{rE}\cdot U_{hE}}$

De la expresión matricial global de la forma débil aproximada y discretizada:

$$[W_{hE}{}^{T}, W_{hr}{}^{T}] \cdot \left[K \cdot \begin{Bmatrix} U_{hE} \\ U_{hr} \end{Bmatrix} - F \right] = [W_{hE}{}^{T}, W_{hr}{}^{T}] \cdot \left[\begin{bmatrix} K_E & K_{Er} \\ K_{rE} & K_r \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{hE} \\ U_{hr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_E \\ F_r \end{Bmatrix} \right] = 0$$

Se puede escribir, con la terminología presentada:

$$\begin{bmatrix} K_E & K_{Er} \\ K_{rE} & K_r \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{hE} \\ U_{hr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_E \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_E \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{rE} \cdot U_{hE} + K_r \cdot U_{hr} - F_r = 0$$

Manteniendo la matriz K y el vector F completos, ordenando vectores y matrices ubicando primero las cc esenciales (U_{hE} conocidos)

$$[K] \cdot \begin{Bmatrix} U_{hE} \\ U_{hr} \end{Bmatrix} - F = \begin{Bmatrix} R_E \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obteniéndose los valores aproximados U_{hr} de la función incógnita en los nodos sin condiciones esenciales del sistema de ecuaciones lineales:

$$K_r \cdot U_{hr} = F_r - K_{rE} \cdot U_{hE}$$

Si se desea obtener R_E, basta operar tras calcular U_{hr}: $R_E = K_E \cdot U_{hE} + K_{Er} \cdot U_{hr} - F_E$

Habiendo realizado la discretización del dominio mediante la malla de elementos finitos, se han de calcular la matriz de 'rigidez' K y el vector de 'cargas 'F'. Cada una de las integrales que aparecen en K y en F se han de calcular mediante la suma de contribuciones de cada elemento en la malla.

$$K = \int_{\Omega_h} (\underbrace{[N_x{}^T, N_y{}^T]}_{nx2} \cdot \underbrace{D}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}}_{2xn} + \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{b}_{1x1} \cdot \underbrace{N}_{1xn}) \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{\alpha}_{1x1} \cdot \underbrace{N}_{1xn} \cdot ds$$

$$F = \int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_{2h}} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{\beta}_{1x1} \cdot ds$$

$$\int_{\Omega_h} [\ ] = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} [\ ] \ , \quad \int_{\partial\Omega_{2h}} = \sum_{\substack{\textit{elementos con} \\ \textit{borde } \partial\Omega_e \\ \textit{sobre } \partial\Omega_{2h}}} \int_{\partial\Omega_e} [\ ]$$

Podemos hablar de una matriz K^e de 'rigidez' del elemento e, de dimensión ($n^e x n^e$) y un vector F^e ($n^e x1$) de 'cargas' de cada elemento con su contribución. No hay integración sobre lados 'interiores'. Si el número de nodos del elemento genérico es n^e, se tendrá:

$$K^e = \int_{\Omega_h^e} (\underbrace{[N_x{}^{eT}, N_y{}^{eT}]}_{n^e x2} \cdot \underbrace{D^e}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x{}^e \\ N_y{}^e \end{bmatrix}}_{2xn^e} + \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{b^e}_{1x1} \cdot \underbrace{N^e}_{1xn^e}) \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{\alpha^e}_{1x1} \cdot \underbrace{N^e}_{1xn^e} \cdot ds$$

$$F^e = \int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{\beta^e}_{1x1} \cdot ds$$

$$K^e = \int_{\Omega_h^e} (\underbrace{[N_x^{eT}, N_y^{eT}]}_{n^e x2} \cdot \underbrace{D^e}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^e \\ N_y^e \end{bmatrix}}_{2xn^e} + \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{b^e}_{1x1} \cdot \underbrace{N^e}_{1xn^e}) \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{\alpha^e}_{1x1} \cdot \underbrace{N^e}_{1xn^e} \cdot ds$$

$$F^e = \int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{\beta^e}_{1x1} \cdot ds$$

. Las anteriores integraciones se hacen en los ejes globales considerados en el dominio Ω_h, por tanto si se realiza algún cambio de variable al referir la integración sobre un elemento e, se habrá de considerar en el proceso.

. En cada elemento e intervienen tantas funciones base $N_i(x,y)$ como nodos tiene el elemento.

- Si dichos nodos tienen índices globales j1, j2,…, jn^e , siendo los índices locales 1,…,n^e, respectivamente, el elemento de la matriz K^e de índices locales r, s, (r, s=1,…,n^e), se incorporará a la matriz global K, como un término aditivo (con su signo) en el elemento $K_{jr,js}$ de la misma.
- Análogamente, el elemento del vector F^e de índice local r se incorporará al vector global F como un término aditivo (con su signo) en la componente F_{jr} del mismo.

* Este es el proceso que se conoce como **ensamblado.**

$$K^e = \int_{\Omega_h^e} (\underbrace{[N_x^{eT}, N_y^{eT}]}_{n^e x2} \cdot \underbrace{D^e}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^e \\ N_y^e \end{bmatrix}}_{2xn^e} + \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{b^e}_{1x1} \cdot \underbrace{N^e}_{1xn^e}) \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{\alpha^e}_{1x1} \cdot \underbrace{N^e}_{1xn^e} \cdot ds$$

$$F^e = \int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_{2h}^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{\beta^e}_{1x1} \cdot ds$$

. En las integraciones para calcular K y F aparecen:
- Integrales extendidas a un dominio Ω_h multidimensional (2D en nuestro caso), .
- Integrales curvilíneas extendidas al borde $\partial\Omega_{2h}$.

- Si un elemento e no tiene lados que pertenecen al contorno $\partial\Omega_{2h}$ su contribución a términos referentes al contorno en el vector F será nula. Si los tiene, se incorpora su contribución a la/s componente/s correspondientes de F.

. La función f(x,y) tiene, en la ecuación diferencial, el sentido de una ‘fuente’, interna al dominio, de aportación de flujo por unidad de superficie.

- Puede ocurrir, por el problema físico subyacente (foco puntual de calor, caudal puntual de fluido), que esa aportación no sea distribuida sino que aparezca como concentrada en un punto. ¿Cómo introducirlo en el proceso?

Visión global $\int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega$

Visión local $\int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega$

La función 'impulso' o delta de Dirac $\delta(x\text{-}x_i,y\text{-}y_i)$ se define de modo que :

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i, y - y_i) \cdot d\Omega = 1 \ , \ (x_i, y_i) \in \Omega$$

La delta de Dirac $\delta(x\text{-}x_i,y\text{-}y_i)$ se utiliza para representar un función que es cero en todo el dominio Ω salvo en un entorno pequeño del punto (x_i,y_i) , donde vale 'infinito', pero de modo que su integral en el dominio Ω toma el valor finito 1. Se puede asimilar la situación a cargas verticales distribuidas (carga por unidad de superficie) actuando sobre Ω, cuya integral sea una carga acumulada de valor 1 sobre el dominio. Si se quiere representar una carga puntual unidad en (x_i,y_i) se puede hacer tratándola como límite de cargas distribuidas que van reduciendo su dominio de acción y va creciendo su valor distribuido tendiendo a infinito al tender el dominio de acción a un punto, debiendo ser su integral en el dominio de valor unidad para equivaler a la acción de la carga vertical unidad acumulada.

Esta función 'especial' forma parte de un modelo especial de funciones llamadas 'distribuciones'.

Tienen como propiedad adicional que, siendo V un valor constante y g(x,y) una función suave definida sobre Ω, se verifica:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i, y - y_i) \cdot V \cdot g(x, y) \cdot d\Omega = V \cdot g(x_i, y_i) \ , \ (x_i, y_i) \in \Omega$$

Visión global $\int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega$

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i, y - y_i) \cdot V \cdot g(x,y) \cdot d\Omega = V \cdot g(x_i, y_i) \ , \ (x_i, y_i) \in \Omega$$

Visión local $\int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega$

Para introducir la fuente puntual de valor P actuando en el punto (x_i,y_i) del dominio Ω basta fijarse en las integrales que implican a la fuente f y al vector N de funciones base en el proceso de aproximación por elementos finitos. La función a considerar será $f=P\cdot\delta(x-x_i,y-y_i)$.

$$F1 = \int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega$$

Se comentan algunos casos ilustrativos:

- Si la fuente puntual P actúa en un punto que es el nodo j (x_j,y_j) global de la discretización, en el que la única función base global no nula es $N_j(x,y)$, la aportación al vector global F1 será en su componente j, como un término aditivo que se añadirá a otras posibles contribuciones de otras fuentes f.

$$\int_{\Omega_h} \underbrace{N_j}_{1x1}(x,y) \cdot P \cdot \delta(x - x_j, y - y_j) \cdot d\Omega = P \cdot N_j(x_j, y_j) = P$$

- Si la fuente puntual P actúa en un punto (x_j,y_j) que es interior a un elemento de nodos con índices globales $j1,\ldots,jn^e$, se tendrán en cuenta las funciones base de la discretización que no se anulan en dicho elemento, $N_{j1}(x,y)\ldots,N_{jne}(x,y)$. Entonces la aportación de la fuente puntual aparecerá en n^e componentes del vector F1, en cada una de ellas con un término aditivo, por ejemplo en la componente j1, la aportación valdrá $P\cdot N_{j1}(x_j,y_j)$, y así hasta la componente n^e, con el término aditivo $P\cdot N_{jne}(x_j,y_j)$. Cada término aditivo se añadirá a otras posibles contribuciones de otras fuentes f.

Visión global $\int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega$

$\int_{\Omega} \delta(x - x_i, y - y_i) \cdot V \cdot g(x,y) \cdot d\Omega = V \cdot g(x_i, y_i) \;,\; (x_i, y_i) \in \Omega$

Visión local $\int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{e\,T}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega$

$$F1 = \int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega$$

- Si la fuente puntual P actúa en un punto (x_j,y_j) que es intermedio de un lado de un elemento, siendo los puntos extremos de ese lado los nodos j1y j2 , con notación global, y dándose el caso de que las únicas funciones base que no se anulan en (x_j,y_j) son N_{j1} y N_{j2}, la aportación de la fuente puntual aparecerá en 2 componentes del vector F1, en cada una de ellas con un término aditivo, en la componente j1, la aportación valdrá P·N_{j1}(x_j,y_j), y en la componente j2 con el término aditivo P·N_{j2}(x_j,y_j) . Cada término aditivo se añadirá a otras posibles contribuciones de otras fuentes f.

. Es posible que el lado en que actúa la fuente puntual sea compartido por dos elementos, y se deben tener en cuenta las funciones globales que no se anulan en el punto de aplicación de la fuente.

. Se puede operar fijándose en el elemento o elementos afectados por la ubicación del punto de aplicación de la fuente puntual. Pero siempre partiendo de la posición de dicho punto en relación con las funciones base globales de la discretización; influirán todas aquellas que no se anulen en el punto de aplicación (x_j,y_j) de la fuente, y la aportación aditiva se dará en las componentes de F1 correspondientes a los índices globales de esas funciones base globales.

Visión global $\boxed{\int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega}$ $\boxed{\int_{\Omega} \delta(x - x_i, y - y_i) \cdot V \cdot g(x,y) \cdot d\Omega = V \cdot g(x_i, y_i) \ , \ (x_i, y_i) \in \Omega}$ Visión local $\boxed{\int_{\Omega_h^e} \underbrace{N^{eT}}_{n^e x1} \cdot \underbrace{f^e}_{1x1} \cdot d\Omega}$

$$F1 = \int_{\Omega_h} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega$$

- Si la fuente f actúa a modo de cuchillo como una función P(x,y) que actúa sobre una trozo de curva C(x,y), la contribución a F1 se expresará:

$$\boxed{\int_{C(x,y)} \underbrace{N^T}_{nx1} \cdot \underbrace{P(x,y)}_{1x1} \cdot ds}$$

. Es decir, se realizará la integral curvilínea a lo largo de la curva C, del integrando formado por el producto de la función fuente P(x,y) por las funciones base globales que no se anulan sobre el segmento de curva C(x,y). Habrá aportación aditiva en las componentes del vector F1 que correspondan a esas funciones base globales no nulas sobre C(x,y), siendo la aportación en la componente j de F1 el valor:

$$\boxed{\int_{C(x,y)} \underbrace{N_j(x,y)}_{1x1} \cdot \underbrace{P(x,y)}_{1x1} \cdot ds}$$

Ejemplo

Consideraremos la solución por el MEF del siguiente problema de contorno :

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \text{ en } \Omega$$

Con las condiciones de contorno:

u=0 sobre Γ_{41}
(tipo Dirichlet)

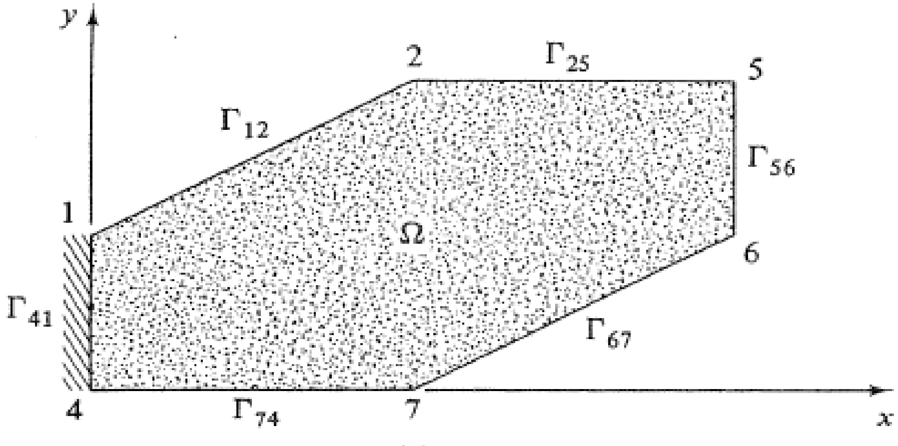
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ sobre \ \Gamma_{12}, \Gamma_{25}, \Gamma_{67}, \Gamma_{74}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha \cdot u + \beta \ sobre \ \Gamma_{56}$$

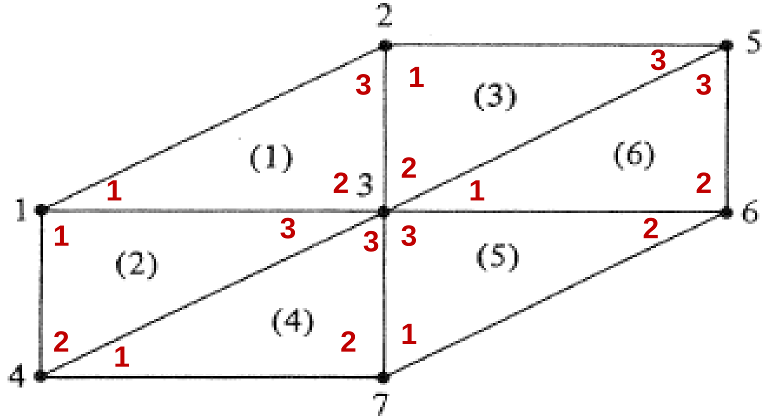
(tipo Neumann)

$\partial\Omega_{1h} = \partial\Omega_1$, $\partial\Omega_{2h} = \partial\Omega_2$

$\partial\Omega_2 = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{25} \cup \Gamma_{56} \cup \Gamma_{67} \cup \Gamma_{74}$,
$\partial\Omega_1 = \Gamma_{41}$

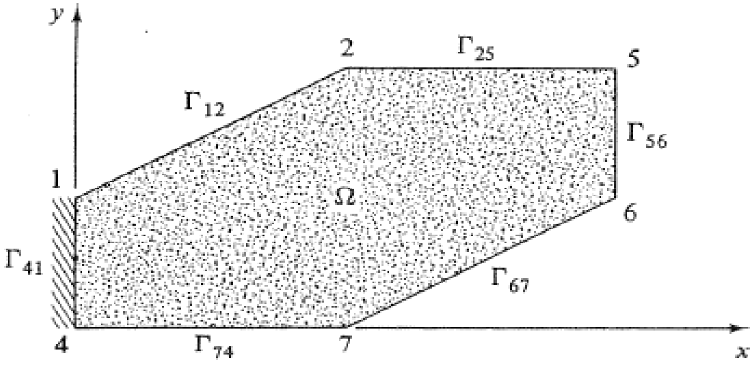


(a)

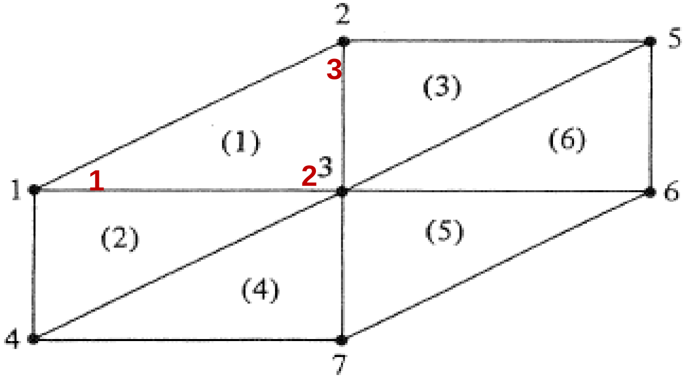


. Elemento 1:

$$K^1=\begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{13} & k^1_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^1_{31} & k^1_{33} & k^1_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^1_{21} & k^1_{23} & k^1_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a)



Aportación de elem 1 a matriz K en lo relativo al término:

$$\int_{\Omega_h^1} \underbrace{[N_x^{1^T}, N_y^{1^T}]}_{n^1 x 2} \cdot \underbrace{D^1}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^1 \\ N_y^1 \end{bmatrix}}_{2xn^1} d\Omega$$

$$F^1=\begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_3^1 \\ f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aportación de elem 1 al vector F en lo relativo al término:

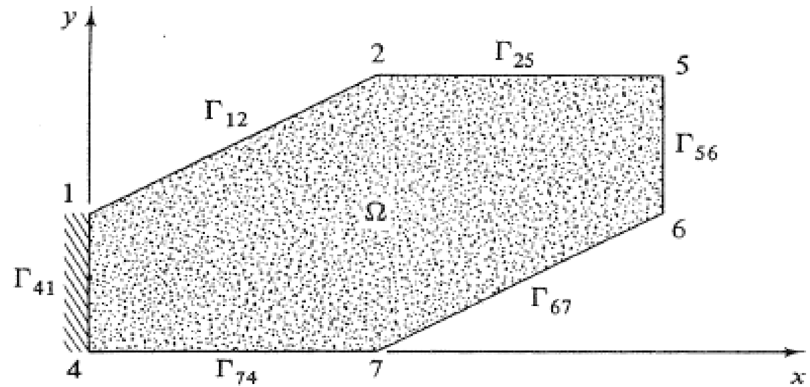
$$\int_{\Omega_h^1} \underbrace{N^{1^T}}_{n^1 x 1} \cdot \underbrace{f^1}_{1x1} \cdot d\Omega$$

$\partial\Omega_2=\Gamma_{12}\cup\Gamma_{25}\cup\Gamma_{56}\cup\Gamma_{67}\cup\Gamma_{74}$,
$\partial\Omega_1=\Gamma_{41}$

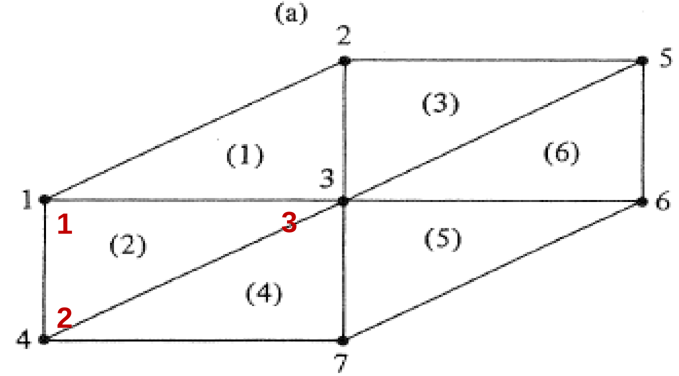
Ejemplo

. Elemento 2:

$$K^2=\begin{bmatrix} k_{11}^2 & 0 & k_{13}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ k_{31}^2 & 0 & k_{33}^2 & k_{32}^2 & 0 & 0 & 0\\ k_{21}^2 & 0 & k_{23}^2 & k_{22}^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a)



Aportación de elem 2 al vector F en lo relativo al término:

$$\int_{\Omega_h^2} \underbrace{[N_x^{2^T}, N_y^{2^T}]}_{n^2 x 2} \cdot \underbrace{D^2}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^2 \\ N_y^2 \end{bmatrix}}_{2xn^2} d\Omega$$

$$F^2=\begin{bmatrix} f_1^2 \\ 0 \\ f_3^2 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aportación de elem 2 al vector F en lo relativo al término:

$$\int_{\Omega_h^2} \underbrace{N^{2^T}}_{n^2 x1} \cdot \underbrace{f^2}_{1x1} \cdot d\Omega$$

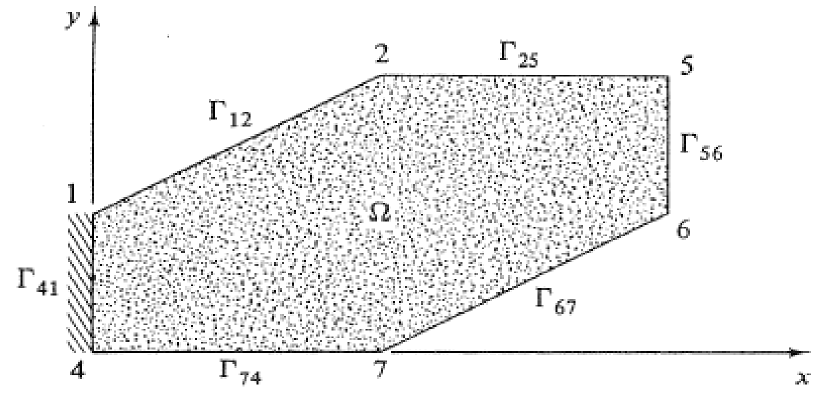
$\partial\Omega_2=\Gamma_{12}\cup\Gamma_{25}\cup\Gamma_{56}\cup\Gamma_{67}\cup\Gamma_{74}$,

$\partial\Omega_1=\Gamma_{41}$

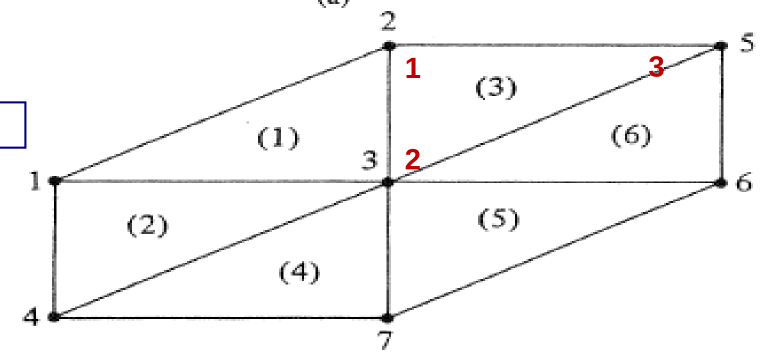
Ejemplo

Elemento 3:

$$K^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 & k_{13}^3 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & 0 & k_{23}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & 0 & k_{33}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a)



Aportación de elem 3 al vector F en lo relativo al término:

$$\int_{\Omega_h^3} \underbrace{[N_x^{3^T}, N_y^{3^T}]}_{n^3 x 2} \cdot \underbrace{D^3}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^3 \\ N_y^3 \end{bmatrix}}_{2xn^3} d\Omega$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \\ 0 \\ f_3^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

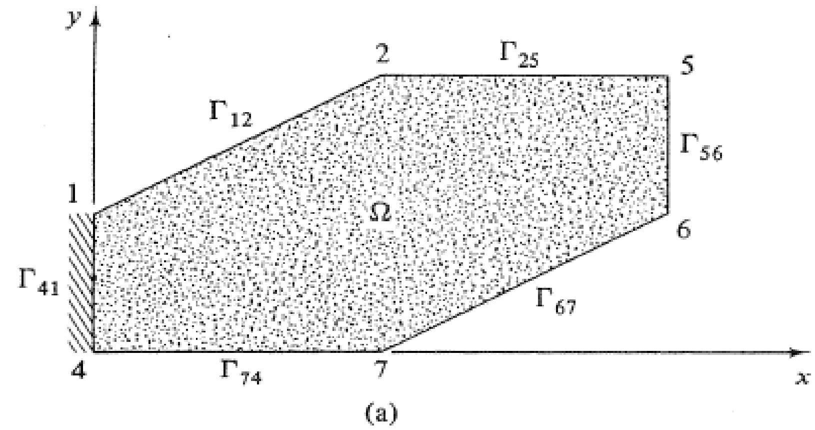
Aportación de elem 3 al vector F en lo relativo al término:

$$\int_{\Omega_h^3} \underbrace{N^{3^T}}_{n^3 x 1} \cdot \underbrace{f^3}_{1x1} \cdot d\Omega$$

$\partial\Omega_2 = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{25} \cup \Gamma_{56} \cup \Gamma_{67} \cup \Gamma_{74}$,
$\partial\Omega_1 = \Gamma_{41}$

. Elemento 6 (***tiene cond. naturales***):

$$K^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^3 & 0 & k_{13}^6 & k_{12}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31}^6 & 0 & k_{33}^6 & k_{32}^6 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^6 & 0 & k_{23}^6 & k_{22}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



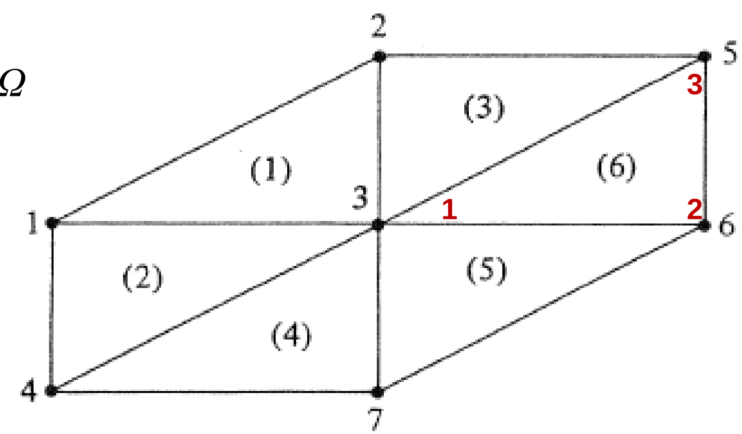
Aportación de elem 6 a matriz K en lo relativo al término:

$$\int_{\Omega_h^6} \underbrace{[N_x^{6^T}, N_y^{6^T}]}_{n^6 x 2} \cdot \underbrace{D^6}_{2x2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^6 \\ N_y^6 \end{bmatrix}}_{2xn^6} d\Omega$$

$$F^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^6 \\ 0 \\ f_3^6 \\ f_2^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aportación de elem 6 al vector F en lo relativo al término:

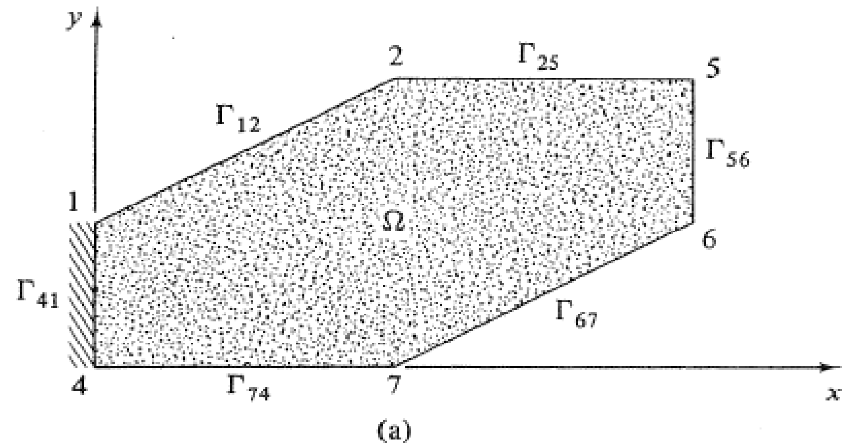
$$\int_{\Omega_h^6} \underbrace{N^{6^T}}_{n^6 x1} \cdot \underbrace{f^6}_{1x1} \cdot d\Omega$$



$$-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha \cdot u + \beta \; sobre \;\; \Gamma_{56}$$

. Elemento 6 (***tiene cond. naturales***):

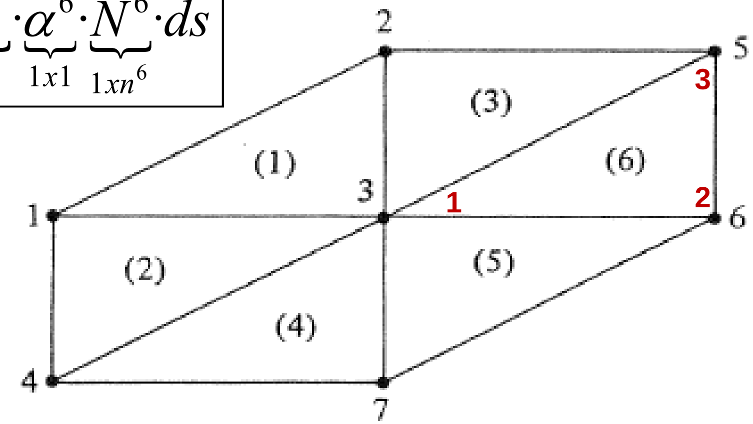
$$A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33}^6 & a_{32}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23}^6 & a_{22}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a)

Aportaciones "a" de elem 6 a matriz K en lo relativo a cond. natur. en 5-6 ($\partial\Omega_2$), término "α":

$$\int_{\partial\Omega^6{}_{2h}} \underbrace{N^{6^T}}_{n^6 x1} \cdot \underbrace{\alpha^6}_{1x1} \cdot \underbrace{N^6}_{1xn^6} \cdot ds$$



$$B^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_3^6 \\ b_2^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aportaciones "b" de elem 6 a vector F en lo relativo a cond. natur. en 5-6 ($\partial\Omega_2$), término "β":

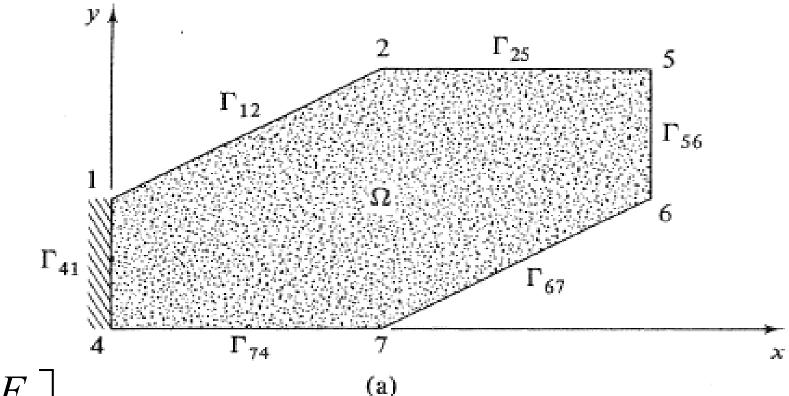
$$-\int_{\partial\Omega^6_{2h}} \underbrace{N^{6^T}}_{n^6 x1} \cdot \underbrace{\beta^6}_{1x1} \cdot ds$$

$\partial\Omega_2=\Gamma_{12}\cup\Gamma_{25}\cup\Gamma_{56}\cup\Gamma_{67}\cup\Gamma_{74}$,
$\partial\Omega_1=\Gamma_{41}$

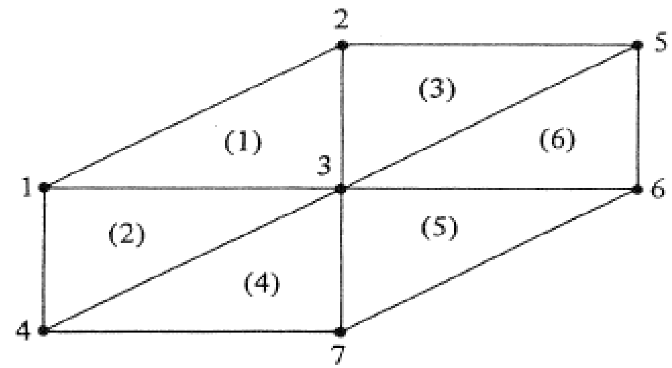
Ejemplo: Ensamblado

- Las aportaciones a K de todos los elementos, incluyendo las de las condiciones de contorno naturales: $K=K^1+K^2+K^3+K^4+K^5+K^6+A^6$

- Las aportaciones a F de todos los elementos, incluyendo las de las condiciones de contorno naturales: $F=F^1+F^2+F^3+F^4+F^5+F^6+B^6$



$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & 0 & K_{73} & K_{74} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$



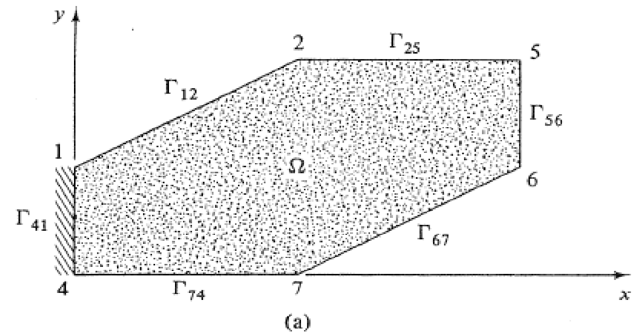
El ensamblado se puede realizar en 2 fases: 1) introducir las aportaciones de los elementos sin incluir las condiciones de contorno naturales. 2) Introducir estas c.c. naturales.

* Obsérvese los elementos de K no nulos y sus subíndices en relación con la conexión entre los nodos

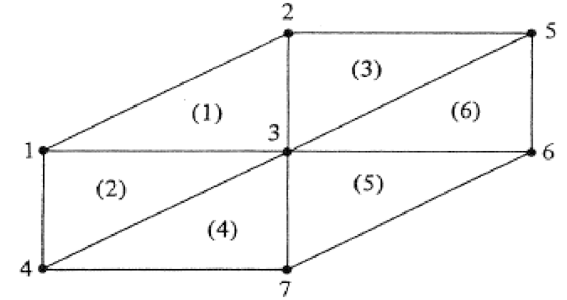
Ejemplo: Sistema final de ecuaciones

- El sistema final de ecuaciones queda, en notación compacta:

$$[K^*]\cdot\begin{bmatrix} U_E \\ U_r \end{bmatrix} - F^* = \begin{bmatrix} R_E \\ 0 \end{bmatrix}$$



Donde K* y F* son las matrices K y F con sus filas reordenadas respecto de poner los índices de los nodos "esenciales " en cabeza. U_E son los valores conocidos de las condiciones de contorno esenciales en los nodos correspondientes

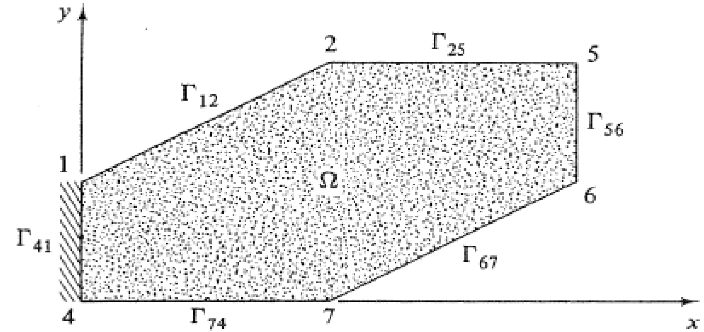


. Escribamos el sistema sin efectuar esta reordenación, y señalando que aquí $u_1=0$, $u_4=0$. R_E es desconocido,

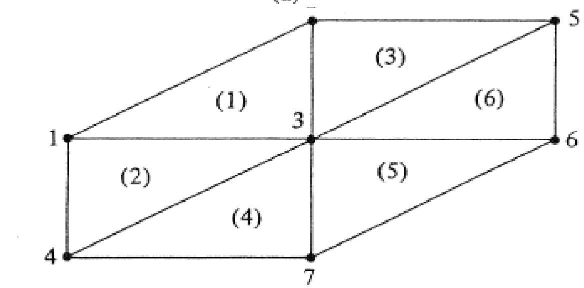
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & 0 & K_{73} & K_{74} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1E} \\ 0 \\ 0 \\ r_{4E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sistema final de ecuaciones

- Transformando el sistema con sus incógnitas propias, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7:



(a)



<u>El sistema efectivo, 5x5, con las 5 incógnitas, valores en los nodos que no tienen condiciones 'esenciales':</u>

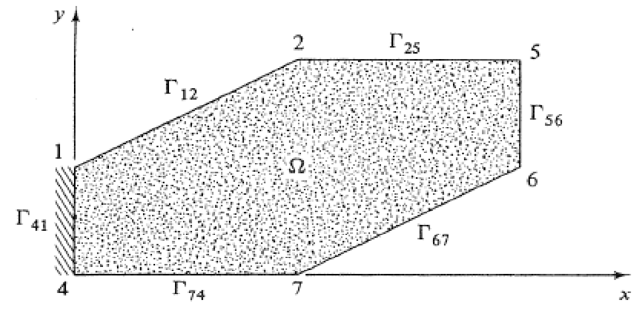
$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{32} & K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{52} & K_{53} & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & K_{73} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

Resuelto este sistema lineal y obtenidos todos los valores de u en los nodos, si en el postproceso se desea se calcular r_{1E} y r_{4E} que constituyen R_E:

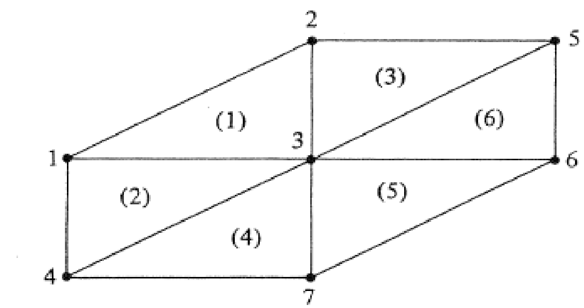
$$r_{1E}=K_{12}\cdot u_2+K_{13}\cdot u_3-F_1$$
$$r_{4E}=K_{43}\cdot u_3+K_{47}\cdot u_7-F_4$$

Consideremos una pequeña variante del ejercicio, de modo que en lugar de u=0 sobre Γ_{41} se supone que hay una condición no nula, u=c, (también tipo Dirichlet)

. Escribamos el sistema sin efectuar reordenación, y señalando que aquí $u_1=c$, $u_4=c$. R_E es desconocido,



(a)



$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & 0 & K_{73} & K_{74} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1=c \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4=c \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1E} \\ 0 \\ 0 \\ r_{4E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema efectivo, 5x5, con las 5 incógnitas, valores en los nodos que no tienen condiciones 'esenciales':

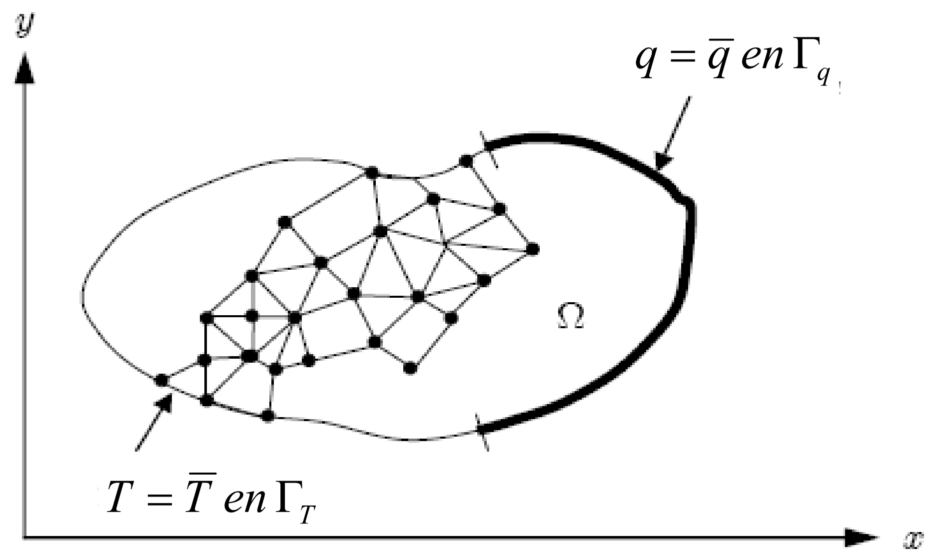
$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{32} & K_{33} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{52} & K_{53} & K_{55} & K_{56} & 0 \\ 0 & K_{63} & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & K_{73} & 0 & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 - K_{21}\cdot c \\ F_3 - K_{31}\cdot c - K_{34}\cdot c \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 - K_{74}\cdot c \end{bmatrix}$$

. Consideremos un ejemplo similar (se empleará notación asociada a la conducción del calor) repitiendo los mismos cálculos pero en forma matricial. En el programa 2dBVP MatLab los cálculos están programados de este modo.

. El problema de contorno 2D se formula así.

Calcular T(x,y) en Ω tal que:

$$-\nabla\cdot(D\cdot\nabla T) = f(x,y)$$
$$\mathrm{T} = \overline{T} \quad sobre\ \Gamma_T$$
$$(cc\ \ Esenc, valor\ \ T)$$
$$q = -D\cdot\vec{\nabla}T\cdot\mathbf{n} = \overline{q} \quad sobre\ \Gamma_q$$
$$(cc\ \ natur,\ valor\ \ flujo\ \ de\ \ T)$$



Conducción del calor 2D. Forma débil

La forma débil del problema se expresa:

. Encontrar una función T(x,y) $\in H^1(\Omega)$ tal que T(s) = $\overline{T}$ (s) , s $\in \Gamma_T$ y se cumple lo siguiente:

$$\boxed{\int_\Omega \vec{\nabla} w^T \cdot D \cdot \vec{\nabla} \mathrm{T} d\Omega = \int_\Omega w \cdot f \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_q} w \cdot \overline{q} \cdot ds}$$

para todas las funciones w(x,y) $\in U_0$, denotando como U_0 : w $\in H^1(\Omega)$, con w=0 en Γ_T

. La forma débil se escribe en modo matricial, dispuesta para la discretización por el MEF, siendo q el flujo de calor y D la matriz de conductividad térmica:

$$\vec{\nabla}\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix}, \quad \vec{\nabla}\mathrm{w}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} & \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}} \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\mathrm{q}}_{\substack{\text{flujo}\\ \text{calor}}} = \begin{bmatrix} \mathrm{q_x} \\ \mathrm{q_y} \end{bmatrix} = \text{-}\mathrm{D}\cdot\vec{\nabla}\mathrm{T}, \quad \underbrace{\mathrm{D}}_{\substack{\text{matriz}\\ \text{conduc}}} = \begin{bmatrix} \mathrm{k_{xx}} & \mathrm{k_{xy}} \\ \mathrm{k_{yx}} & \mathrm{k_{yy}} \end{bmatrix}$$

Se reemplazan las integrales por suma de integrales sobre los elementos finitos:

. Encontrar una función T(x,y) $\in H^1(\Omega)$ tal que T(s)= $\bar{T}$ (s) , s $\in \Gamma$ y que se cumpla:

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^e}\{\vec{\nabla}w^{e^T}\}\cdot D^e\cdot\vec{\nabla}T^e d\Omega=\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^e}w^e\cdot f\cdot d\Omega-\sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma_q^e}w^e\cdot\bar{q}\cdot d\Gamma$$

Siendo: E el número de elementos. ne es el número de nodos en cada elemento. L^e es la matriz ($n_e$xn) de acople del elemento local e en la matriz global. N^e(x,y) el vector (1xne) de funciones de forma del elemento. d^e el vector (ne x1) de temperaturas nodales del elemento . d es el vector (n x 1) de temperaturas en los nodos globales de la malla.

- Las fórmulas de interpolación para T(x,y) y para la función de prueba w(x,y) sobre cada elemento :

$$T^e(x,y)=N^e(x,y)\cdot d^e=[N_1^e \dots N_{ne}^e]\cdot\begin{bmatrix}T_1^e\\ \vdots\\ T_n^{ne}\end{bmatrix}=[N^e]\cdot\{d^e\}=[N^e]\cdot L^e\cdot\{d\}$$

$$w^e(x,y)=N^e(x,y)\cdot d^e=[N_1^e \dots N_{ne}^e]\cdot\begin{bmatrix}W_1^e\\ \vdots\\ W_n^{ne}\end{bmatrix}=[N^e]\cdot\{W^e\}=[N^e]\cdot L^e\cdot\{W\}$$

Ej. matriz acople (pareja origen-destino: 1-2, 2-4, 3-5)

. local $d^e=[d_1^e, d_2^e, d_3^e]^T$, global $d=[d_1, d_2, d_3, d_4, d_5]=[0, d_1^e, 0, d_2^e, d_3^e]^T$

$$L^e=\begin{matrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{matrix}$$

Comprobar: $d^e=L^e\cdot d$

. Los campos de gradiente de T^e y de w^e se obtienen así
(ne: nº nodos elemento; L^e: matriz de acople de contrib. elemento a matriz global):

$$\vec{\nabla}T^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} \cdot T_1^e + \ldots + \dfrac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} \cdot T_{ne}^e \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} \cdot T_1^e + \ldots + \dfrac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \cdot T_{ne}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} \ldots \dfrac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} \ldots \dfrac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^e \\ \vdots \\ T_{ne}^e \end{bmatrix} = [B^e(x,y)] \cdot \{d^e\} = [B^e] \cdot L^e \cdot \{d\}$$

B^e es la matriz (2 x ne) de las derivadas 1as de las funciones base en el elemento.

. Análogamente para el gradiente de $w^e(x,y)$, función de prueba o de test en el elemento e, llamando W^{eT} al vector (1 x ne) de coeficientes de dicha función en el elemento y W^T al vector (1x n) de coeficientes de w(x,y), que son sus valores en los nodos de la malla global:

$$\left\{\vec{\nabla}w^e(x,y)\right\}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w^e}{\partial x} & \dfrac{\partial w^e}{\partial y} \end{bmatrix} = [W_1^e, \ldots, W_{ne}^e] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \end{bmatrix} = W^{e^T} \cdot B^{e^T} = W^T \cdot L^{e^T} \cdot B^{e^T}$$

Conducción del calor 2D. Forma débil

. Podemos sustituir las expresiones anteriores en la formulación 'débil'

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^e}\vec{\nabla}\mathrm{w}^{e}\cdot\mathrm{D}^{e}\cdot\vec{\nabla}\mathrm{T}^{e}d\Omega=\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega^e}\mathrm{w}^{e^{T}}\cdot\mathrm{f}\cdot d\Omega-\sum_{e=1}^{E}\int_{\Gamma_q^e}\mathrm{w}^{e}\cdot\overline{\mathrm{q}}\cdot d\Gamma\ ,\forall w(x,y)\ que\ se\ anule\ en\ \Gamma_T$$

Introduciendo las expresiones de interpolación de T(x,y) y de w(x,y):

$$\underbrace{\mathrm{W}^{T}}_{1xn}\cdot\underbrace{\left\{\sum_{e=1}^{E}L^{e^{T}}\cdot[(\int_{\Omega^e}B^{e^{T}}\cdot\mathrm{D}^{e}\cdot B^{e}\cdot d\Omega)\cdot L^{e}\cdot d-\int_{\Omega^e}N^{e^{T}}\cdot f\cdot d\Omega+\int_{\Gamma_q^e}N^{e^{T}}\cdot\overline{q}\cdot d\Gamma]\right\}}_{nx1}=0$$

$$\forall\ vector\ W\ que\ se\ anule\ en\ \Gamma_T$$

. Obsérvese que el vector W^T (1xn), con los coeficientes de la función de prueba genérica $w(x,y)=W^T\cdot N(x,y)^T$, siendo $N(x,y)^T$ el vector columna de funciones de forma, se puede particionar, e igualmente el vector de temperatura en nodos d, en :

* W_E , d_E: asociados a los nodos de bordes con condiciones esenciales; W_E será nulo para que las funciones w(x,y) de prueba se anulen en esos bordes (en sus nodos) donde se impone el valor de T(x,y), que se asignan en d_E en este caso.

* W_r , d_r: el resto de los coeficientes. Así:

$$\mathrm{d}=\begin{bmatrix}d_E\\ d_r\end{bmatrix},\ \{\mathrm{W}\}=\begin{bmatrix}\mathrm{W}_E=0\\ \mathrm{W}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{W}_r\end{bmatrix}$$

(En prog. 2DBVP, D se supone diagonal(k_x,k_y) se utiliza la notación $k_x\cdot(\partial u/\partial x)\cdot n_x+k_y\cdot(\partial u/\partial y)\cdot n_y$ =alpha·u+beta, en el borde. Así la condición $-k\cdot(\partial u/\partial n)=q_b$, valor flujo en un borde, implica que beta=$-q_b$)

Conducción del calor 2D. Forma débil

$$\underbrace{\mathrm{W}^{\mathrm{T}}}_{1xn}\cdot\underbrace{\left\{\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot[(\int_{\Omega^e} B^{e^T}\cdot\mathrm{D}^e\cdot B^e\cdot\mathrm{d}\Omega)\cdot L^e\cdot d-\int_{\Omega^e} N^{e^T}\cdot f\cdot d\Omega+\int_{\Gamma_q^e} N^{e^T}\cdot\overline{q}\cdot d\Gamma]\right\}}_{nx1}=0$$

$$\forall\, vector\ W\ que\, se\ anule\ en\ \Gamma_T$$

. De esta ecuación se puede identificar fácilmente:

$$K^e=\int_{\Omega^e} B^{e^T}\cdot D^e\cdot B^e\cdot d\Omega \quad , \quad F^e=\int_{\Omega^e} N^{e^T}\cdot f\cdot d\Omega-\int_{\Gamma_q^e} N^{e^T}\,\overline{q}\cdot d\Gamma$$

. Y se puede escribir la 'forma débil' así:

$$\underbrace{W^T}_{1xn}\cdot\left[\left(\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot K^e\cdot L^e\right)\cdot d-\left(\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot F^e\right)\right]=\underbrace{0}_{1x1} \quad \forall w(x,y)\ que\ se\ anule\ en\ \Gamma_T$$

En el 2º factor, vector (nx1) entre corchetes, se habrán de anular las componentes correspondientes a los índices de nodos en que no se imponen condiciones esenciales. Ahí está el sistema de ecuaciones que da la solución.

. Se tienen la matriz K de "rigidez" global y el vector F de "cargas":

$$\underbrace{K}_{n\times n}=\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot\mathrm{K}^e\cdot L^e \quad , \quad \underbrace{F}_{n\times 1}=\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot F^e$$

Conducción del calor 2D. Resolución

$$\underbrace{W^T}_{1\times n}\cdot\left[\left(\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot K^e\cdot L^e\right)\cdot d-\left(\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot F^e\right)\right]=\underbrace{0}_{1\times 1}\quad \forall w(x,y)\ que\ se\ anule\ en\ \Gamma_T$$

$$K=\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot \mathrm{K}^e\cdot L^e\quad,\quad F=\sum_{e=1}^{E} L^{e^T}\cdot F^e$$

$W^T\cdot(K\cdot d - F)=0$ (1×1)

. Con la partición del vector de coeficientes W (W_E ; W_r), y las correspondientes en K y F, la forma débil se escribe, llamando $R_E=K_E\cdot d_E+K_{Er}\cdot d_r-F_E$,$R_r=K_{rE}\cdot d_E+K_r\cdot d_r-F_r$:

$$[W_E{}^T, W_r{}^T]\cdot\left[K\cdot\begin{Bmatrix}U_E\\U_r\end{Bmatrix}-F\right]=[W_E{}^T=0, W_r{}^T]\cdot\left[\begin{bmatrix}K_E & K_{Er}\\K_{rE} & K_r\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}d_E\\d_r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}F_E\\F_r\end{Bmatrix}\right]=[W_E{}^T=0, W_r{}^T]\cdot\begin{Bmatrix}R_E\\R_r\end{Bmatrix}=0$$

$[W_E{}^T=0]\cdot R_E+W_r{}^T\cdot R_r=0$, que se ha de cumplir $\forall W_r$, lo que implica que: $R_r=0$
(R_E no tiene por qué serlo, su valor no es conocido a priori)

Es decir, $K_{rE}\cdot d_E+K_r\cdot d_r-F_r=0$, y puesto que d_E es conocido (condiciones esenciales):

$$K_r\cdot d_r = F_r - K_{rE}\cdot d_E$$

que es el sistema que da las temperaturas d_r en los nodos en que es desconocida.

El sistema global $K\cdot D-F=\{R_E;\mathbf{0}\}$ asociado a la formulación débil se puede escribir, con d_E conocido y R_E desconocido a priori:

$$\begin{bmatrix}K_E & K_{Er}\\K_{rE} & K_r\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}d_E\\d_r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_E+R_E\\F_r\end{Bmatrix}$$

Así se opera en el programa 2DBVP (Matlab). El vector R_E tiene que ver con los flujos en los bordes con condiciones de contorno 'esenciales', se puede calcular tras obtener d_r .