Introducción

Lección 00:
EDPs y algunos aspectos numéricos

Jaime Puig-Pey Echebeste

Preliminares matemáticos

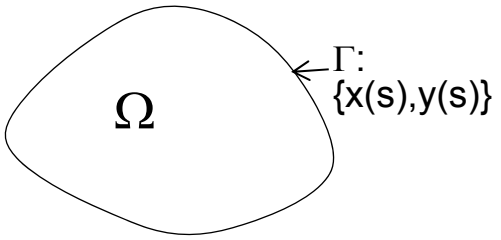
. Considérese un dominio $\bar{\Omega}$, 2D, con interior Ω y borde o contorno Γ

. El borde Γ se puede definir mediante ecuaciones paramétricas: x(s), y(s), siendo s la longitud de arco a lo largo de Γ. También lo denominaremos en ocasiones $\partial\Omega$.

. Una función f(x,y) en el borde se puede expresar: f(s)=f(x(s),y(s)), s indica el parámetro en la definición paramétrica de la curva de borde Γ ($\partial\Omega$)

. Utilizaremos una función escalar u(x,y) de 2 variables para representar algunos problemas de campo, que tendrá el papel de función incógnita (temperatura, potencial hidráulico,…).

. Supondremos que las funciones que utilicemos tienen las suficientes condiciones de 'suavidad' o continuidad para que sean válidas las operaciones a que se someten.



Conceptos previos

. Gradiente $\nabla u(x,y)$ de una función escalar $u(x,y)$:

Es un vector: $\nabla u(x,y) = (\partial u/\partial x) \cdot \mathbf{i} + (\partial u/\partial y) \cdot \mathbf{j}$,

($\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$ versores ejes cartesianos X e Y)

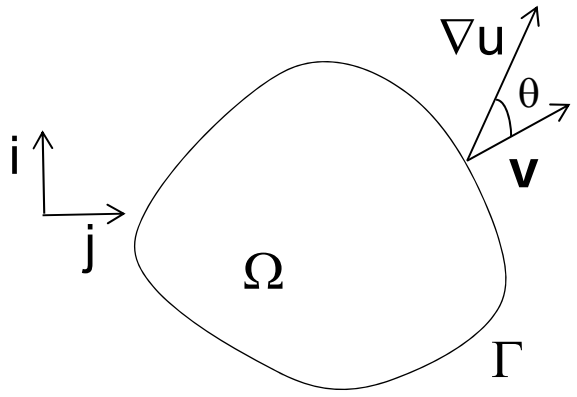
. Es frecuente utilizar el *operador gradiente* $\nabla(\ ) = (\partial/\partial x \cdot \mathbf{i} + \partial/\partial y \cdot \mathbf{j})(\ )$

. El gradiente marca la dirección de máximo crecimiento de u(x,y) al moverse desde el punto (x,y)

. La variación de u(x,y) en la dirección de un vector unitario ($|\mathbf{v}|=1$) $\mathbf{v}$= $\cos(\theta)\cdot\mathbf{i} + \text{sen}(\theta)\cdot\mathbf{j}$, ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ versores dirección X e Y), es la proyección del gradiente sobre $\mathbf{v}$ (producto escalar $\nabla u \cdot \mathbf{v}$). Se escribe:

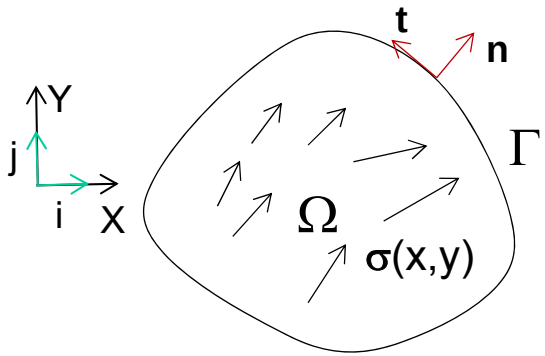
$d u/d\mathbf{v} = \partial u(x,y)/\partial \mathbf{v} = \nabla u(x,y) \cdot \mathbf{v} =$

$= \partial u(x,y)/\partial x \cdot \cos\theta + \partial u(x,y)/\partial y \cdot \text{sen}\theta$



Flujo

. Se llama flujo $\bar{\sigma}(x,y)$ a un vector que es función del punto (x,y), como el gradiente , y que en 2D tiene dos componentes y representa un campo vectorial (puede ser flujo de calor o de fluido por unidad de longitud (2D) o superficie (3D) y de tiempo,…)

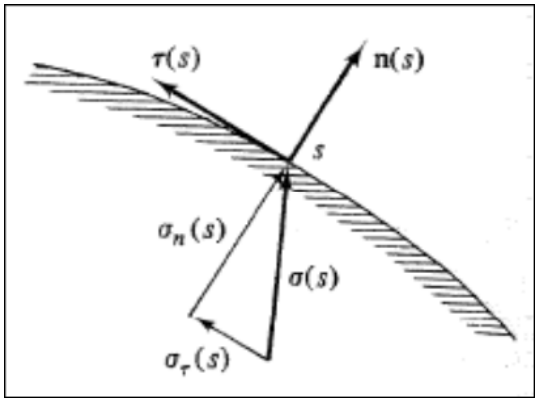


Visión del borde:

. El flujo en el borde $\bar{\sigma}(s) = \bar{\sigma}(x(s),y(s))$, se puede descomponer en las componentes:

. Normal : $\sigma_n(s) = \bar{\sigma}(s)\cdot \mathbf{n}(s)$ {(·) es producto escalar}

. Tangencial: $\sigma_t(s) = \bar{\sigma}(s)\cdot \mathbf{t}(s)$



Ecuación constitutiva. Relaciona la variable escalar de estado u(x,y), a menudo a través de su gradiente $\nabla u(x,y)$, con la vectorial de flujo $\bar{\sigma}$.

$$\bar{\sigma}(x,y) = -k(x,y)\cdot\nabla u(x,y) \quad \text{(caso 2D)}$$

siendo k(x,y) es un operador de transferencia que depende del medio físico considerado. Puede ser una matriz.

Ejemplos de modelos lineales:

(1D): Ley de Hooke: $\sigma = E\cdot\varepsilon$, σ: tensión, k=-E (mód. Elastic.), ε=du/dx, def. unit.

(2D): Ley de Fourier, conducción del calor (**q**: flujo de calor, T:temperatura)

Material anisotrópo:
(K: tensor de conductividad térmica)

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{bmatrix} = -K\cdot\nabla T$$

Material isotrópo:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{bmatrix} = -K\cdot\nabla T$$

(2D): Ley de Darcy, flujo en medio poroso (**q**: flujo de fluido, P: potencial hidráulico)

Material ortotrópo:
(K: tensor de permeabilidad)

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial P/\partial x \\ \partial P/\partial y \end{bmatrix} = -K\cdot\nabla P$$

Ejemplo 1: ecuación diferencial del flujo de calor

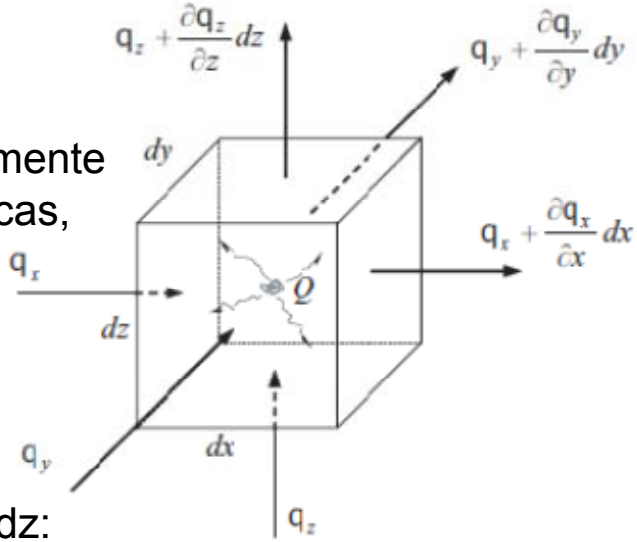
Consideremos un recinto diferencial dV de volumen, de lados de tamaño Δx, Δy, Δz paralelos a los ejes X,Y y Z y la Ley de BALANCE o EQUILIBRIO:

Calor que entra + Calor generado en interior – Calor que sale = Cambio energía interna

. La energía almacenada en el mismo por unidad de volumen y de tiempo es: $\rho \cdot c_p \cdot \partial T/\partial t$

donde ρ y c_p son la densidad (kg/m3) y el calor específico (J/(kg·K)), T (x,y,z,t) la temperatura en el recinto elemental, y t es el tiempo.

. **q** es el vector flujo de calor por unidad de área y por unidad de tiempo. Utilizaremos la 1ª aproximación de Taylor para las componentes de **q** en dV



. Q(x,y,z) representa la cantidad de energía generada internamente por unidad de volumen y tiempo (reacciones químicas, eléctricas, nucleares,…)

$q_x\, dy\cdot dz + q_y\, dx\cdot dz + q_z\, dx\cdot dy + Q\cdot dx\cdot dy\cdot dz -$

$-[(q_x+(\partial q_x/\partial x)\cdot dx)\, dy\cdot dz+(q_y+(\partial q_y/\partial y)\cdot dy)\, dx\cdot dz+$

$+(q_z+(\partial q_z/\partial z)\cdot dz)\, dx\cdot dy] = \rho\cdot c_p\cdot \partial T/\partial t \cdot dx\cdot dy\cdot dz$

Simplificando y dividiendo por el volumen elemental dx·dy·dz:

$Q - [\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z] = \rho\cdot c_p\cdot \partial T/\partial t$, $\quad Q - \nabla\cdot\mathbf{q} = \rho\cdot c_p\cdot \partial T/\partial t$

$Q + \nabla\cdot(K\cdot\nabla T) = \rho\cdot c_p\cdot \partial T/\partial t$

Ejemplo 1: ecuación diferencial del flujo de calor

$Q - [\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z] = \rho \cdot c_p \cdot \partial T/\partial t$, $(Q - \nabla \cdot \mathbf{q}) = \rho \cdot c_p \cdot \partial T/\partial t$

Aplicando la ecuación constitutiva de la ley de Fourier (por ej. ortótropa $\mathbf{q}=-K \cdot \nabla T$, K mat diagonal).

$Q + \partial(k_x \partial T/\partial x)/\partial x + \partial(k_y \partial T/\partial y)/\partial y + \partial(k_z \partial T/\partial z)/\partial z] = \rho \cdot c_p \cdot \partial T/\partial t$

$Q + \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{T}) = \rho \cdot c_p \cdot \partial T/\partial t$

Si la transmisión de calor es cte e isótropa: $k_x=k_y=k_z=k$, llamando $\kappa=k/(\rho \cdot c_p)$:

$$Q/\kappa + \partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 = (1/\kappa)\, \partial T/\partial t$$

(régimen transitorio, ecuación 'parabólica')

. Si estamos ante un problema o régimen estacionario (T no depende de t):

$$\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 = - Q/\kappa \ ,$$

ecuación de Poisson. (ecuación 'elíptica')

. Se utiliza el operador $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + \ldots$ con las derivadas parciales segundas apicadas a una función escalar:

$$\nabla^2 T = F(x,y,z)$$

. Si además de ser el problema estacionario no hay generación interna de calor (Q=0), la ecuación resultante es:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{(Ecuación de Laplace)}$$

Ejemplo 1: ecuación diferencial del flujo de calor

Condiciones de contorno: Completan la definición del problema y su sentido físico.

Consideraremos unas condiciones, que se denominan 'esenciales' , que afectan al valor de la temperatura en una parte S_e del contorno .Y otras, condiciones 'naturales', que afectan al flujo que atraviesa el contorno en otras partes (S_n, S_{n1} o S_{n2}), disjuntas con S_e. El conjunto del contorno resulta de la unión disjunta de las partes con condiciones esenciales y con condiciones naturales.

1. Temperatura conocida en una parte del contorno (S_e) . Esta condición se denomina de tipo 'esencial': $T(x,y,z,t)=T_0$, para todo punto de S_e
donde T_0 es el valor prescrito para la temperatura en el la parte S_e del contorno.

2. Flujo conocido a través de una parte del contorno (S_{n1}). En el caso ortótropo:

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=q_0, \quad k_x\partial T/\partial x\, n_x + k_y\partial T/\partial y\, n_y + k_z\partial T/\partial z\, n_z = -q_0$$

con $\mathbf{n} = (n_x,n_y,n_z)^T$ el vector unitario normal en S_n y q_0 es el valor prescrito del flujo en S_{n1}.

3. Flujo 'convectivo' producido por la diferencia entre la temperatura T en el borde del dominio y la temperatura externa al dominio, T_{ext} , en la zona contigua al borde. En el caso ortótropo:

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\alpha\cdot(T-T_{ext}), \qquad k_x\partial T/\partial x\, n_x + k_y\partial T/\partial y\, n_y + k_z\partial T/\partial z\, n_z = \alpha\cdot(T-T_{ext}),$$

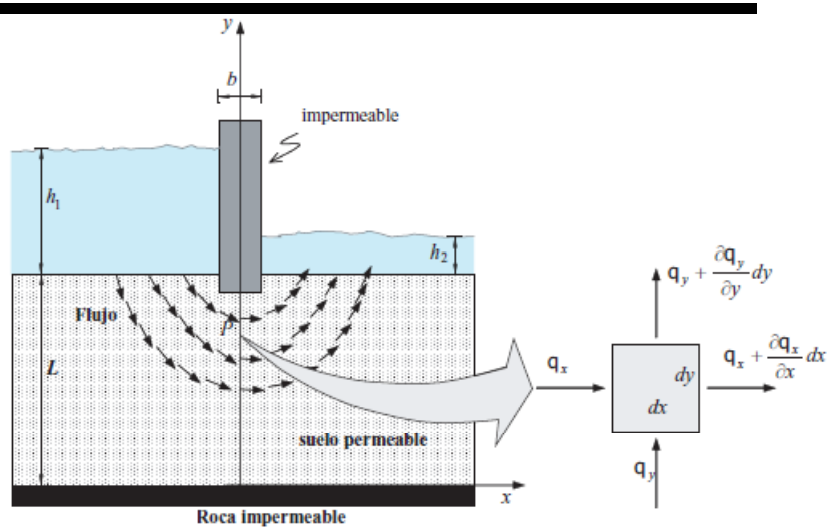
donde $\mathbf{n} = (n_x,n_y,n_z)^T$ es el vector unitario normal en S_{n2} , α es el coeficiente de transmisión de flujo convectivo en S_{n2} .

Las condiciones en el contorno que afectan al valor de T, magnitud incógnita, se denominan de Dirichlet, y las que afectan a su derivada 'normal' (flujo normal, $\partial T/\partial n$) de Neumann.

Ejemplo 2: Filtración en medios porosos

La presencia de agua en un medio poroso, como un terreno o que constituye una estructura, debe analizarse con detalle a efectos de estabilidad, corrosión u otros.

Consideremos un **problema 2D,** y en él el elemento diferencial dx ⊡ dy de superficie en el dominio (acuífero,…).



. El fluido atraviesa dx ⊡ dy por efecto del campo potencial hidráulico Φ (x,y, t): La Ley de Darcy (ec. Constitutiva) expresa el flujo **q**=-**K** $\cdot\nabla\Phi$, con **q** es el vector flujo de fluido por unidad de '**longitud'** y por unidad de tiempo. Suponemos flujo ortótropo, **K** es matriz diagonal:

$[k_x\ 0;0,k_y]$, k_x, k_y son los coeficientes de permeabilidad.

. Q: volumen de fluido por unidad de área y de tiempo que entra del exterior en el elemento.

. S_s : volumen de fluido por unidad de área liberado en el dominio (acuífero,…) cuando varía el potencial en una unidad.

→ Balance de volumen de fluido en el elemento diferencial dx ⊡ dy :

$$Q\cdot dx\cdot dy+[q_x-(q_x+\partial q_x/\partial x\cdot dx)]\cdot dy+[q_y-(q_y+\partial q_y/\partial y\cdot dy)]\cdot dx = S_s\cdot dx\cdot dy\cdot \partial\Phi/\partial t$$

$$Q-\partial q_x/\partial x - \partial q_y/\partial y = S_s\cdot\partial\Phi/\partial t \text{ , o bien, } Q+\partial(k_x\cdot\partial\Phi/\partial x)/\partial x + \partial(k_y\cdot\partial\Phi/\partial y)/\partial y = S_s\cdot \partial\Phi/\partial t,$$

Que se puede escribir vectorialmente: $Q + \nabla\cdot(\mathbf{K}\cdot\nabla\Phi) = S_s\cdot\partial\Phi/\partial t$

Ejemplo 2: Filtración en medios porosos

. Si k_x y k_y son constantes: $Q+k_x \cdot \partial^2\Phi / \partial x^2 + k_y \cdot \partial^2\Phi / \partial y^2 = S_s \cdot \partial\Phi / \partial t$.

. Si el material poroso es isótropo: $k_x = k_y = k$: $Q+k \cdot (\partial^2\Phi / \partial x^2 + \partial^2\Phi / \partial y^2) = S_s \cdot \partial\Phi / \partial t$.

. Si el proceso es estacionario (no influye el tiempo): $Q + k \cdot (\partial^2\Phi / \partial x^2 + \partial^2\Phi / \partial y^2) = 0$,

Esta es la ecuación de Poisson.

. Si no existe aportación externa de fluido en los puntos del dominio, Q=0, resulta la ecuación de Laplace: $\cdot \quad \partial^2\Phi / \partial x^2 + \partial^2\Phi / \partial y^2 = 0$

Ejemplo 2: Filtración en medios porosos

Condiciones auxiliares de contorno: Completan la definición del problema y su sentido físico. Consideraremos dos tipos de condiciones para el caso estacionario:

1. Potencial hidráulico en una zona del contorno S_1, en que se conoce el potencial Φ. *Esta condición se denomina de tipo 'esencial' o de Dirichlet*:

$$\Phi(x,y) = \Phi_0 \text{ , para todo } (x,y) \text{ de } S1$$

siendo Φ_0 es el valor prescrito para el potencial en la parte S_1 del contorno. En el ejemplo del embalse, aguas arriba de la presa, el potencial equivale al nivel del embalse y aguas debajo de la presa, al nivel del 'contraembalse'. S_1 son las zonas de fondo de embalse y contraembalse.

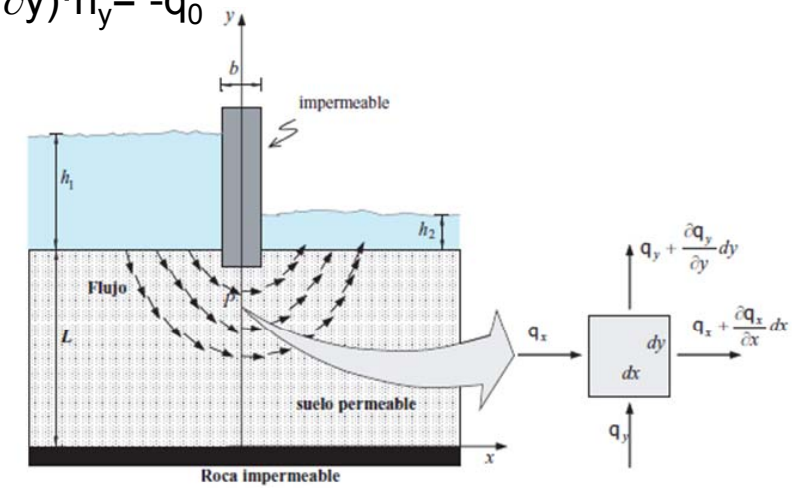
2. Flujo normal conocido q_0 a través de una parte S_2 del contorno (*condición tipo 'natural' o de Neumann*). En el caso ortótropo (constitutiva: $\mathbf{q}=-K\cdot\nabla\Phi=-[k_x,0;0,k_y]\cdot\nabla\Phi= [-k_x\cdot\partial\Phi/\partial x \text{ , } - k_y\cdot\partial\Phi/\partial y]$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=q_0, \quad (k_x\cdot\partial\Phi/\partial x)\cdot n_x+ (k_y\cdot\partial\Phi/\partial y)\cdot n_y= -q_0$$

donde $\mathbf{n} = (n_x,n_y)^T$ es el vector unitario normal a S_2.

En el ejemplo del embalse, S_2 se compone del borde de roca impermeable ($\mathbf{n}$=[0;-1]) y de la base de la presa (n=[0,1], supuesta de hormigón impermeable, y en ellos, respectivamente:

$$-k_y\cdot\partial\Phi/\partial y=0, \quad k_y\cdot\partial\Phi/\partial y=0$$



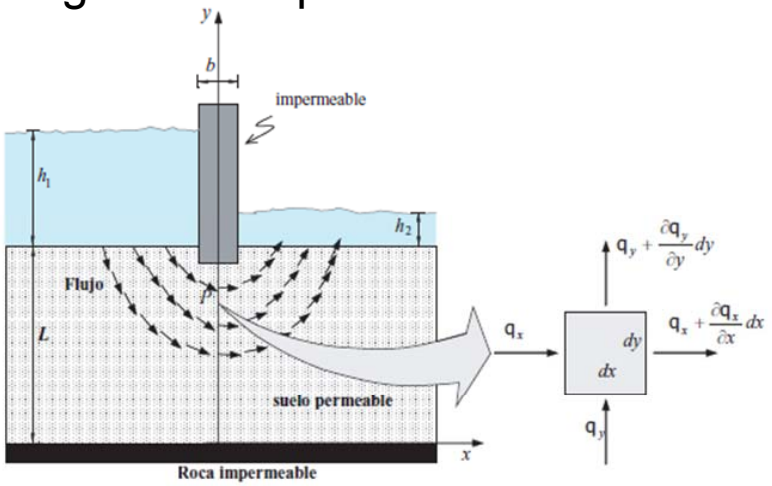
Ejemplo 2: Filtración en medios porosos

Condiciones iniciales:

En el caso estacionario, las condiciones auxiliares son habitualmente las de contorno descritas.

Para el caso de que el problema dependa del tiempo (problema transitorio o no estacionario), la correcta definición del problema exige añadir, además, condiciones iniciales, dando un valor conocido Φ(x,y,t=0) del potencial hidráulico en los puntos del dominio (x,y) en el instante inicial, así como la evolución de las condiciones de contorno al lo largo del tiempo.

Si se estudia el proceso de embalse o de desembalse, las alturas de agua aguas arriba y aguas debajo de la presa evolucionan con el tiempo, y por tanto el proceso de filtración es transitorio o no estacionario, y el potencial hidráulico en el medio poroso varía también con el tiempo.



* Sea una ecuación diferencial (ED, EDP) que está correctamente planteada F(u, $\partial^r u / \partial x_i^r$, …,**x**)=0 (r , i son índices de derivación y de variables respectivamente), en un dominio D, con condiciones auxiliares CA, de modo que el problema matemático, físico, ingenieril, tiene solución única.

* Algunas ideas utilizadas en la práctica para construir métodos aproximados de resolución:

1) DIFERENCIAS FINITAS:

. Discretizar el dominio D en puntos P_i

. Particularizar la ED y las CA en puntos de D.

Resultan ecuaciones en u y sus derivadas:

Sustituir las derivadas de u en puntos P_i por fórmulas aproximadas que impliquen a valores u(Pi). Resulta un sistema de ecuaciones en valores aproximados de u(P_i) (‘**Métodos de Diferencias Finitas**’)

Error y convergencia

Discretización: El dominio de definición D de la ecuación diferencial se 'discretiza', tomando sobre él un conjunto D_h de puntos P_i que generalmente son vértices de una estructura en retícula cuadrilátera, asociada a h (dimensión de retícula).

La función incógnita u(x,y) de naturaleza 'continua' se sustituye por una versión 'discretizada', un vector o matriz incógnita U, de elementos, por ejemplo en 2D:

$$.U_i \approx u(P_i)=u(x_i,y_i), \qquad U_{i,j} \approx u(P_{i,j})=u(x_i,y_j)$$

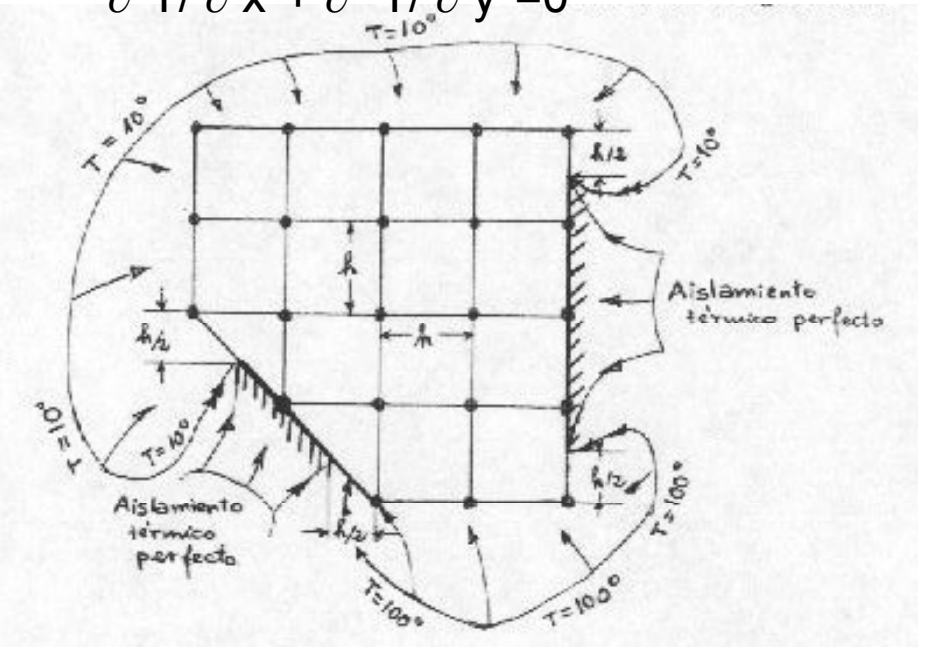
* Algunas cuestiones relevantes son:¿Existe solución única del problema aproximado? Si es así, ¿cómo calcularla? ¿Cuál es el error al tomar la solución del problema aproximado como solución del exacto? CONVERGENCIA: ¿Se pueden conseguir soluciones aproximadas con error cada vez más pequeño respecto de la solución exacta?

$E_i=(U_i-u(x_i,y_i)$, Error global=$\max_i(|U_i-u(x_i,y_i)|)$, i=1,2,…,nº ptos discretización

. Si Error global<=K·R(h), K un valor finito, y R(h) depende sólo de la geometría de la discretización, por ejemplo $R(h)=M_1\cdot h_1^2+M_2\cdot h_2^2$, M_1 , M_2 valores finitos, h_1 , h_2 de intervalos en x e y en la retícula:

* Eligiendo h_1 y h_2 suficientemente pequeños, se puede reducir el Error global, 'tanto como se quiera', es decir, hay CONVERGENCIA (cuadrática en el ejemplo).

Calor estacionario en dominio 2D:
$\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 = 0$



. Se consideran puntos P_i sobre el dominio D, y como incógnitas los valores $T(P_i)$, es decir se hace una discretización del problema. Estos puntos P_i están tanto en el dominio D como en su contorno. Así, el problema 'continuo' inicial se sustituye por uno discreto con incógnitas los valores de T en los puntos P_i elegidos en el dominio.

. Se particulariza la ED en puntos P_i, resultan ecuaciones con $T(P_i)$ y su derivadas en los P_i.

. Se particularizan condiciones auxiliares en puntos P_i : nuevas ecuaciones con $T(P_i)$ y sus derivadas.

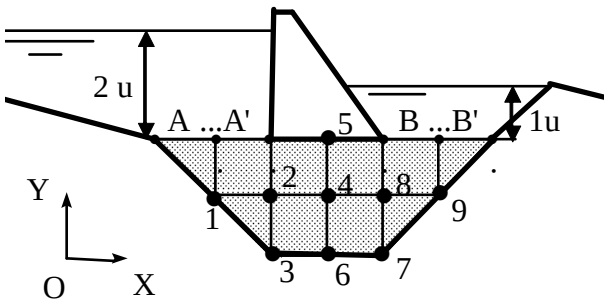
. Derivadas de T en puntos P_i : se aproximan con fórmulas de derivación numérica:

por ej.: $f''(x) \approx (f(x+h)-2\cdot f(x)+f(x-h)/h^2$; $f'(x) \approx (f(x+h)-f(x))/h$; $f'(x) \approx (f(x)-f(x-h))/h$

. Resulta un sistema de ecuaciones con incógnitas $T_{aprox}(P_i)$, valores que aproximan los exactos $u(P_i)$. Su resolución aporta una solución aproximada

Diferencias Finitas. Ejemplo

En un laboratorio de Hidráulica se experimenta con un modelo de presa apoyada en un terreno (ver figura), compuesto de material poroso permeable, isotrópico, enrasado hasta las líneas A...A' y B...B', bordeado por roca impermeable, El embalse mantiene un nivel de agua constante de valor 2 unidades sobre la línea A...A', por la que alimenta la zona permeable, y aguas abajo a pie de presa hay un contraembalse en que se mantiene el nivel de agua en 1 unidad por encima de la línea B...B', en estado estacionario.



La filtración viene representada por la ecuación de Laplace

$$\partial^2 P/\partial x^2 + \partial^2 P/\partial y^2 = 0$$

donde P es el potencial hidráulico.

Se supone la discretización de la figura, con cuadrados de igual lado h, para estudiar la distribución del potencial hidráulico en los nodos de la malla. La presa se supone impermeable. En todos los puntos sobre A...A', incluyendo esquinas, se tomará P=2 , y en los de BB', incluyendo esquinas, se considerará que el potencial vale 1. Se supondrá que la normal al contorno en los nodos 3 y 7 es paralela al eje OY.

Realizando las derivaciones aproximadas a partir de la fórmulas unidimensionales:

$f'(a) \approx (f(a+h)-f(a))/h$, $f'(a) \approx (f(a)-f(a-h))/h$, $f''(a) \approx (f(a+h)-2f(a)+f(a-h))/h^2$, *SE PIDE:*

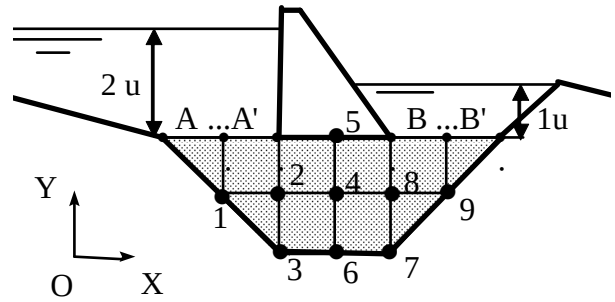
1.- Obtener el sistema de ecuaciones que teniendo en cuenta las condiciones de contorno y la discretización adecuada de la ecuación diferencial permite aproximar la distribución del potencial en la malla.

2.- Obtener el potencial hidráulico aproximado en los nodos.

Diferencias Finitas. Ejemplo

Solución

1.- Incógnita: potencial P(x,y) en los puntos de la malla en que se ha discretizado el medio poroso donde se plantea la ecuación de Laplace.
Se desconoce el valor de P en los 9 nodos numerados.
Ecuaciones que se pueden plantear:
. La EDP particularizada en los puntos del medio.
. Ecuaciones representativas de condiciones de contorno, de dos tipos:



- Tipo Dirichlet, valor de P en bordes A...A' y B...B'. P=2 en A...A' y P=1 en B...B' .
- Tipo Neumann (flujo, derivadas), el flujo normal nulo en borde impermeable, es decir: flujo de fluido normal al contorno es nulo; se expresa:

$\nabla P \cdot \mathbf{n} = 0$, $\nabla P = (\partial P/\partial x , \partial P/\partial y)$, **n**: normal al contorno en nodos 1,3,6,7,9,5.

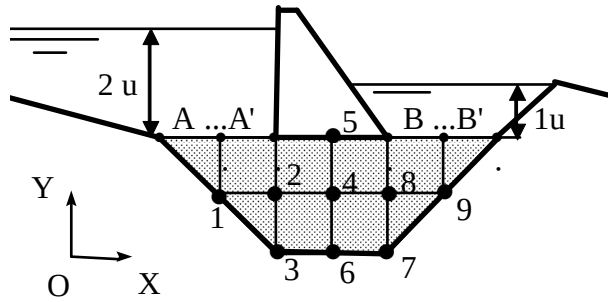
Balance de ecuaciones y de incógnitas en el problema:

. 9 incógnitas: valores de P en los nodos numerados.
. 6 ecuaciones, de imponer impermeabilidad en el borde, nodos 1,3,6,7,9,5.

- Son necesarias 3 ecuaciones más: construirlas particularizando la EDP en nodos 2, 4, 8 del interior de la zona porosa.

Diferencias Finitas. Ejemplo

- Derivadas en el gradiente y en la ecuación diferencial:, Fórmulas aproximadas, en función de los valores de P en nodos de la malla.
- Se llega a un sistema de ecuaciones que representa el comportamiento del problema de un modo discretizado sobre los nodos. Suponiendo que el lado de todos los cuadrados de la malla vale h:



Nodo 1. grad P · n = 0 [(P2-P1)/h, (2-P1)/h] · (-1/√2, -1/ √2)T = 0, esto es P2 - 2·P1 +2 = 0
Nodo 5. grad P · n = 0 [(1-P5)/h, (P5-P4)/h] · (0, 1)T = 0, esto es P5 - P4 = 0 , P4 = P5
Nodo 3. grad P · n = 0 [(P6-P3)/h, (P2-P3)/h] · (0,1)T = 0, esto es P2 - P3 = 0 , P2 = P3
Nodo 6. grad P · n = 0 [(P7-P6)/h, (P4-P6)/h] · (0,1)T = 0, esto es P4 - P6 = 0 , P4 = P6
Nodo 7. grad P · n = 0 [(P7-P6)/h, (P8-P7)/h]· (0,1)T = 0, esto es P8 - P7 = 0 , P8 = P7
Nodo 9. grad P · n = 0 [(P9-P8)/h, (1-P9)/h] · (1/√2 , -1/√2)T = 0, esto es P8 - 2·P9 + 1 = 0

Nodo 2. $\Delta P = 0$, ΔP: Laplaciano de P:

(P4 - 2P2 + P1)/h2 + (2 - 2P2 + P3)/h2 = 0, esto es: P1 - 4P2 + P3 + P4 + 2= 0

Nodo 4. $\Delta P = 0$:

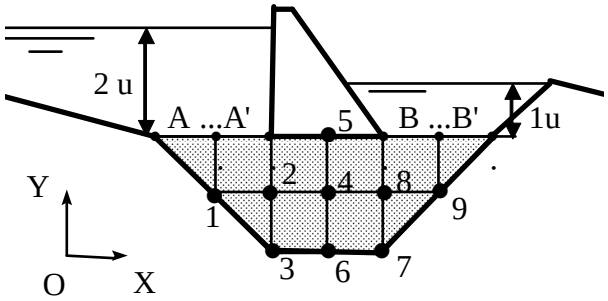
(P2 - 2P4 + P8)/h2 + (P5 - 2P4 + P6)/h2 = 0, esto es: P2 - 4P4 + P5 + P6 + P8= 0

Nodo 8. $\Delta P = 0$:

(P4 - 2P8 + P9)/h2 + (1 - 2P8 + P7)/h2 = 0, esto es: P4 + P7 - 4P8 + P9 + 1= 0

Diferencias Finitas. Ejemplo

El sistema resultante se puede escribir matricialmente; si se hace de modo que el orden de las ecuaciones se corresponda con el de los nodos en que se plantean, se tiene :



$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes es dispersa o hueca, esto es, con muchos ceros, y tiene una estructura en banda. Obsérvese que la numeración de los nodos puede cambiar el patrón de ceros de la matriz de coeficientes.

2.- Las 3 igualdades: P2 = P3 , P4 = P6 , P8 = P7 reducen a 5 el número de ecuaciones, y operando sobre ellas, se obtiene finalmente:
P1 =1.9 , P2 = P3 = 1.8 , P4 = P5 = P6 = 1.5 , P7 = P8 = 1.2 , P9 = 1.1

Formulaciones aproximadas para abordar ED

* Algunas ideas utilizadas en la práctica para construir métodos aproximados de resolución:

2) Tomar una solución aproximada $u_{ap}(x)$ representada como combinación de unas funciones básicas conocidas a priori mediante unos coeficientes c_i a determinar ('Métodos variacionales'):

$$u_{ap}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nB} c_i \cdot B_i(\mathbf{x})$$

. Método de 'colocación': se eligen funciones $B_i(x)$ que verifiquen las condiciones auxiliares. Se sustituye $u_{ap}(\mathbf{x})$ en la ED y se obliga a que la verifique en puntos dados. Resulta un sistema de ecuaciones en c_i. Se resuelve para tener una solución aproximada.

. Considerar un problema de minimización de un funcional de $u(\mathbf{x})$ equivalente a la ED, atendiendo también las CA (método de Ritz), con incógnitas los coeficientes c_i.

. Obtener una formulación equivalente a la ED y las CA, '**Formulación débil**', en la que se pueda introducir la expresion $u_{ap}(\mathbf{x})$ y construir un sistema de ecuaciones con incógnitas c_i . Se utiliza la denominación de métodos de '**Residuos ponderados**'

Ejemplo de Método de COLOCACION

Sea la EDO: $U''(x)=U(x)$, $U(0)=0$, $U(1)=1$, $x\in[0,1]$
(Conte, S., de Boor, C., Elem Num An, 1981 3ª ed)

. Se plantea una solución aproximada $U_N(x)$, combinación de funciones 'base', en este caso de tipo polinómico: $U_N(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

. Hay 3 coeficientes a determinar. $U_N(x)$ verifica una de las condiciones de contorno, $U_N(0)=0$. Se debe exigir que también cumpla la otra, $U_N(1)=1$, y de ello se obtiene la ecuación: $c_1+c_2+c_3=1$

. Se equilibran número de incógnitas y ecuaciones: 2 ecuaciones más, obligando a que $U_N(x)$ verifique exactamente la Ec Dif en 2 abscisas intermedias, x=1/4, x=3/4. (Así se 'coloca' con error cero, verificando la Ec Dif en ellas)

Se tiene: $U_N''(x)-U_N(x)=2\cdot c_2+6c_3x-c_1x-c_2x^2-c_3x^3=-c_1x+c_2(2-x^2)+c_3(6x-x^3)=0$

. Resulta como solución aproximada:
$U_N(x)=0.852237\cdot x-0.0138526\cdot x^2+0.161616x^3$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/4 & 31/16 & 95/64 \\ -3/4 & 23/16 & 261/64 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que puede utilizarse para aproximar a U(x) , U'(x) en cualquier punto de [0, 1].

La solución exacta es: $U_{exacta}=\text{senh}(x)/\text{senh}(1)$.

Ejemplo de Método de COLOCACION

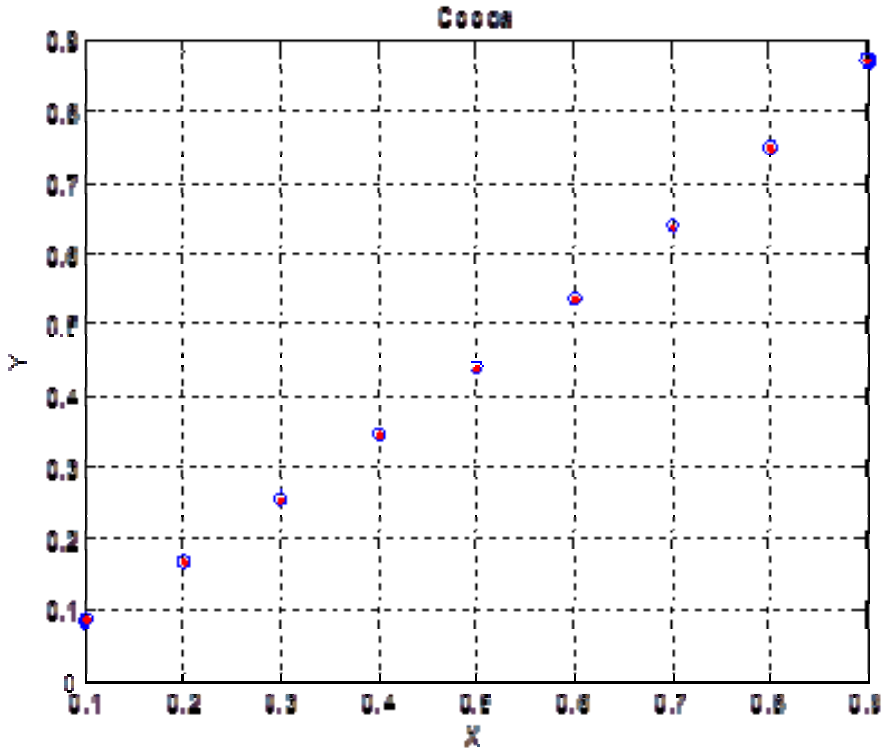
```
% Ej1_ColocacionEDO (Matlab, Octave)

A=[1,1,1;-1/4,31/16,95/64;-3/4,23/16,261/64];
b=[1;0;0];format long e
c=A\b

x=[0.1:0.1:0.9];
for i=1:length(x)
   Uaprox(i)=[x(i),x(i)^2,x(i)^3]*c;
   Uexact(i)=sinh(x(i))/sinh(1);
end

fprintf('       x           Uaprox        Uexact\n')
for i=1:length(x)
  fprintf('%12.6f  %12.6f  12.6f\n',x(i),Uaprox(i),Uexact(i))
end

figure,plot(x,Uaprox,('r.'),x,Uexact,'bo')
grid on, title ('Coloca'),xlabel('X'),ylabel('Y')
```

Ejemplo de Método de COLOCACION

SALIDAS textual y gráfica del programa % Ej1_ColocacionEDO:

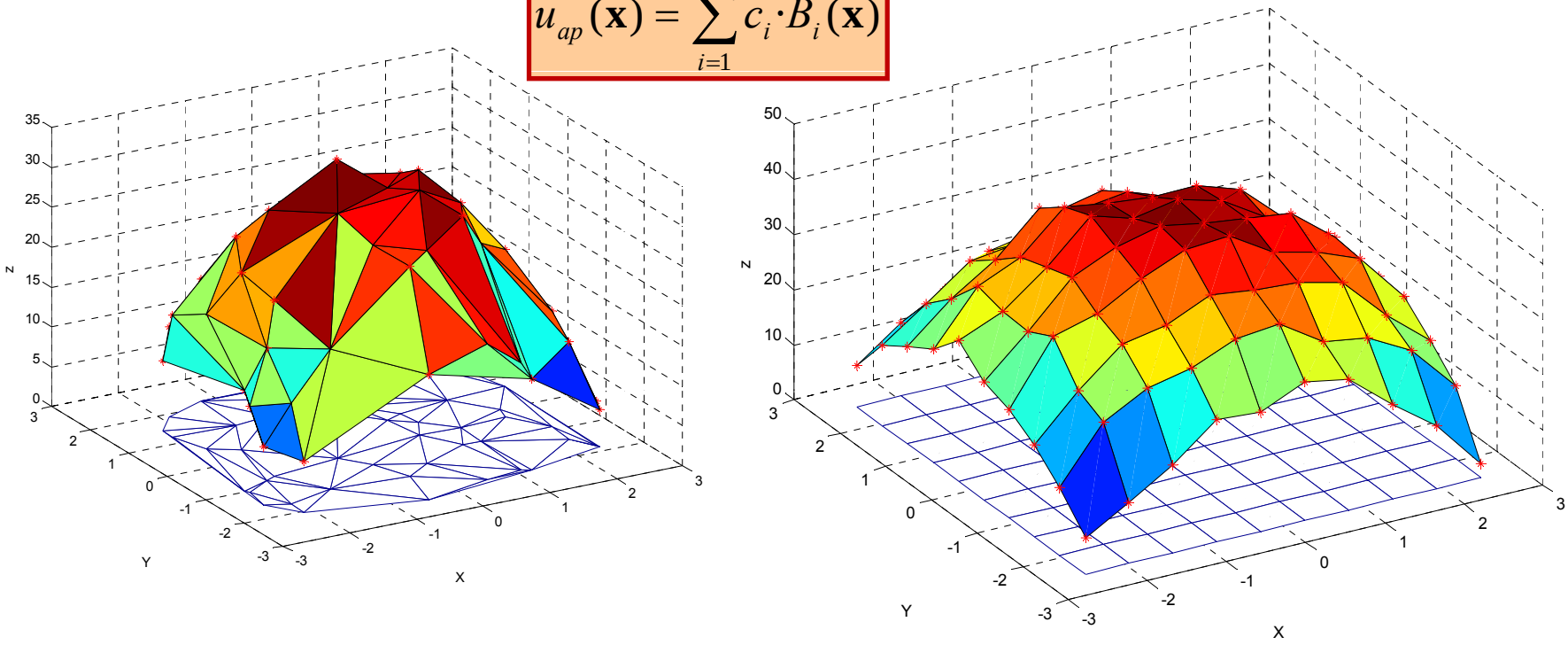
```
c =
 8.522366522366522e-001
-1.385281385281387e-002
 1.616161616161616e-001
```

x	Uaprox	Uexact
0.100000	0.085247	0.085234
0.200000	0.171186	0.171320
0.300000	0.258788	0.259122
0.400000	0.349022	0.349517
0.500000	0.442857	0.443409
0.600000	0.541264	0.541740
0.700000	0.645212	0.645493
0.800000	0.755671	0.755705
0.900000	0.873610	0.873482



* Algunas ideas utilizadas en la práctica para construir métodos aproximados de resolución:

$$u_{ap}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nB} c_i \cdot B_i(\mathbf{x})$$



* La función solución $u_{ap}(x,y)$ se representa mediante polinomios a trozos (**elementos finitos**, parches) sencillos: a) triangulares planos $z=a+b\cdot x+c\cdot y$, b) cuadriláteros no lineales: $z=a+b\cdot x+c\cdot y+d\cdot x\cdot y,\ldots$). Se formula la discretización de modo que las incógnitas sean los valores u_{ap} en los 'nodos' o vértices de la discretización del dominio.

El problema Variacional: FORMA DÉBIL

. Llamaremos 'Residuo', R(x,y) *, a la parte de la ecuación diferencial que se iguala a cero:*

$$R(x,y) = -\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)) + b(x,y)\cdot u(x,y) - f(x,y),\ (x,y)\in\Omega$$

(recuérdese que la solución del problema verifica R(x,y)=0)

. **Formulación débil**: Se trata de obtener una ecuación (integral) con la misma solución que la ED, mediante integración en el dominio Ω del producto de R(x,y) por un funciones w(x,y) adecuadamente elegidas (funciones de 'peso') , de modo que sea integrable R(x,y)·w(x,y) y obligando a que sea cero el promedio integral con peso que resulta:

$$\int_\Omega w(x,y)\cdot R(x,y)\,d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega w(x,y)\cdot[-\vec{\nabla}\cdot(k(x,y)\cdot\vec{\nabla}u) + b(x,y)\cdot u(x,y) - f(x,y)]\cdot d\Omega = 0$$

Está claro que la solución exacta verifica esta ecuación siempre que w(x,y) sea suficientemente 'suave' como para que la integración tenga sentido.

. Para aplicar el método, se introduce una solución aproximada $u_{ap}(x)$ combinación de funciones base $B_i(x)$, de modo que al crecer el número de funciones base se garantice la aproximación a la solución exacta u(x,y).

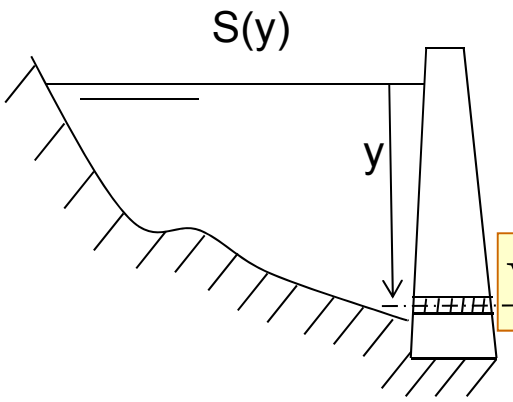
$$u_{ap}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nB} c_i \cdot B_i(\mathbf{x})$$

El problema Variacional: FORMA DÉBIL

. La función de peso w(x,y) hace un efecto de penalización para que el residuo sea pequeño cuando se introduzca una aproximación de u(x,y) (residuo cero en la solución exacta).

. En el problema, en la zona del borde $\partial\Omega_1$ se ha convenido que se conoce la solución u(x,y) - condiciones esenciales de contorno, tipo Dirichlet - y que la solución $u_{ap}(x,y)$ las verificará exactamente. Para esa 'zona' del dominio no se hace necesario utilizar penalización sobre u(x,y) ni sobre $u_{ap}(x,y)$, y por ello se tomarán las funciones de peso w(x,y) tales que se anulen en esa zona del contorno.

. Por otra parte, se verá que introduciendo propiedades integrales y las condiciones de contorno en la expresión de la integral del residuo ponderado, ésta se transformará en otra expresión en que aparecen las derivadas primeras de w(x,y). Por ello exigiremos las funciones w(x,y) una estructura suave para que sea correcto realizar integraciones de expresiones en que aparecen sus derivadas primeras. Las transformaciones integrales producirán asimismo expresiones en que aparecen las derivadas primeras de u(x,y), en lugar de las segundas que aparecen en la ecuación diferencial.



$$V_D(y) = K \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$

(Fórmula de Torricelli)

K: coeficiente de pérdida (experimental, aprox 0.62)
g: aceleración gravedad (9.81 m/seg^2)
y: profundidad desde superficie libre a eje desagüe
A: área orificio desagüe
S(y): Área superficie embalse, función de y (dato topográfico)

Descenso superficie =Volumen agua desaguada

$$-S(y) \cdot dy = V_D(y) \cdot A \cdot dt$$

Problema 1: evolución en el tiempo del nivel del embalse (qué superficie queda inundada, al desaguar, EDO:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{A \cdot K \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}}{S(y)}$$

Cond auxiliar, tipo inicial: t=0: $y=y_0$

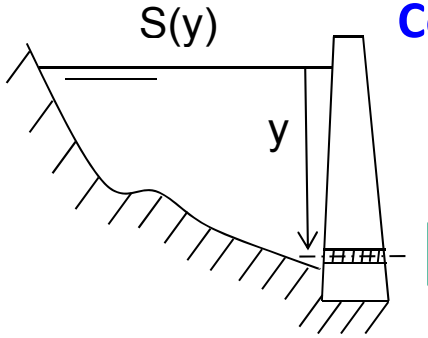
Problema 2: Tiempo de desembalse hasta un cierto nivel y_t ($y_0 >= y >= y_t$, si y=0, embalse vacío)

$$t_D(y_t) = \int_{y_0}^{y_t} \frac{-S(y)}{K \cdot A \sqrt{2 \cdot g \cdot y}} dy = \frac{1}{K \cdot A \sqrt{2 \cdot g}} \int_{y_t}^{y_0} \frac{S(y)}{\sqrt{y}} dy$$

Ejemplo de datos de superficie libre de un embalse (se extrae de un mapa topográfico):

Cota (metros) y =Y-810,

Y:	810	812	814	816	818	820	822	824	826	828	830	832	834	836	838
Área (Km2), S(y):	0	6	14	36	71	112	185	260	352	460	574	705	830	913	961



Cómo integrar una EDO de un Problema de Valor Inicial?

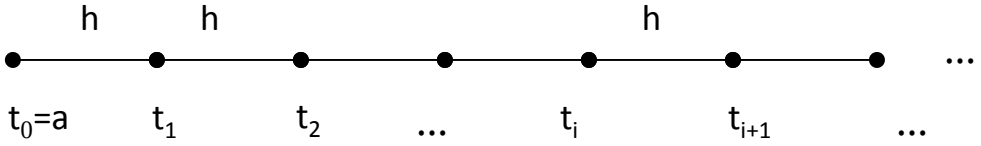
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{A \cdot K \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}}{S(y)}$$

$y'(t)=f(y,t),\ y(t_0)=y_0$

Cond. Inicial: t=0: $y=y_0$

PASO a PASO, ideas:

Idea 1



Métodos de Taylor (1 paso)

$y(t_i+h)= y(t_i)+ y'(t_i)\cdot h/1! + y''(t_i)\cdot h^2/2! + y'''(t_i)\cdot h^3/3! + y^{iv}(t_i)\cdot h^4/4! + O(h^5)$

Error de Truncatura Local (ETL): $y^{v)}(\xi)\cdot h^5/5! = O(h^5)$, $\xi \in [t_i, t_i+h]$

$y'(t)= f(t,y)$

$y''(t)= f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))\cdot f(t,y(t))$

$y_i \approx y(t_i)$

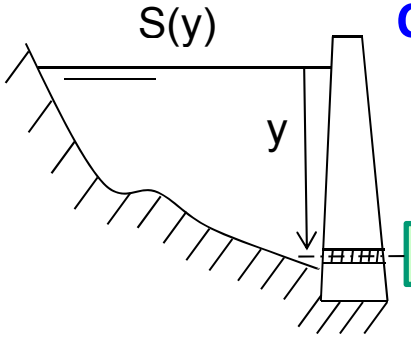
$y'_i= f(t_i, y_i)$

$y''_i= f_t(t_i,y_i+ f_y(t_i,y_i)\cdot f(t_i,y_i)$

Método de Taylor de orden 1 (Euler): $y_{i+1}= y_i+h\cdot y'_i$, desde t_0 , $y_i \approx y(t_i)$, ETL=$O(h^2)$

Método de Taylor de orden 2: $y_{i+1}= y_i+h\cdot y'_i +h^2\cdot y''_i/2$, desde t_0 , $y_i \approx y(t_i)$, ETL=$O(h^3)$

Métodos Runge-Kutta…)



Cómo integrar una EDO de un Problema de Valor Inicial?

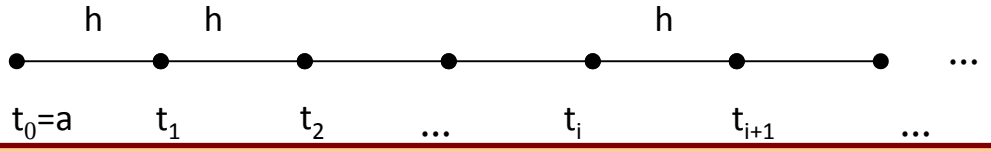
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{A \cdot K \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y}}{S(y)}$$

$y'(t)=f(y,t)$, $y(t_0)=y_0$

Cond. inicial: t=0: $y=y_0$

PASO a PASO, ideas:

Idea 2



$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dy}{dt} \cdot dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y) \cdot dt \Rightarrow y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y) \cdot dt$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y) \cdot dt$$

Aplicando regla 'trapecio':

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \frac{h}{2} \cdot (f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + f(t_i, y(t_i))) \quad , \quad h = t_{i+1} - t_i$$

Tomando $y_i \approx y(t_i)$, $y_{i+1}=y_i+(h/2)\cdot(f(t_i,y_i)+f(t_{i+1},y_{i+1}))$, desde t_0

que es un método Implícito (de Crank-Nicolson) (ETL=$-h^3 \cdot y'''(\xi)/12$)

Métodos Predictor-Corrector…)

Ejemplo inestabilidad numérica (sensibilidad a discretización y errores de redondeo):

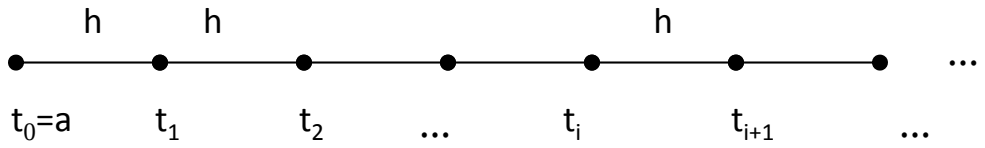
Método monopaso (Euler, ETL: $O(h^2)$) <> Multipaso más preciso (ETL: $O(h^3)$)

Euler (Taylor 1): $y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i)$,

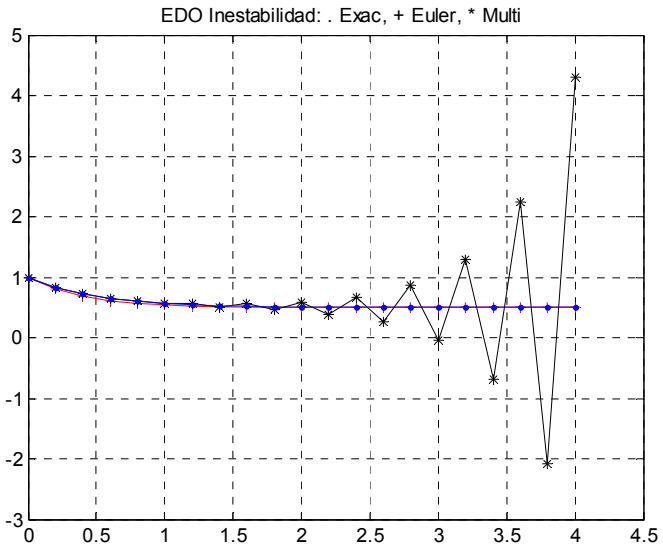
Multipaso: $y_{i+1}=y_{i-1}+2\cdot h\cdot f(x,y)$

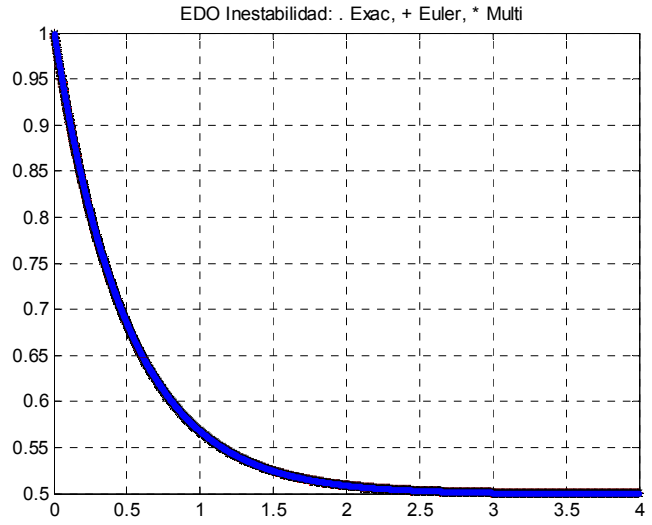
$y'=-2\cdot y+1, \quad y(0)=1$

$y_{exacta}=1/2+\exp(-2\cdot x)/2$



h = 0.2	h = 0.02	h = 0.002
maxErr_Euler = 0.0447	maxErr_Euler = 0.0037	maxErr_Euler = 3.6849e-004
maxErr_Multi = 3.8057	maxErr_Multi = 0.0076	maxErr_Multi = 7.9208e-006



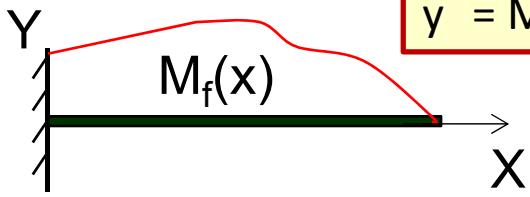


Valor inicial. Ecuación de orden p (p=2)

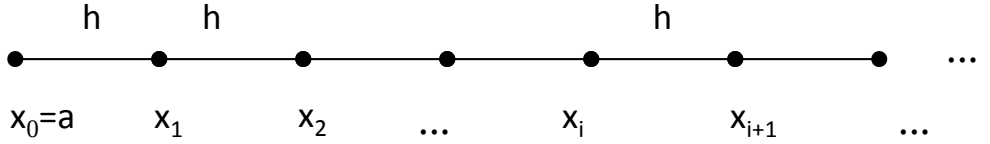
Cómo integrar una EDO explícita orden p=2 en un problema de Valor Inicial?

$y'' = M_f(x)/(E \cdot I)$ Var indep: x en [0,L]

Cond. inic.: $y(0)=0$, $y'(0)=0$



$y''=f(x,y,y')$, $x \in [a,b]$



Cambio de variable dependiente: $y1(x)=y(x)$, $y2(x)=y'(x)$, $y1'=y'$, $y2'=y''$

Resulta el sistema de EDOs, $x \in [a,b]$:

$y1'(x)= y2(x)$, $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(a)=\boldsymbol{\alpha}$

$y2'(x)= f(x,y1(x),y2(x))$ $y1(a)=\alpha1$, $y2(a)=\alpha2$

$y1'= y2$, $x \in [a,b]$

$y2'= M_f(x)/(E \cdot I)$

C. ini: $y1(0)=0$, $y2(0)=0$

* Taylor orden 1 (Euler): $ETL=O(h^2)$

$y1_{i+1}=y1_i+y1'_i \cdot h=y1_i+y2_i \cdot h$ $y1_0= \alpha1$, $y2_0= \alpha2$

$y2_{i+1}=y2_i+y2'_i \cdot h=y1_i+f(x,y1_i,y2_i)$ $i=0,1,2,\ldots$

* Método de tg media o Euler mejorado (familia Runge-Kutta orden2 $ETL=O(h^3)$):

$\mathbf{y}_{i+1}= \mathbf{y}_i+ [\mathbf{f}(x_i,\mathbf{y}_i)+\mathbf{f}(x_{i+1},\mathbf{y}_i+h \cdot \mathbf{f}(x_i,\mathbf{y}_i))] \cdot h/2$

$y1_{i+1}=y1_i+[y2_i+y2_i+h \cdot f(x_i,y1_i,y2_i)] \cdot h/2$, $y1_0= \alpha1$, $y2_0= \alpha2$

$y2_{i+1}=y2_i+[f(x_i,y1_i,y2_i)+f(x_{i+1}, y1_i+h \cdot y2_i, y2_i+h \cdot f(x_i,y1_i,y2_i))] \cdot h/2$, $i=0,1,2,\ldots$

Ejemplo de problema No Estacionario (Depende del Tiempo)

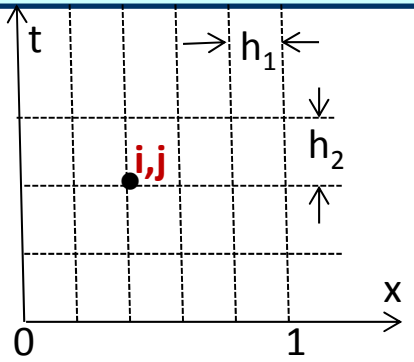
Difusión del calor en una varilla (Método de Diferencias Finitas)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad x\in[0,1],\ t\geq 0,\ C.Borde: T(0,t)=\alpha\ ,\ T(1,t)=\beta\ ,\ C.Inicial: T(x,0)=g(x)$$

Particularizar EDP en (i,j) (que es (x_i, t_j)):

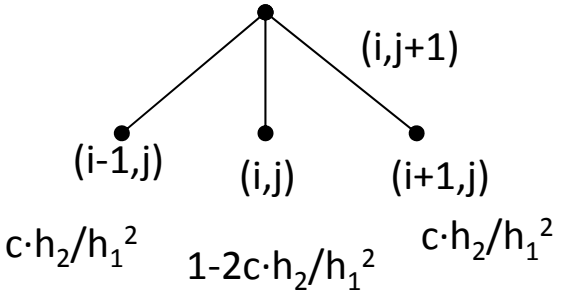
$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right]_{i,j} \approx \frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{h_2}; \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{i,j} \approx \frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h_1^{\,2}}$$

Error $O(h_2)$ en t , $O(h_1^{\,2})$ en x



$$\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{h_2} = c\cdot\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h_1^{\,2}}$$

$$T_{i,j+1} = c\cdot\frac{h_2}{h_1^{\,2}}\cdot T_{i+1,j} + (1-2\cdot c\cdot\frac{h_2}{h_1^{\,2}})\cdot T_{i,j} + c\cdot\frac{h_2}{h_1^{\,2}}\cdot T_{i-1,j}$$



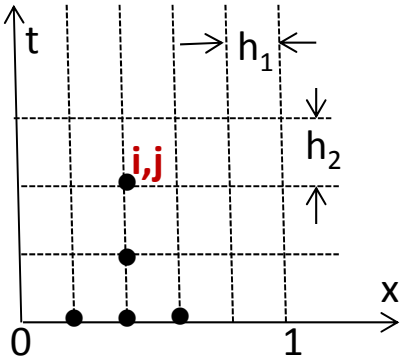
Es un método EXPLICITO. Se avanza desde t=0, T(x,0) conocida.

Convergencia:
condición de ESTABILIDAD:

$$con\ \lambda = c\cdot\frac{h_2}{h_1^{\,2}} = c\cdot\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\ ,\ debe\ ser\ \ \lambda \in (0,\frac{1}{2}]$$

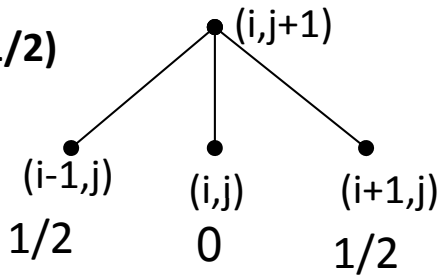
Ejemplos

$$T_{i,j+1} = \frac{1}{2}\cdot(T_{i-1,j} + T_{i+1,j})$$



a1) **h_1=1/4, h_2=1/32, c=1 (λ=1/2)**

t=1/8	0	¼	½	¼	0
	0	½	½	½	0
t=1/16	0	½	1	½	0
t=1/32	0	1	1	1	0
t=0	1	1	1	1	1
X->	0	¼	½	¾	1



ESTABLES

a2) **h_1=1/8, h_2=1/128, c=1 (λ=1/2)**

t=1/32	0	3/8	¾	7/8	1	7/8	¾	3/8	0
	0	½	¾	1	1	1	¾	½	0
t=1/64	0	½	1	1	1	1	1	½	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	0
t=0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X->	0		¼		½		¾		1

Es un método EXPLICITO. Se avanza desde t=0, T(x,0) conocida.

Convergencia:
condición de ESTABILIDAD:

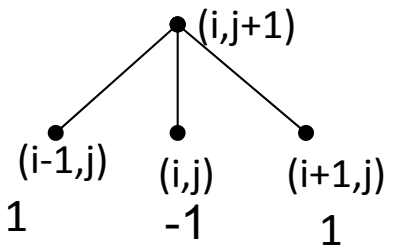
$$con\ \lambda = c\cdot\frac{h_2}{h_1^{\,2}} = c\cdot\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\ ,\ debe\ ser\ \ \lambda \in (0,\frac{1}{2}]$$

Ejemplos

$$T_{i,j+1} = \frac{1}{2}\cdot(T_{i-1,j} - T_{ij} + T_{i+1,j})$$

b_1) h_1=1/8, h_2=1/64, c=1 (**λ=1**)

t=1/16	0	-1	2	0	1	0	2	-1	0
	0	1	0	1	1	1	0	1	0
t=1/32	0	0	1	1	1	1	1	0	0
t=1/64	0	1	1	1	0	1	1	1	0
t=0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X->	0	1/8	…	½	…				1



INESTABLES

Error, sin sentido
temperaturas negativas

b_2) h_1=1/4, h_2=1/16, c=1 (**λ=1**)

t=6/16	0	-12	17	-12	0
	0	5	-7	5	0
	0	-2	3	-2	0
t=3/16	0	1	-1	1	0
	0	0	1	0	0
t=1/16	0	1	1	1	0
t=0	1	1	1	1	1
X->	0	¼	½	¾	1

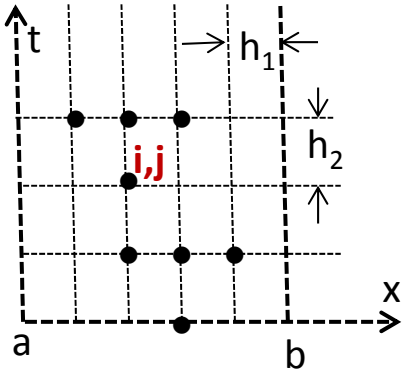
$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad x \in [a,b],\ t \geq 0,\ C.Borde:\ T(a,t) = \alpha\ ,\ T(b,t) = \beta\ ,\ C.Inicial: T(x,0) = g(x)$$

Particularizar EDP en (i,j+1) (que es (x_i, t_{j+1})):

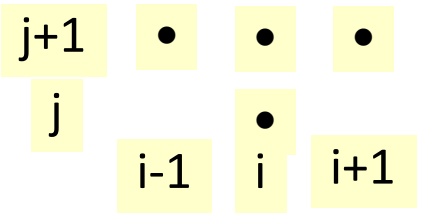
$t_j = j \cdot h_2$, $x_i = a + i \cdot h_1$

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h_2} = c \cdot \frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}}{h_1^2}$$

$$(1 + 2 \cdot c \cdot \frac{h_2}{h_1^2}) \cdot T_{i,j+1} - c \cdot \frac{h_2}{h_1^2} \cdot T_{i+1,j+1} - c \cdot \frac{h_2}{h_1^2} \cdot T_{i-1,j+1} = T_{i,j}$$



i=1, 2, …, N-1
t=0, h_2, $2 \cdot h_2$,…, $j \cdot h_2$



Sistema TRIDIAGONAL DE ECUACIONES LINEALES para cada t_j, j=1, 2, …

Es INCONDICIONALMENTE ESTABLE

Error de discretización:
. $O(h_2)$ en t
. $O(h_1^2)$ en x

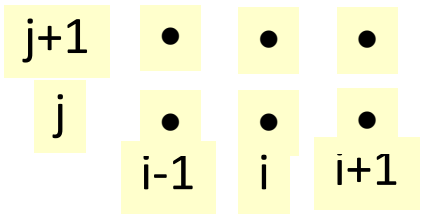
Método de Crank-Nicolson

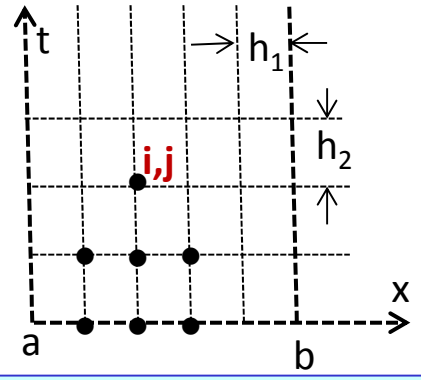
(Calcular la media de $T_{i,j+1}$-$T_{i,j}$ del método explícito y del implícito anteriores)

$$T_{i,j+1} - T_{i,j} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\left(T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\cdot T_{i-1,j+1} + \left(1+\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\right)\cdot T_{i,j+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\cdot T_{i+1,j+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\cdot T_{i-1,j} + \left(1-\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\right)\cdot T_{i,j} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{h_1^{\,2}}\cdot T_{i+1,j}$$

i=1, 2, …, N-1
t=0, h_2, $2\cdot h_2$,…, $j\cdot h_2$





Sistema TRIDIAGONAL DE ECUACIONES LINEALES para cada t_j, j=1, 2, …

$$T(a,t) = \alpha \;,\; T(b,t) = \beta \;,\; T(x,0) = g(x)$$

INCONDICIONALMENTE ESTABLE

Error de discretización:
. $O(h_2^{\,2})$ en t
. $O(h_1^{\,2})$ en x