Introducción al método de los Elementos Finitos en 2D

Lección 10: Prelim Matem
Ecuaciones diferenciales y formulación débil

Adaptado por Jaime Puig-Pey (UC) de:

. Zabaras, N. Curso 'FE Analysis for Mech&Aerospace Design'. U. Cornell. 2012.
. Fish, J., Belytschko, T. "A First Course in Finite Elements". Ed. Wiley, 2007.

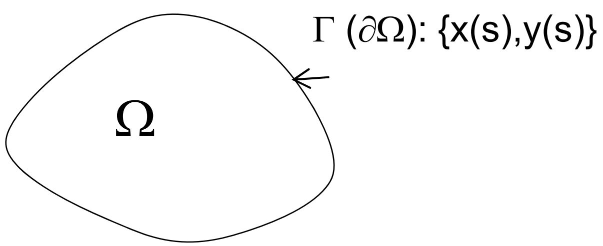
. Considérese un dominio $\bar{\Omega}$, en 2D, con interior Ω y borde Γ, (también lo denominaremos en ocasiones $\partial\Omega$)

. El borde Γ $(\partial\Omega)$ se puede definir mediante ecuaciones paramétricas: x(s), y(s), siendo s la longitud de arco a lo largo de Γ.

. Una función f(x,y) en el borde Γ se puede expresar: f(s)=f(x(s),y(s)), s indica el parámetro en la definición paramétrica de la curva de borde Γ ($\partial\Omega$)

. Utilizaremos una función escalar u(x,y) de 2 variables para representar algunos problemas de campo, que tendrá el papel de función incógnita (potencial hidráulico, temperatura,…).

. Supondremos que las funciones que utilicemos tienen las suficientes condiciones de 'suavidad' o continuidad para que sean válidas las operaciones a que se someten.



. Gradiente $\nabla u(x,y)$ de una función escalar $u(x,y)$:

Es un vector: $\nabla u(x,y) = (\partial u/\partial x) \cdot \mathbf{i} + (\partial u/\partial y) \cdot \mathbf{j}$,

(**i**,**j** versores ejes cartesianos X e Y)

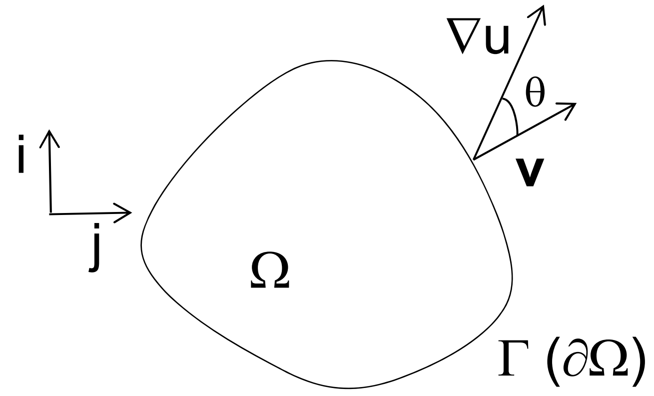
. Es frecuente utilizar el *<u>operador gradiente</u>* $\nabla(\ ) = (\partial/\partial x \cdot \mathbf{i} + \partial/\partial y \cdot \mathbf{j})(\ )$

. El gradiente marca la dirección de máximo crecimiento de $u(x,y)$ al moverse desde el punto (x,y)

. La variación de $u(x,y)$ en la dirección de un versor $\mathbf{v} = \cos\theta\ i + \text{sen}\ \theta\ j$ es la proyección del gradiente sobre **v** (producto escalar $\nabla u \cdot \mathbf{v}$). Se escribe:

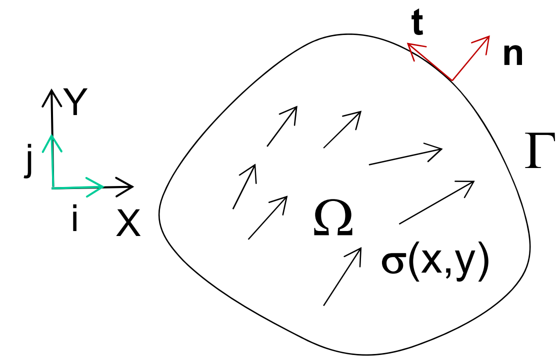
$$du/d\mathbf{v} = \partial u(x,y)/\partial \mathbf{v} = \nabla u(x,y) \cdot \mathbf{v} =$$

$$= \partial u(x,y)/\partial x \cdot \cos\theta + \partial u(x,y)/\partial y \cdot \text{sen}\theta$$



Flujo

. Se llama flujo $\overline{\sigma}(x,y)$ a un vector que es función del punto (x,y), como el gradiente , y que en 2D tiene dos componentes y representa un campo vectorial (puede ser flujo de calor o de fluido por unidad de longitud (2D) o superficie (3D), …)



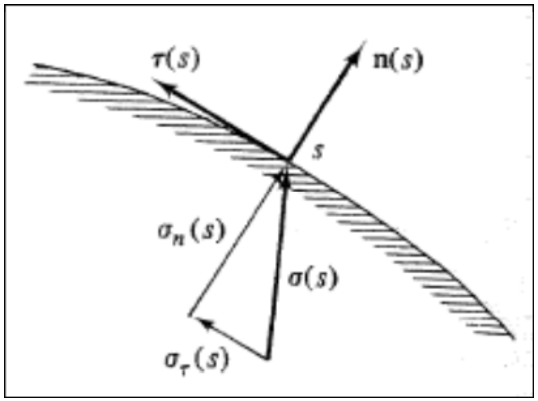
Visión del borde:

. El flujo en el borde $\overline{\sigma}(s) = \overline{\sigma}(x(s),y(s))$,
se puede descomponer en las componentes:

. Normal : $\sigma_n(s) = \overline{\sigma}(s) \cdot \mathbf{n}(s)$ {(·) es producto escalar, **n**(s) es versor normal exterior}

. Tangencial: $\sigma_t(s) = \overline{\sigma}(s) \cdot \mathbf{t}(s)$

$|\mathbf{n}(s)|=1$; $|\mathbf{t}(s)|=1$



Flujo

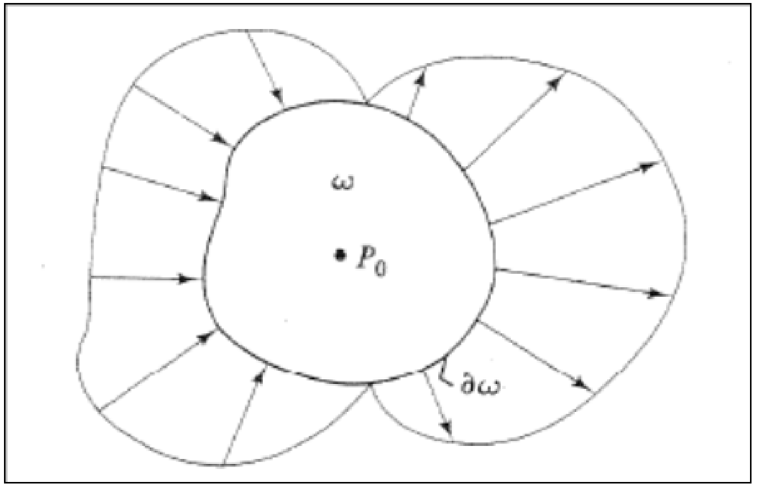
. Considérese un subconjunto arbitrario $\omega \subset \Omega$ que contiene a un punto (x_0,y_0) del conjunto.

. Considérese el flujo normal $\sigma_n(s) = \bar{\sigma}(s)\cdot\mathbf{n}(s)$ que atraviesa el borde $\partial\omega$ de ω

. El flujo total a través de ese borde es la integral curvilínea de $\sigma_n(s)$a lo largo del mismo, siendo ds el diferencial de arco de curva:

$$\Sigma_\omega = \int_{\partial\omega} \sigma_n(s)ds$$

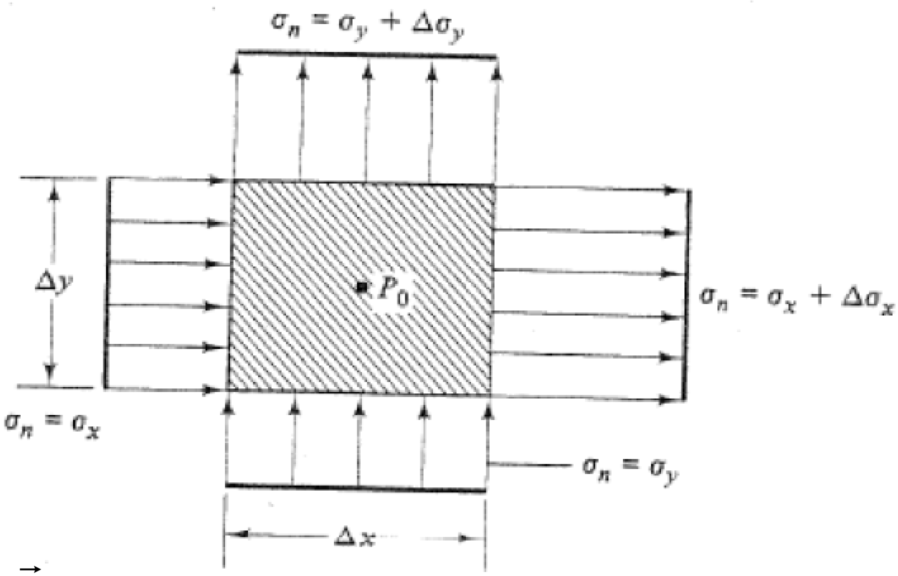
. Si dividimos Σ_ω entre el área A_ω de ω, se puede interpretar el resultado como la cantidad de flujo $\boldsymbol{\sigma}$ que fluye dentro de ω por unidad de área.



El límite de $\Sigma_\omega / A_\omega = \int_{\partial\omega} \sigma_n(s)ds / A_\omega$ cuando el tamaño de ω tiende a cero, conteniendo siempre al punto (x_0,y_0), se denomina la **divergencia** del flujo en P_0: div ($\bar{\sigma}(x_0,y_0)$), que es una magnitud escalar.

Tomemos como subconjunto ω una región rectangular elemental

$$\Sigma_\omega = \Delta\sigma_x \Delta y + \Delta\sigma_y \Delta x$$



Dividiendo por el área Δx·Δy, tomando el límite para Δx, Δy→0

$$div(\vec{\boldsymbol{\sigma}}(x,y)) = \frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial y} =$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j})\cdot(\sigma_x(x,y)\cdot\mathbf{i} + \sigma_y(x,y)\cdot\mathbf{j}) = \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\sigma}}$$

De modo que $\nabla\cdot\ \bar{\sigma}$ es la densidad de flujo neto por unidad de área en un punto genérico de Ω.

Flujo

El flujo total que sale de la región Ω es por tanto:

$$\Sigma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}\, dx\, dy$$

Pero también podemos escribir el valor del flujo saliente utilizando la expresión del flujo normal en el borde:

$$\Sigma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \cdot dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\, ds$$

Este es el Teorema de la Divergencia de Gauss, que permite expresar la integración extendida a un dominio 2D, como una integración curvilínea extendida al borde de dicho dominio (***n** es normal exterior, la curva se recorre en sentido antihorario).*

Ecuación constitutiva. Relaciona la variable escalar de estado u(x,y), a menudo a través de su gradiente $\nabla u(x,y)$, con la vectorial de flujo $\bar{\sigma}$.

$$\bar{\sigma}(x,y) = -k(x,y)\cdot\nabla u(x,y) \quad \text{(caso 2D)}$$

siendo k(x,y) es un operador de transferencia que depende del medio físico considerado. Puede ser una matriz.

Ejemplos de modelos lineales:

(1D): Ley de Hooke: $\sigma = E\cdot\varepsilon$, σ: tensión, k=-E (mód. Elastic.), ε=du/dx, def. unit.

(2D): Ley de Fourier, conducción del calor (**q**: flujo de calor, T:temperatura)

Material anisotrópo:

(k: tensor de conductividad térmica)

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{bmatrix} = -K\cdot\nabla T$$

Material isotrópo:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{bmatrix} = -K\cdot\nabla T$$

(2D): Ley de Darcy, flujo en medio poroso (**q**: flujo de fluido, P: potencial hidráulico)

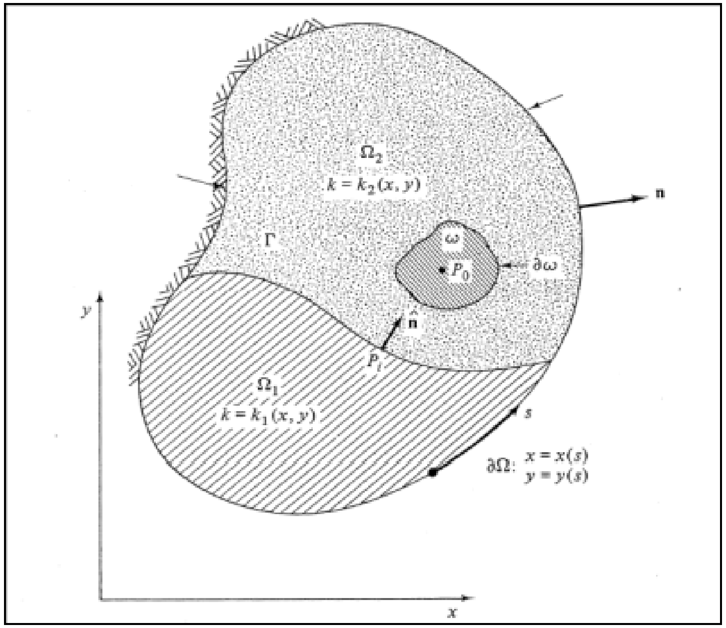
Material ortotrópo:

(k: tensor de permeabilidad)

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial P/\partial x \\ \partial P/\partial y \end{bmatrix} = -K\cdot\nabla P$$

Principio de conservación. Es una ley de equilibrio o balance: Para cualquier porción ω del dominio Ω, el flujo neto que atraviesa el borde de esa porción de dominio debe ser igual la cantidad total producida por las fuentes internas

Siendo f la fuente de flujo por unidad de área de la porción ω:



$$\int_{\partial\omega} \vec{\sigma}\cdot\vec{n}\, ds = \int_{\omega} f\, dx\, dy$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\int_{\omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\, dx\, dy = \int_{\omega} f\, dx\, dy$$

$$\int_{\omega} (\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} - f)\, dx\, dy = 0 \text{, para todo } \omega \subset \Omega$$

Puesto que ω es arbitrario, la forma local de la **ecuación de balance** es:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega}$$

Se puede ampliar el modelo añadiendo un término proporcional a la variable de estado u(x,y)

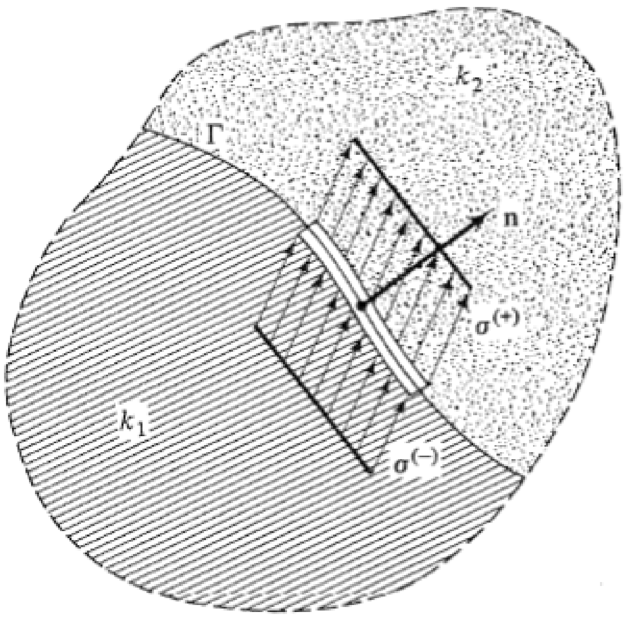
$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}(x, y) + b(x, y)u(x, y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega}$$

Ecuación constitutiva : $\bar{\sigma}$(x,y)= -k(x,y)·∇u(x,y) (2D). El balance se representa como una ecuación en derivadas parciales de 2º orden en u(x,y)

Considése una interfaz o zona de contacto $\Gamma(s)$ que separa dos materiales con diferentes módulos k_1 y k_2 en un mismo cuerpo.

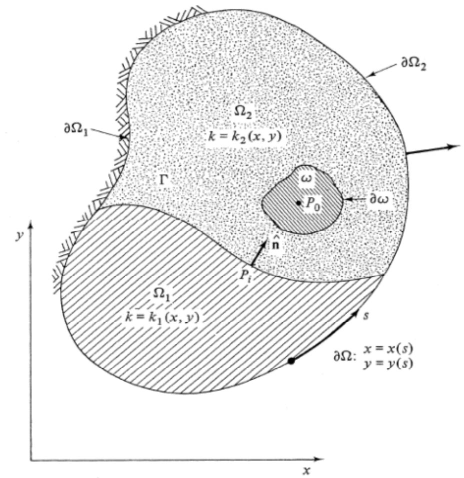
Tomando una banda delgada del cuerpo envolviendo esta interfaz la ley de balance toma la forma .

$$\Sigma = \int_{s_1}^{s_2} (-\vec{\sigma}^{(-)} \cdot \vec{n} + \vec{\sigma}^{(+)} \cdot \vec{n}) \cdot ds = 0$$



Que se ha de verificar para cualquier trozo de banda en torno a la curva de contacto $\Gamma(s)$. Luego el integrando debe ser nulo, es decir, el balance local en la interfaz se reduce a:

$$[\![\sigma_n(s)]\!] = \vec{\sigma}^{(+)}(s) \cdot \vec{n} - \vec{\sigma}^{(-)}(s) \cdot \vec{n} = 0 \ , \forall s \in \Gamma$$



- **En la parte $\partial\Omega_2$ del contorno** global de Ω aplicamos condiciones de borde '**naturales**'o de **Neumann**, que afectan al flujo normal en ese borde.

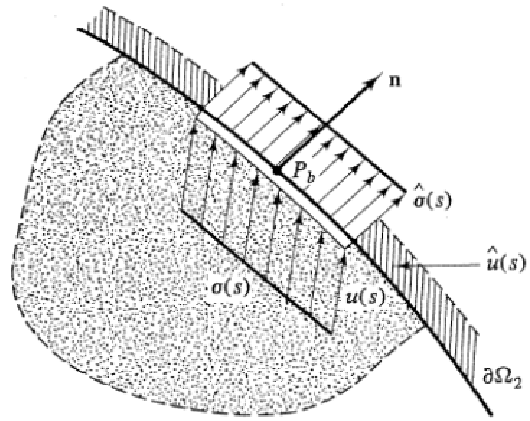
Podrán ser de 2 tipos:

. Flujo normal dado por una función conocida q(s)

$$\sigma_n(s) = \vec{\sigma}(s) \cdot \vec{n}(s) = q(s)$$

. Flujo en el borde dado por una relación que tiene en cuenta el valor de u(s) en el borde y en el 'exterior' û (s), con el factor p(s), estos últimos de valor conocido.

$$\sigma_n(s) = \vec{\sigma}(s) \cdot \vec{n}(s) = p(s) \cdot (u(s) - \hat{u}(s))$$



. Ambas se pueden sintetizar de la forma:

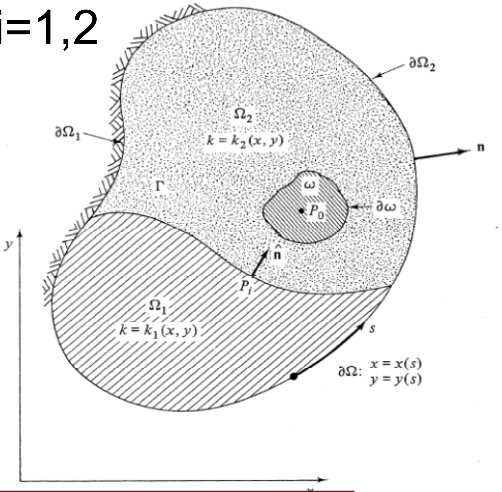
$$\sigma_n(s) = \vec{\sigma}(s) \cdot \vec{n}(s) = \alpha(s) \cdot u(s) + \beta(s)$$

con α(s), β(s) funciones conocidas , datos en el borde $\partial\Omega_2$

- **En la parte del contorno $\partial\Omega_1$** se aplicarán las condiciones de contorno '**esenciales**' o de **Dirichlet**, que fijan valores 'obligados' de la función escalar incógnita û(s): u(s)=û(s) , $s \in \partial\Omega_1$ siendo û(s) una función conocida

Los datos en un dominio Ω de borde $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, con dos subdominios Ω_1 y Ω_2:

- $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ contorno exterior y una interfaz Γ (Borde interno entre Ω_1 y Ω_2)
- La 'fuente' f=f(x,y) en Ω_i , i=1,2
- 'Parámetros' de material $k_i=k_i(x,y)$, $b_i=b_i(x,y)$, (x,y) en Ω_i , i=1,2
- Los datos para las condiciones de borde:
  . Esenciales : u(s)=û(s) , s$\in \partial\Omega_1$
  . Naturales: $\alpha(s)$, $\beta(s)$ en $\partial\Omega_2$,
  (o bien q(s) y/o p(s) y û(s), en $\partial\Omega_2$)



Con estos datos, calcular la función escalar *u(x,y)* en Ω (temperatura, potencial hidráulico,…) :

EDP:

$$-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)) + b(x,y)\cdot u(x,y) = f(x,y), \ (x,y)\in\Omega_i, i=1,2$$

Naturales:

$$-k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n} = p(s)\cdot(u(s)-\hat{u}(s)), \ s\in\partial\Omega_2$$

$$-k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n} = q(s) \ , \ s\in\partial\Omega_2$$

Condiciones globales de contorno

$$\text{o en síntesis :} \quad -k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n} = \alpha(s)\cdot u(s) + \beta(s), \ s\in\partial\Omega_2 \quad \alpha(s) \text{ y } \beta(s) \text{ conocidas}$$

Esenciales : u(s)=û(s) , s$\in\partial\Omega_1$

Conservación flujo normal interfaz Γ

$$[[\, k(s)\cdot\vec{\nabla}u(s)\cdot\vec{n}(s)]] = 0 \ , s\in\Gamma$$

. El caso especial en que *b=0* y sólo se aplican condiciones naturales de borde del tipo

$$- k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n} = \hat{\sigma}_n(s) \ dada \ , \ \ s \in \partial\Omega_2$$

y sucede que $\partial\Omega_2$ coincide con $\partial\Omega$, precisa de atención especial:

- La solución *u(x,y)* se puede determinar salvo una constante

- Para que exista *u*, se ha de satisfacer la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} f(x,y)\cdot dx\cdot dy = \int_{\partial\Omega} \hat{\sigma}_n \cdot ds$$

El problema Variacional: FORMA DÉBIL

. Llamaremos 'Residuo', R(x,y) *, a la parte de la ecuación diferencial que se iguala a cero:*

$$R(x,y)= -\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y))+b(x,y)\cdot u(x,y)-f(x,y),\ \ (x,y)\in\Omega$$

(recuérdese que la solución del problema verifica R(x,y)=0)

. Formulación débil: Se trata de obtener una ecuación (integral) con la misma solución que la ED, mediante integración en el dominio Ω del producto de R(x,y) por una función 'de peso' w(x,y) adecuadamente elegida de modo que sea integrable R(x,y)·w(x,y) y obligando a que sea cero el promedio integral con peso que resulta (de momento se distinguirán en Ω las zonas Ω_1 y Ω_2):

$$\int_\Omega w(x,y)\cdot R(x,y)\,d\Omega=0$$

$$\int_{\Omega_1} w(x,y)\cdot[-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u))+b(x,y)\cdot u(x,y)-f(x,y)]\,d\Omega+\int_{\Omega_2} w(x,y)\cdot[-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u))+b(x,y)\cdot u(x,y)-f(x,y)]\,d\Omega=0$$

Está claro que la solución exacta verifica esta ecuación siempre que w(x,y) sea suficientemente 'suave' como para que la integración tenga sentido.

. Para aplicar el método, se introduce una solución aproximada $u_{ap}(x)$ combinación de funciones base $B_i(x)$, que cumple la ecuación en el límite al crecer el número de funciones base de modo que se garantice la aproximación a la solución exacta u(x,y).

$$u_{ap}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{nB} c_i\cdot B_i(\mathbf{x})$$

¿Qué tipo de propiedades se exigen a la función w(x,y)?

. La función de peso w(x,y) hace un efecto de penalización para que el residuo sea pequeño cuando se introduzca una aproximación de u(x,y) (el residuo es cero en la solución exacta).

. En el problema , en la zona del borde $\partial\Omega_1$ se ha convenido que se conoce la solución u(x,y) - condiciones esenciales de contorno- y que la solución $u_{ap}(x,y)$ las verificará exactamente. Para esa 'zona' del dominio no se hace necesario utilizar penalización sobre u(x,y) ni sobre $u_{ap}(x,y)$, y por ello se exigirá que las funciones w(x,y) se anulen en esa zona del contorno.

. Por otra parte, se verá que introduciendo propiedades integrales en la expresión de la integral del residuo ponderado, ésta se transformará en otra expresión en que aparecen las derivadas primeras de w(x,y). Por ello exigiremos las funciones w(x,y) una estructura suave para que sea correcto realizar integraciones de expresiones en que aparecen sus derivadas primeras. Las transformaciones integrales producirán asimismo expresiones en que aparecen las derivadas primeras de u(x,y), en lugar de las segundas que aparecen en la ecuación diferencial.

$$\int_{\Omega_1} w(x,y)\cdot[-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u)+b(x,y)\cdot u(x,y)-f(x,y)]d\Omega+\int_{\Omega_2} w(x,y)\cdot[-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u)+b(x,y)\cdot u(x,y)-f(x,y)]d\Omega=0$$

Continuamos buscando una expresión equivalente en que aparezcan derivadas de menor orden de u(x,y) , que de partida son de orden 2. Compruébese que:

$\nabla\cdot(w\cdot(k\nabla u))=\nabla w\cdot(k\nabla u)+w\cdot\nabla\cdot(k\nabla u)$, $\quad -w\cdot\nabla\cdot(k\nabla u)=\nabla w\cdot(k\nabla u)-\nabla\cdot[w\cdot(k\nabla u)]$, luego:

$$\int_{\Omega_1}[\vec{\nabla}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)-w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega+$$
$$+\int_{\Omega_2}[\vec{\nabla}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)-w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega-$$
$$-\int_{\Omega_1}\vec{\nabla}\cdot[w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)]\cdot d\Omega-\int_{\Omega_2}\vec{\nabla}\cdot[w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)]\cdot d\Omega=0$$

Por el teorema de la Divergencia

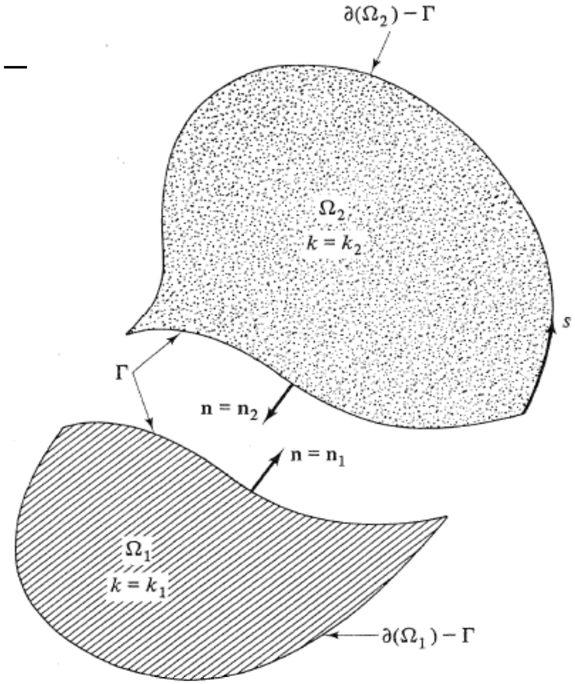
$$\int_A\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\,d\Omega=\int_{\partial A}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\,ds \quad . \qquad \textit{Llamando } \vec{\sigma}=w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u:$$

$$\int_A\vec{\nabla}\cdot[w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u]\,d\Omega=\int_{\partial A}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u\cdot\vec{n}\,ds=\int_{\partial A}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

los 2 últimos términos, siendo $\partial(\Omega_1)$ y $\partial(\Omega_2)$ los contornos de los subdominios Ω_1 y Ω_2:

$$-\int_{\partial(\Omega_1)}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds-\int_{\partial(\Omega_2)}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds$$

$$\int_{\Omega_1} [\vec{\nabla} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \vec{\nabla} u(x,y) + w(x,y) \cdot b(x,y) \cdot u(x,y) - w(x,y) \cdot f(x,y)] \cdot d\Omega +$$
$$\int_{\Omega_2} [\vec{\nabla} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \vec{\nabla} u(x,y) + w(x,y) \cdot b(x,y) \cdot u(x,y) - w(x,y) \cdot f(x,y)] \cdot d\Omega -$$
$$- \int_{\partial(\Omega_1)} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds - \int_{\partial(\Omega_2)} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds = 0$$

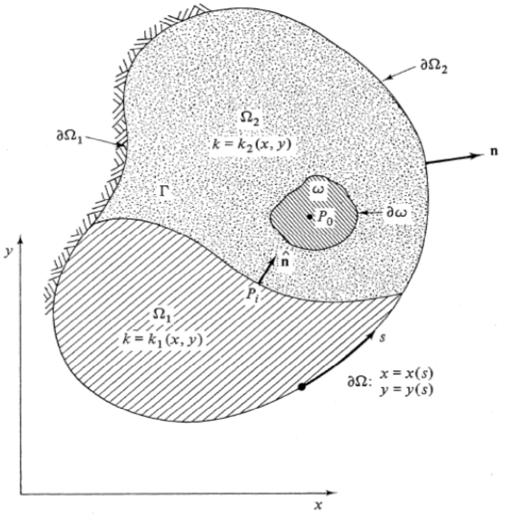


Podemos separar la integración sobre Γ, interfaz interior entre Ω_1 y Ω_2, en los dos últimos términos:

$$- \int_{\partial(\Omega_1)} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds - \int_{\partial(\Omega_2)} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds =$$
$$= - \int_{\partial(\Omega_1)\text{-}\Gamma} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds - \int_{\partial(\Omega_2)\text{-}\Gamma} w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds +$$
$$+ \int_{\Gamma \in \Omega_1} - [w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}]_{\Omega_1} \cdot ds + \int_{\Gamma \in \Omega_2} - [w(x,y) \cdot k(x,y) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}]_{\Omega_2} \cdot ds$$

Pero al recorrer el borde (curva Γ) desde cada subdominio Ω_1 y Ω_2, las normales n_1 y n_2 son iguales en dirección y opuestas en sentido, luego la suma de los 2 últimos términos, es CERO (es como el equilibrio de flujo normal en la interfaz de los subdominios).

$$\int_{\Omega_1}[\vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla} u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)-w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega+$$
$$\int_{\Omega_2}[\vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla} u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)-w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega-$$
$$-\int_{\partial(\Omega_1)-\Gamma} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds-\int_{\partial(\Omega_2)-\Gamma} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds=0$$



De modo que resumidamente, la forma débil, puesto que $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2$ y la unión de $\partial(\Omega_1)-\Gamma$ y $\partial(\Omega_2)-\Gamma$ conforma el contorno $\partial\Omega$ de Ω:

$$\int_{\Omega}[\vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla} u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)-w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega-\int_{\partial\Omega} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds=0$$

Se comprende que se llega a la misma forma débil en el caso en que Ω se componga de más subdominios con parámetros materiales distintos.

. La función de peso w(x,y) se anula en $\partial\Omega_1$, zona de contorno con u conocido (c. esenciales), así que la integral curvilínea se anula en $\partial\Omega_1$. Luego se puede escribir la forma débil:

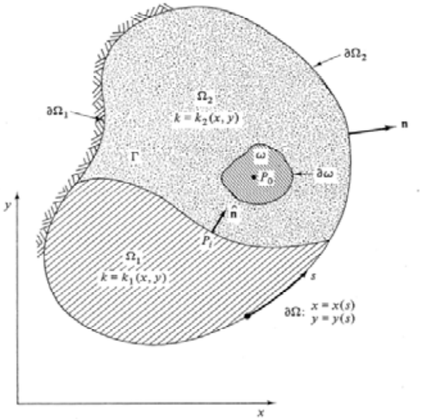
$$\boxed{\int_{\Omega}[\vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\vec{\nabla} u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)-w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega-\int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds=0}$$

$$\int_{\Omega} [\vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot \vec{\nabla} u(x,y) + w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y) - w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot \frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds = 0$$

. Sustituyendo la siguiente condición de contorno 'natural' de síntesis:

$$-k(s)\cdot \frac{\partial u(s)}{\partial n} = \alpha(s)\cdot u(s) + \beta(s),\ s \in \Omega_2 \quad ,\alpha(s), \beta(s)\ conocidas$$

$$\int_{\Omega} [\ \vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\ \vec{\nabla} u(x,y) + w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y) - w(x,y)\cdot f(x,y)]\cdot d\Omega +$$
$$+ \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot[\alpha(s)\cdot u(s) + \beta(s)]\cdot ds = 0$$



Finalmente, ubicando a la izquierda los términos con 'u', la 'formulación débil' queda:

$$\int_{\Omega} [\ \vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot\ \vec{\nabla} u(x,y) + w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)]\cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot \alpha(s)\cdot u(s)\cdot ds =$$
$$= \int_{\Omega} w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot \beta(s)\cdot ds$$

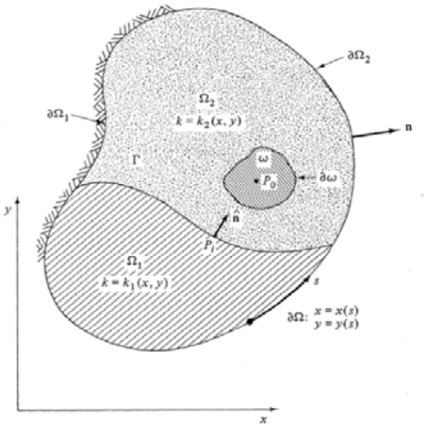
Espacio de funciones admisibles $H^1(\Omega)$

La 'forma débil' de la formulación queda, para todas las funciones de peso w(x,y) admisibles tales que w(x,y)=0 en $\partial\Omega_1$

$$\int_\Omega [\ \vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot \vec{\nabla} u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)]\cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot \alpha(s)\cdot u(s)\cdot ds =$$
$$= \int_\Omega w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot \beta(s)\cdot ds$$

¿Cuál es la clase de funciones admisibles?
Las que verifican:

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + w^2 \right] dxdy < \infty$$



- Denotamos este espacio de funciones $H^1(\Omega)$ indicando:
. 1 expresa que las primeras derivadas son de cuadrado integrable
. Ω indica el dominio sobre el que estas funciones están definidas.

- Buscaremos la solución u(x,y) también en este espacio.

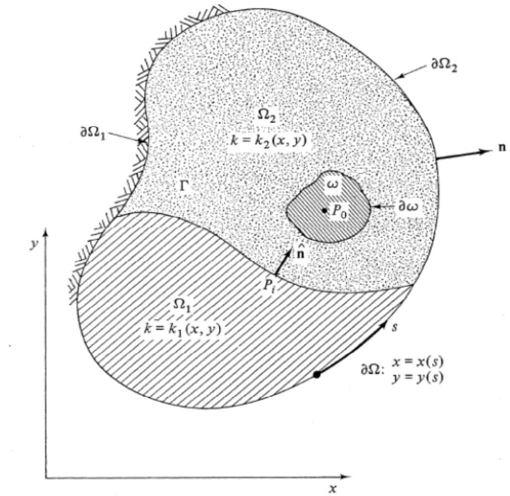
Resumen de la formulación débil del problema

* Encontrar una función u(x,y) $\in H^1(\Omega)$ tal que u(s)= û(s), s $\in \partial\Omega_1$ y que verifique lo siguiente, para todas las funciones admisibles w(x,y) , tales que w(x,y)=0 en $\partial\Omega_1$:

$$\int_\Omega [\,\vec{\nabla} w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot \vec{\nabla} u(x,y)+w(x,y)\cdot b(x,y)\cdot u(x,y)]\cdot d\Omega+\int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot\alpha(s)\cdot u(s)\cdot ds =$$

$$=\int_\Omega w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega-\int_{\partial\Omega_2} w(x,y)\cdot\beta(s)\cdot ds$$

** Se puede repetir la anterior formulación débil utilizando notación matricial del siguiente modo, lo que es adecuado para la implementación del método de los Elementos Finitos (FE, FEM)



* Encontrar u(x,y) $\in H^1(\Omega)$ tal que u(s)= û(s), s$\in\partial\Omega_1$ tal que para todo w(x,y)$\in H^1(\Omega)$, con w(x,y)=0 en $\partial\Omega_1$, se cumpla:

$$\int_\Omega [\underbrace{(\vec{\nabla} w)^T}_{1x2}\cdot\underbrace{k(x,y)}_{1x1}\cdot\underbrace{\vec{\nabla} u}_{2x1}+\underbrace{w(x,y)}_{1x1}\cdot\underbrace{b(x,y)}_{1x1}\cdot\underbrace{u(x,y)}_{1x1}]\cdot d\Omega+\int_{\Omega_2}\underbrace{w(s)}_{1x1}\cdot\underbrace{\alpha(s)}_{1x1}\cdot\underbrace{u(s)}_{1x1}\cdot ds =$$

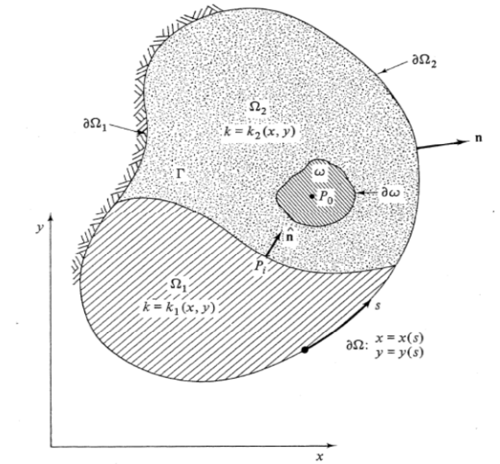
$$=\int_\Omega \underbrace{w(x,y)}_{1x1}\cdot\underbrace{f(x,y)}_{1x1}\cdot d\Omega-\int_{\Omega_2}\underbrace{w(s)}_{1x1}\cdot\underbrace{\beta(s)}_{1x1}]\cdot ds$$

* Encontrar $u(x,y) \in H^1(\Omega)$ tal que $u(s)= \hat{u}(s)$, $s \in \partial\Omega_1$ tal que $\forall w(x,y) \in H^1(\Omega)$, con $w(x,y)=0$ en $\partial\Omega_1$, se cumpla:

$$\int_\Omega [\underbrace{(\vec{\nabla} w)^T}_{1x2} \cdot \underbrace{k(x,y)}_{1x1} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u}_{2x1} + \underbrace{w(x,y)}_{1x1} \cdot \underbrace{b(x,y)}_{1x1} \cdot \underbrace{u(x,y)}_{1x1}] \cdot d\Omega + \int_{\Omega_2} \underbrace{w(s)}_{1x1} \cdot \underbrace{\alpha(s)}_{1x1} \cdot \underbrace{u(s)}_{1x1} \cdot ds =$$
$$= \int_\Omega \underbrace{w(x,y)}_{1x1} \cdot \underbrace{f(x,y)}_{1x1} \cdot d\Omega - \int_{\Omega_2} \underbrace{w(s)}_{1x1} \cdot \underbrace{\beta(s)}_{1x1}] \cdot ds$$

El operador gradiente se usa aquí como un vector columna:

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \vec{\nabla} u = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (\vec{\nabla} w)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$



Se intercambiarán las 2 notaciones y se entenderá en cada caso según el contexto.

Apéndices

Se añaden algunas diapositivas relacionadas con:

. Antecedentes matemáticos

. Prueba de equivalencia entre las formulaciones fuerte y débil

. Ejemplos en que se deduce la forma débil en problemas de contorno en 2 dimensiones

. Incluyendo anisotropía (con la ley de Fourier generalizada), etc.

Consideremos el siguiente problema de contorno :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{q}(x,y)=f(x,y), \qquad \forall(x,y)\in\Omega$$

(Notación para el dominio Ω y su contorno $\partial\Omega$: $\partial\Omega\equiv\Gamma$, $\partial\Omega_1\equiv\Gamma_u$, $\partial\Omega_2\equiv\Gamma_q$)

$$donde\ \vec{q}=-k\cdot\vec{\nabla}u, \qquad -k(s)\cdot\frac{\partial u(s)}{\partial n}\equiv\vec{q}\bullet\vec{n}=\overline{q}\ \ sobre\ \Gamma_q,\ y\ \ u=\overline{u}\ \ sobre\ \Gamma_u\ \ ,siendo\ \ \Gamma_q\cup\Gamma_u=\Gamma\ (\equiv\partial\Omega)$$

Formulación débil: Encontrar $u(x,y)\in H^1(\Omega)$: $\forall w(x,y)\in H^1(\Omega)$, con $w(x,y)=0$ sobre Γ_u:

$$\int_\Omega \vec{\nabla}w(x,y)\cdot k(x,y)\cdot \vec{\nabla}u(x,y)\cdot d\Omega+\int_{\Gamma_q} w(x,y)\cdot\overline{q}(s)\cdot ds=\int_\Omega w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega$$

Es decir:

$$\int_\Omega \vec{\nabla}w(x,y)\cdot\vec{q}(x,y)\cdot d\Omega+\int_\Omega w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega=\int_{\Gamma_q} w(x,y)\cdot\overline{q}(s)\cdot ds$$

Se trata de demostrar que esta 'formulación débil' es equivalente a la 'fuerte' (es decir, recuperar: EDP + Condiciones de Contorno naturales (afectan a derivadas))

Equivalencia entre formulaciones débil y fuerte

$$\boxed{\int_{\Omega} \vec{\nabla} w(x,y)\cdot\vec{q}(x,y)\cdot d\Omega + \int_{\Omega} w(x,y)\cdot f(x,y)\cdot d\Omega = \int_{\Gamma_q} w(x,y)\cdot\overline{q}(s)\cdot ds}$$

Recordando, $\vec{\nabla}(w\cdot\vec{q}) = w(\vec{\nabla}\bullet\vec{q}) + \vec{\nabla} w\bullet\vec{q} \Rightarrow \int_{\Omega}\vec{\nabla} w\bullet\vec{q}\, d\Omega = \int_{\Omega}\vec{\nabla}(w\cdot\vec{q})\, d\Omega - \int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q})\, d\Omega$

Aplicando el teorema de la divergencia: $\int_A \vec{\nabla}\bullet\vec{V}\cdot dA = \int_{\partial A}\vec{V}\bullet\vec{n}\, ds \Rightarrow \int_{\Omega}\vec{\nabla}\bullet(w\cdot\vec{q})d\Omega = \int_{\Gamma} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\cdot ds$

Resulta el teorema de Green (generaliza integración por partes 1D)

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla} w\bullet\vec{q}\, d\Omega = \int_{\Gamma} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\, ds - \int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q})\cdot d\Omega$$

Quedando la forma débil: $\int_{\Gamma} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\, ds - \int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q})\cdot d\Omega + \int_{\Omega} w\cdot f\cdot d\Omega = \int_{\Gamma_q} w\cdot\overline{q}\cdot ds \Rightarrow$

$$\int_{\Gamma_u} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\, ds + \int_{\Gamma_q} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\, ds - \int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q} - f)\cdot d\Omega - \int_{\Gamma_q} w\cdot\overline{q}\cdot ds = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{\Gamma_q} w\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n} - \overline{q})\cdot ds + \int_{\Gamma_u} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\cdot ds - \int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q} - f)\cdot d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)\; con\;\; w = 0\;\; sobre\;\; \Gamma_u}$$

Equivalencia entre formulaciones débil y fuerte

$$\int_{\Gamma_q} w \cdot (\vec{q} \bullet \vec{n} - \overline{q}) \cdot ds + \int_{\Gamma_u} w \cdot \vec{q} \bullet \vec{n} \cdot ds - \int_{\Omega} w \cdot (\vec{\nabla} \bullet \vec{q} - f) \cdot d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)\, con \;\; w = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma_u$$

Deduzcamos primero la EDP, Tomemos w como sigue:

w=φ*(x)·(*$\vec{\nabla} \bullet \vec{q}$ - f) , *con* φ*=0 sobre Γ y* φ*>0 sobre Ω*

La ecuación de la ‘formulación débil’ queda entonces:

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot (\vec{\nabla} \bullet \vec{q} - f)^2 d\Omega = 0 \;\Rightarrow \vec{\nabla} \bullet \vec{q} - f = 0 \;\; en \;\; \Omega$$

Es decir, se verifica la ecuación diferencial.

$$\boxed{\int_{\Gamma_q} w\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n} - \overline{q})\cdot ds + \int_{\Gamma_u} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\cdot ds - \int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q} - f)\cdot d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)\, con \;\; w = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma_u}$$

Puesto que se verifica la EDP , $\boxed{\vec{\nabla}\bullet\vec{q} - f = 0}$

la formulación débil se puede escribir (*):

$$\int_{\Gamma_q} w\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n} - \overline{q})\, ds + \int_{\Gamma_u} w\cdot\vec{q}\bullet\vec{n}\, ds = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)\, con \;\; w = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma_u$$

. Deduzcamos la condición de contorno natural. Tomemos w como sigue:

$$w = \zeta(x)\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n} - \overline{q}) \;, con \;\; \zeta = 0 \;\; sobre\, \Gamma_u \;\; y \;\; \zeta > 0 \;\; sobre \;\; \Gamma_q$$

. Sustituyendo en la expresión (*) anterior resulta entonces:

$$\int_{\Gamma_q} \zeta\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n} - \overline{q})^2\cdot ds = 0 \Rightarrow \; \vec{q}\bullet\vec{n} - \overline{q} = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma_q$$

. En general, el flujo **q** y el gradiente de una función escalar u (temperatura, potencial hidráulico) están relacionados mediante la ley generalizada de Fourier (anisotrópica):

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathrm{k}_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = -\underbrace{D}_{2x2\,mat\,conduc} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u}_{2x1}$$

. Para medios isotrópicos:

$$[D] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \underbrace{[I]}_{\text{2x2 matriz identidad}}$$

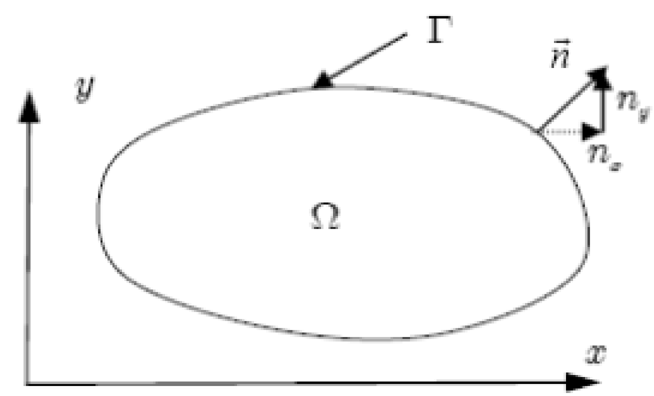
. Para un problema de contorno (BVP) 2D con flujo dado $\bar{q}$ sobre el borde o contorno Γ_q, así como un valor $\bar{u}$ para u sobre una parte del borde Γ_u y un término 'fuente' f, se deduce que la formulación débil en notación matricial es:

Encontrar u(x,y)$\in$H$_1$(Ω), con w=0 sobre Γ_u tal que:

$$\boxed{\int_\Omega \underbrace{(\vec{\nabla} w)^T}_{1x2} \cdot \underbrace{D}_{2x2} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u}_{2x1} \cdot d\Omega = -\int_{\Gamma_q} \underbrace{w}_{1x1} \cdot \underbrace{\bar{q}}_{1x1} \cdot ds + \int_\Omega \underbrace{w}_{1x1} \cdot \underbrace{f}_{1x1} \cdot d\Omega}$$

Si $\vec{q}(x,y) \in C^0$ es integrable,

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}\, d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{q} \cdot \vec{n}\, ds$$



. Observar que:

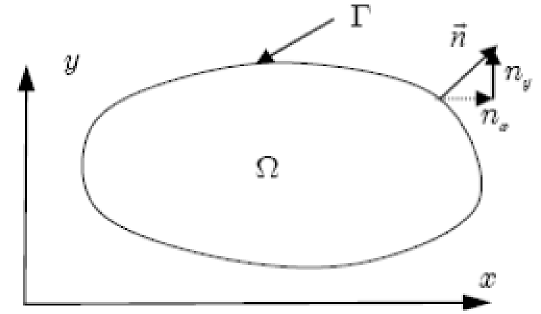
$$\vec{\nabla} \bullet \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

. Podemos escribir el teorema de la divergencia así:

$$\boxed{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} (q_x \cdot n_x + q_y \cdot n_y) \cdot ds}$$

. El teorema de Green

$$\int_{\Omega} w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q})\cdot d\Omega = \int_{\Gamma} w\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n})\cdot ds - \int_{\Omega}\vec{\nabla}w\bullet\vec{q}\cdot d\Omega$$



. Para demostrarlo, compruébese que:

$$\vec{\nabla}\bullet(w\cdot\vec{q}) = w(\vec{\nabla}\bullet\vec{q}) + \vec{\nabla}w\bullet\vec{q} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\bullet(w\cdot\vec{q}) = \frac{\partial}{\partial x}(w\cdot q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(w\cdot q_y) = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot q_x + w\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\cdot q_y + w\frac{\partial q_y}{\partial y} = w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q}) + (\vec{\nabla}w)\bullet\vec{q}$$

Esto junto al teorema de la divergencia produce el teorema de Green:

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla}\bullet\vec{v}\,d\Omega = \int_{\Gamma}\vec{v}\bullet\vec{n}\cdot ds$$

$$\int_{\Omega}\mathrm{w}\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q})\cdot d\Omega = \int_{\Omega}\vec{\nabla}\bullet(\mathrm{w}\cdot\vec{q})\cdot d\Omega - \int_{\Omega}\vec{\nabla}w\bullet\vec{q}\cdot d\Omega = \int_{\Gamma} w\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n})\cdot ds - \int_{\Omega}\vec{\nabla}w\bullet\vec{q}\cdot d\Omega$$

Tiene analogía con la integración por partes en 1D:

$$\int_a^b u\cdot\frac{dv}{dx}\cdot dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b v\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx$$

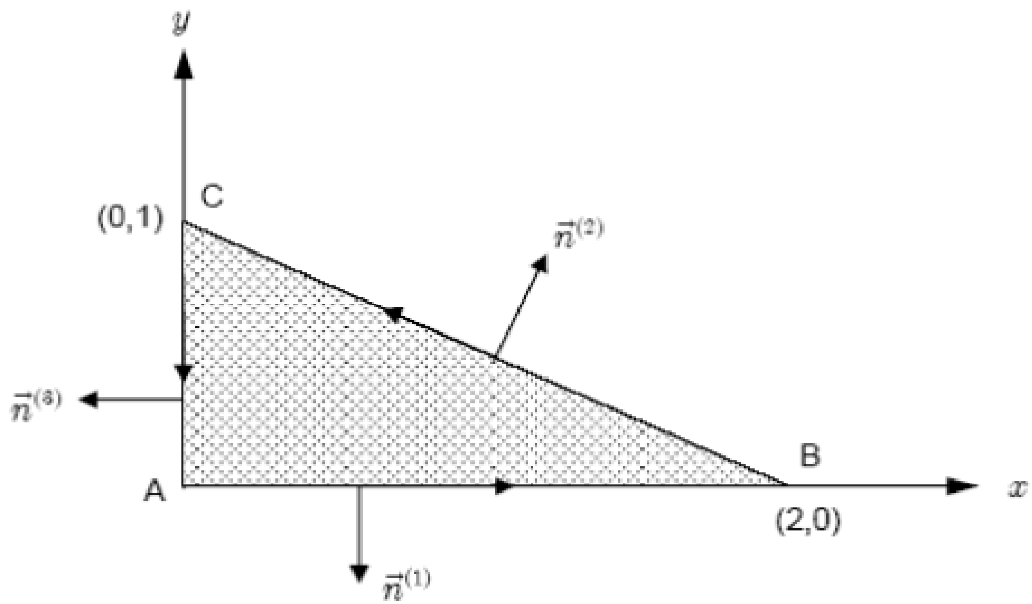
Consideremos la función vectorial: $\vec{q}=(q_x, q_y) = (3x^2y + y^3, 3x + y^3)$ definida en el dominio triangular de la figura

Comprobar la validez del teorema de la divergencia,

Recordando el teorema de la divergencia : $\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, d\Omega = \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds$

Hay que comprobar que:

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \, d\Omega = \int_\Gamma \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$$



De $\vec{q}=(q_x, q_y) = (3x^2y + y^3,\ 3x + y^3)$ calculamos su divergencia:

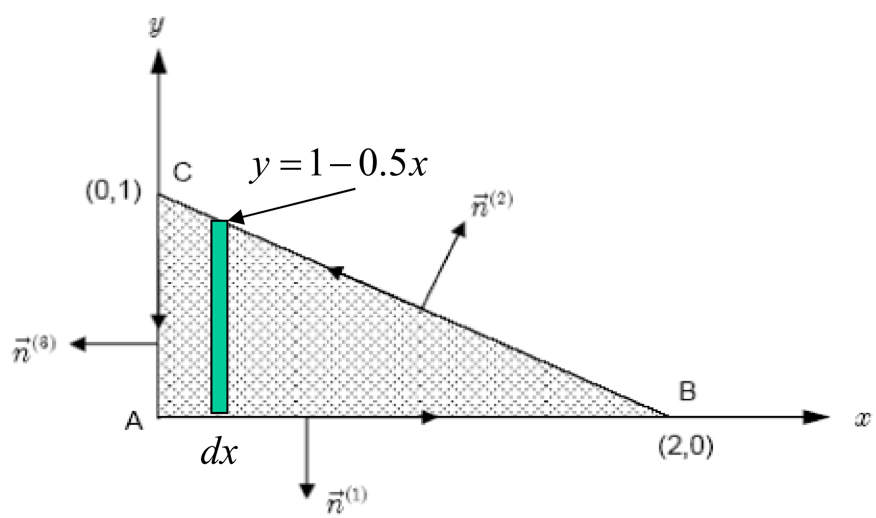
$$\vec{\nabla}\bullet\vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = (6xy) + (3y^2) = 6xy + 3y^2$$

Utilizando esto, calculamos $\int_{\Omega} \vec{\nabla}\bullet\vec{q}\,d\Omega$:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}\bullet\vec{q}\,d\Omega = \int_0^2 \int_0^{1-0.5x} (6xy + 3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 [3x(1-0.5x)^2 + (1-0.5x)^3]\,dx = 1.5$$

Por otra parte hemos de calcular el segundo miembro de:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{q}\,d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\Gamma$$



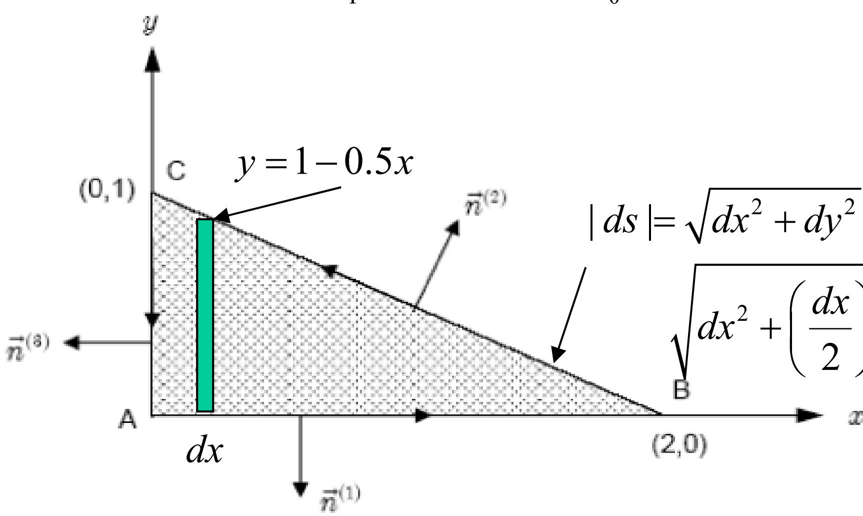
Recorriendo el contorno (normal exterior):

$$\int_{\Gamma} \vec{q} \bullet \vec{n} d\Gamma = \int_{AB} \vec{q} \bullet \overrightarrow{\underbrace{n}_{(0,-1)}} \underbrace{d\Gamma}_{dx} + \int_{BC} \vec{q} \bullet \overrightarrow{\underbrace{n}_{\frac{\sqrt{5}}{5}(1,2)}} \underbrace{d\Gamma}_{-\frac{\sqrt{5}}{2}dx} + \int_{CA} \vec{q} \bullet \overrightarrow{\underbrace{n}_{(-1,0)}} \underbrace{d\Gamma}_{-dy}$$

Observar que sobre el segmento BC: $ds = -\frac{\sqrt{5}}{2} dx$ y $\vec{n}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}(1,2)$. Así:

$$\int_{\Gamma} \vec{q} \bullet \vec{n} d\Gamma = \int_0^2 -(3x + \underbrace{y^3}_{0}) dx + \int_2^0 \frac{\sqrt{5}}{5} \left[(3x^2 \underbrace{y}_{1-0.5x} + y^3) + 2(3x + y^3) \right] (-\frac{\sqrt{5}}{2} dx) + \int_1^0 (-3 \underbrace{x^2}_{0} y - y^3)(-dy) \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \vec{q} \bullet \vec{n} d\Gamma = -6 + \int_0^2 \frac{1}{2} \left[(3x^2(1-0.5x) + (1-0.5x)^3) + 2(3x + (1-0.5x)^3) \right] dx - 0.25 \Rightarrow$$



$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{dx}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} |dx|$$

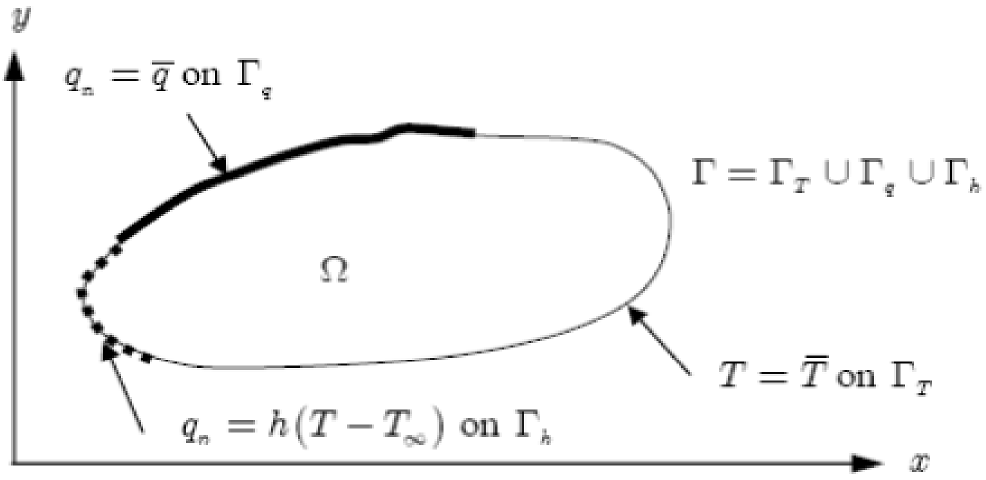
$$\int_{\Gamma} \vec{q} \bullet \vec{n} d\Gamma = -6 + 7.75 - 0.25$$

$$\int_{\Gamma} \vec{q} \bullet \vec{n} d\Gamma = -6 + 7.75 - 0.25 = 1.5 \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \bullet \vec{q} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{q} \bullet \vec{n} d\Gamma$$

Consideremos la conducción del calor en el domino de la figura, con las condiciones de contorno que se indican. Se trata de deducir la formulación débil completa del problema.

$$-\vec{\nabla}\bullet(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}T(x,y)) = f(x,y)$$



Se empieza multiplicando el residuo por la función de peso w e integrando sobre el dominio Ω

$$\boxed{R(x,y) = -\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}T(x,y)) - f(x,y)}$$

Para toda función w(x,y) suficientemente suave que se anule en Γ_T (condiciones esenciales) se ha de verificar:

$$\int_\Omega w(x,y)\cdot[-\vec{\nabla}\bullet(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}T(x,y)) - f(x,y)]d\Omega = 0$$

Ejemplo: Deducción de la formulación débil

$$\int_\Omega w(x,y)\cdot[\,-\vec{\nabla}\bullet(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}T(x,y))\text{-}\,f(x,y)]d\Omega = 0$$

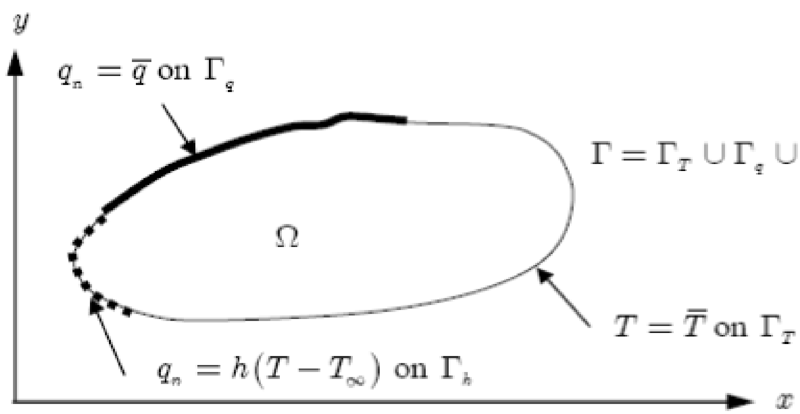
Aplicando el teorema de Green: $\int_\Omega w\cdot(\vec{\nabla}\bullet\vec{q})\cdot d\Omega = \int_\Gamma w\cdot(\vec{q}\bullet\vec{n})\cdot ds - \int_\Omega \vec{\nabla}w\bullet\vec{q}\cdot d\Omega \quad con \;\; \vec{q} = -k\cdot\vec{\nabla}T$

$$\int_\Omega w\cdot(\vec{\nabla}\bullet(-k\vec{\nabla}T)\cdot d\Omega = \int_\Gamma w\cdot(-k\vec{\nabla}T)\bullet\vec{n})\cdot ds - \int_\Omega \vec{\nabla}w\bullet(-k\vec{\nabla}T)\cdot d\Omega$$

Recordando que w se anula en Γ_T

$$\int_{\Gamma_q+\Gamma_h} w\cdot(-k\cdot\vec{\nabla}T\bullet\vec{n})\cdot ds - \int_\Omega (\vec{\nabla}\mathrm{w}\bullet(-k\cdot\vec{\nabla}T)\text{ - }w\cdot f)\cdot d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega [\vec{\nabla}w\bullet(k\cdot\vec{\nabla}T)\text{-}w\cdot f]\cdot d\Omega - \int_{\Gamma_q+\Gamma_h} w\cdot(k\cdot\frac{\partial T}{\partial n})\cdot ds = 0,\;\; \forall w\in H^1(\Omega)\;\;,\;\; con\;\; w=0\;\; en\;\; \Gamma_T$$



El término de integración en el contorno se puede concretar más:

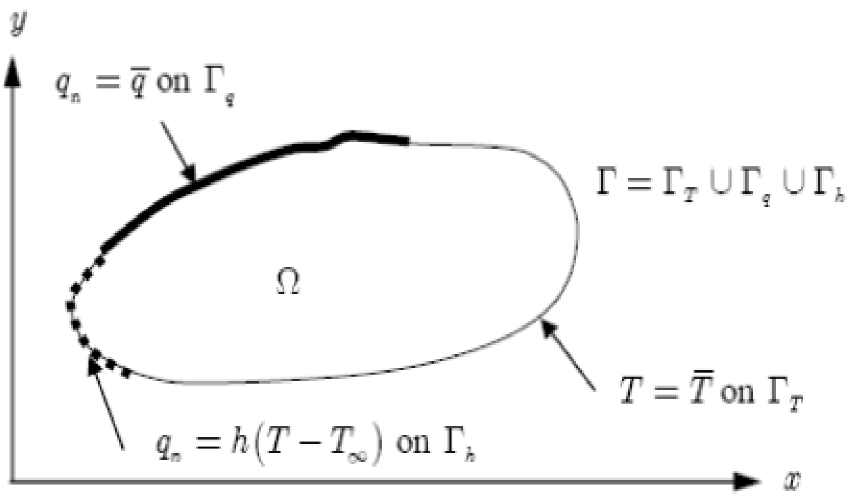
$$\int_{\Gamma_q+\Gamma_h} w\cdot(k\cdot\frac{\partial T}{\partial n})\cdot ds = \int_{\Gamma_q} w\cdot(-\bar{q})\cdot ds + \int_{\Gamma_h} w\cdot(\text{-}h\cdot(T\text{-}T_\infty))\cdot ds = -\int_{\Gamma_q} w\cdot\bar{q}\cdot ds - \int_{\Gamma_h} w\cdot h\cdot T\cdot ds + \int_{\Gamma_h} w\cdot h\cdot T_\infty\cdot ds$$

$$\int_{\Omega} [\vec{\nabla} w \bullet (k \cdot \vec{\nabla} T) - w \cdot f] \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_q + \Gamma_h} w \cdot (k \cdot \frac{\partial T}{\partial n}) \cdot ds = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega) \;\; , \;\; con \;\; w = 0 \;\; en \;\; \Gamma_T$$

La formulación débil resulta: Encontrar T(x,y) $\in$ $H^1(\Omega)$,

con T= $\bar{T}$ sobre Γ_T , $\forall$ w(x,y) $\in$ $H^1(\Omega)$ con w=0 en Γ_T verificando:

$$\int_{\Omega} [\vec{\nabla} w \bullet (k \vec{\nabla} T) - w \cdot f] \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_h} w \cdot h \, T ds = -\int_{\Gamma_q} w \cdot \bar{q} \cdot ds + \int_{\Gamma_h} w \cdot h \cdot T_{\infty} \cdot ds$$



Se puede escribir también la forma débil en forma matricial, :

$$\int_{\Omega} \underbrace{(\vec{\nabla} w)^T}_{1x2} \cdot \underbrace{k}_{1x1} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} T}_{2x1} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_h} w \cdot h \, T ds =$$

$$= \int_{\Omega} \mathrm{w} \cdot \mathrm{f} \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_q} w \cdot \bar{q} \cdot ds + \int_{\Gamma_h} w \cdot h \cdot T_{\infty} \cdot ds$$

$$\forall w \in H^1(\Omega) \;,\; con \;\; w = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma_T$$