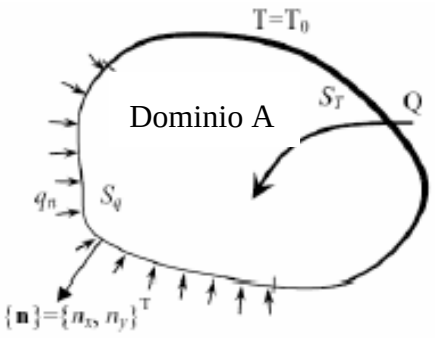
Prob PI-1. Forma débil de un problema de flujo de calor estacionario en 2D (Cálculos a mano)

Considérese el problema definido en la figura siguiente:



La EDP asociada es: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q=0$$

con Q una fuente de calor por unidad de área, conocida.

Obsérvese que la forma compacta de esta EDP es:

$\nabla\cdot([k]\,\nabla T) + Q = 0$, siendo [k] la matriz de conductividad $[k]=\begin{bmatrix}k_x & 0\\ 0 & k_y\end{bmatrix}$ de la ecuación constitutiva.

Se consideran las siguientes condiciones en el contorno o borde del dominio A:

$T=T_0$ (predeterminado) sobre S_T , $q_n=\hat{q}_n$ sobre S_q

PI-1.a) Multiplicar la anterior ecuación diferencial por $w=\delta T$ e integrar sobre el dominio A. Recordar que $w=\delta T$ es cero en los bordes donde la temperatura T toma un valor conocido prescrito.

Integrar 'por partes' utilizando la fórmula de Green cada término separado de la EDP utilizando lo siguiente:

$$\iint_A\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)\cdot w+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)\cdot w\right)\cdot dA=\int_S\left(k_x\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\cdot n_x\cdot w+k_y\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\cdot n_y\cdot w\right)\cdot ds-\iint_A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cdot k_x\cdot\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot k_y\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)\cdot dA$$

Mostrar que esta es la forma equivalente por componentes de la expresión compacta utilizada en las notas de clase:

$$\iint_A\nabla\cdot([k]\cdot\nabla T)\cdot w\cdot dA=\int_S\underbrace{[k]\cdot\nabla T\cdot\mathbf{n}}_{q_n}\cdot w\cdot ds-\iint_A\nabla w\cdot[k]\cdot\nabla T\cdot dA$$

Donde $q_n=q_x\cdot n_x+q_y\cdot n_y$ es el flujo normal de calor 'ENTRANTE' en la superficie cuyo vector normal 'SALIENTE' al dominio A es $\mathbf{n}=n_x\cdot\mathbf{i}+n_y\cdot\mathbf{j}$. Deducir la forma 'débil' final de este problema.

PI-1 a) Solución:

Multiplicando la EDP por w e integrando sobre el dominio A resulta:

$$\iint_A\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\cdot\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right)\cdot w\cdot dA+\iint_A Q\cdot w\cdot dA=0$$

Para integrar 'por partes', empezamos con la fórmula compacta de las notas de clase (Green, L10, p30)

$$\iint_A w\cdot\nabla\cdot([k]\cdot\nabla T)\cdot dA=\int_S w\cdot[k]\cdot\nabla T\cdot\vec{n}\cdot ds-\iint_A\nabla w\cdot[k]\cdot\nabla T\cdot dA$$

$$[k]=\begin{bmatrix}k_x & 0\\ 0 & k_y\end{bmatrix},\ \mathbf{n}=nx\cdot\mathbf{i}+ny\cdot\mathbf{j},\ \nabla=\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{bmatrix}$$

[k] se supone constante en el dominio A.

Sustituyendo las componentes matriciales en la fórmula compacta se tiene:

$$\iint_A w\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_x & 0\\ 0 & k_y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x}\\ \frac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix}\cdot dA=\int_S w\cdot\begin{bmatrix}n_x & n_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_x & 0\\ 0 & k_y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x}\\ \frac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix}\cdot ds-\iint_A\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k_x & 0\\ 0 & k_y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x}\\ \frac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix}\cdot dA$$

Realizando las multiplicaciones matriciales y los productos escalares, se tiene la fórmula para la integración 'por partes' dada en el problema. Las dos formas son equivalentes:

$$\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot w + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot w \right) \cdot dA = \int_S \left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x \cdot w + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y \cdot w \right) \cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA$$

Aplicando esta fórmula a nuestra ecuación inicial:

$$\int_{S_T} \left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x \cdot w + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y \cdot w \right) \cdot ds + \int_{S_q} \left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x \cdot w + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y \cdot w \right) \cdot ds$$
$$- \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

Puesto que la temperatura está dada sobre el borde S_T, w=0 sobre dicha parte del contorno, y la integral curvilínea sobre S_T es cero, resultando:

$$\int_{S_q} w \cdot \left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y \right) \cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

Sustituyendo el flujo de calor da la forma débil final para el problema**, $[q_x, q_y] = -[k] \cdot \nabla T$:**

$$\int_{S_q} w \cdot \left(- q_x \cdot n_x - q_y \cdot n_y \right) ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

$\forall w \in H^1(A)$, con w=0 sobre S_T

el vector **n** normal al borde del dominio debe ser 'SALIENTE', por el proceso de aplicación del teorema de Green. Si el vector **q** =$[q_x, q_y]$ en el borde tiene la dirección entrante, contraria a la normal saliente, el producto **q·n** =$q_x \cdot n_x + q_y \cdot n_y$ será un valor negativo, y - ($q_x \cdot n_x + q_y \cdot n_y$) tendrá valor escalar positivo y representará el valor del flujo 'entrante' q_n en positivo.

$$\int_{S_q} w \cdot q_n \cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

Flujo Normal Entrante q_n será un valor escalar positivo si el flujo normal es efectivamente entrante y negativo si es el flujo es 'saliente'.

PI-1 b) Considérese ahora una condición de convección en el contorno, dada por $\hat{q}_n = h \cdot (T_f - T)$ sobre S_q. Para este caso, deducir la nueva forma débil y deducir también la aportación matricial de un elemento $\mathbf{K^e \cdot d^e \rightarrow f^e}$ en el problema de flujo de calor. Hacerlo para un elemento genérico e. Dejar la matriz de 'rigidez' y vector de 'cargas' en términos de las integrales que afectan a las funciones base $[N^e]$ y sus derivadas$[B^e]$.

Mostrar las contribuciones a $\mathbf{K^e}$ y a $\mathbf{f^e}$ que resultan de esta condición convectiva en el contorno.

PI-1 b) Solución

Con la condición de convección en S_q dada por $\hat{q}_n = h \cdot (T_f - T)$, la nueva forma débil es:

$$\int_{S_q} w \cdot h \cdot (T_f - T) \cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

$$\int_{S_q} w \cdot h \cdot T_f \cdot ds - \int_{S_q} w \cdot h \cdot T \cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

$$\int_{S_q} w \cdot h \cdot T \cdot ds + \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dA = \int_{S_q} w \cdot h \cdot T_f \cdot ds + \iint_A w \cdot Q \cdot dA = 0$$

En forma matricial:

$$\iint_A \nabla w^T \cdot [k] \cdot \nabla T \cdot dA + \int_{S_q} w \cdot h \cdot T \cdot ds = \iint_A w \cdot Q \cdot dA + \int_{S_q} w \cdot h \cdot T_f \cdot ds$$

Sustituyendo las integrales por la suma sobre los elementos finitos A^e, e=1,...nel=E

$$\sum_{e=1}^{nel} \iint_{A^e} \nabla w^{eT} \cdot [k] \cdot \nabla T^e \cdot dA^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{S_q{}^e} w^e \cdot h \cdot T^e \cdot ds^e = \sum_{e=1}^{nel} \iint_A w^e \cdot Q \cdot dA^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{S_q{}^e} w^e \cdot h \cdot T_f \cdot ds$$

donde, recordando las notas de clase, L12, p29:

$T^e(x,y)=[N^e] \cdot L^e \cdot \{d\}$, d es el vector de temperaturas en los nodos, $[N^e]$: vector fila, funciones de forma en e.

$\nabla T^e(x,y)=[B^e] \cdot L^e \cdot \{d\}$, $[B^e]$, matriz de derivadas 1as de $[N^e]$ en e, L^e. matriz de acople de e a matriz global.

$w^e(x,y)=W^T \cdot L^{eT} \cdot [N^e]^T$, W: vector columna con coeficientes de función de prueba w(x,y) .

$\nabla w^e = W^T \cdot L^{eT} \cdot [B^e]^T$.

La ecuación matricial para ls formulación por elementos finitos queda:

$$W^T \sum_{e=1}^{nel} \iint_{A^e} L^{eT} \cdot [B^e]^T \cdot [k] \cdot [B^e] \cdot L^e \cdot \{d\} dA^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{S_q{}^e} L^{eT} \cdot [N^e]^T h \cdot [N^e] \cdot L^e \cdot \{d\} \cdot ds^e =$$

$$= W^T \cdot \sum_{e=1}^{nel} \iint_A L^{eT} \cdot [N^e]^T \cdot Q \cdot dA^e + \int_{S_q{}^e} L^{eT} \cdot [N^e]^T \cdot h \cdot T_f \cdot ds^e$$

o simplificando:

$$W^T \sum_{e=1}^{nel} L^{eT} \left(\iint_{A^e} \cdot [B^e]^T \cdot [k] \cdot [B^e] \cdot dA^e + \int_{S_q{}^e} [N^e]^T h \cdot [N^e] \cdot ds^e \right) \cdot L^e \cdot \{d\} =$$

$$= W^T \cdot \sum_{e=1}^{nel} L^{eT} \left(\iint_A \cdot [N^e]^T \cdot Q \cdot dA^e + \int_{S_q{}^e} [N^e]^T \cdot h \cdot T_f \cdot ds^e \right)$$

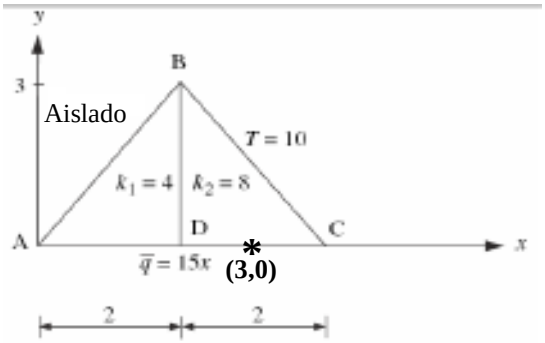
donde la contribución del elemento a la matriz de 'rigidez' y al vector de cargas son:es

$$K^e = \iint_{A^e} \cdot [B^e]^T \cdot [k] \cdot [B^e] \cdot dA^e + \int_{S_q{}^e} h \cdot [N^e]^T \cdot [N^e] \cdot ds^e$$

$$f^e = \iint_A \cdot [N^e]^T \cdot Q \cdot dA^e + \int_{S_q{}^e} h \cdot [N^e]^T \cdot T_f \cdot ds^e$$

Problema PI-2. Conducción del calor en un dominio 2D compuesto con 2 materiales (cálculo manual)

(Prob. 8.2 Fish, J., Belytschko, T. "A First Course in Finite Elements". Ed. Wiley, 2007)



Considérese una placa triangular compuesta de dos materiales isotrópicos con conductividades térmicas k_1=4 W·ºC^{-1} y k_2=8 W·ºC^{-1} indicados en la figura, en la que las dimensiones son en metros.

Sobre el lado BC se impone una temperatura constante de T=10 ºC^{-1}.

El lado AB está aislado térmicamente.

Sobre el lado AC se aplica un flujo dado por una distribución lineal $\bar{q}$=15x W·m^{-1}.

En el punto x=3, y=0, se aplica una fuente puntual P=45 W.

Para la malla de elementos finitos, considérense dos elementos triangulares, ABD y BDC. Operando a mano, obtener la temperatura y la distribución de flujos en la placa.

PI-2 Solución

Recuérdese la expresión final de la forma débil dada en la diapositiva 25 de la L13 de clase.

$$\mathrm{W}^{\mathrm{T}}\cdot\sum_{e=1}^{E} L^{eT}\cdot\int_{\mathrm{A}^e}\underbrace{B^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\cdot\mathrm{D}^{\mathrm{e}}\cdot B^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{dA}^{\mathrm{e}}}_{K^e}\cdot L^e\cdot\{d\}=\mathrm{W}^{\mathrm{T}}\cdot\sum_{e=1}^{E} L^{eT}\underbrace{\left(\int_{\mathrm{A}^e} N^{eT}\cdot f\cdot dA^e-\int_{\Gamma^e} N^{eT}\cdot\bar{q}\cdot d\Gamma\right)}_{F^e}\cdot \quad \square \text{ vector W } nulo\ en\ \Gamma_T$$

$$B^e=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathrm{N}_1^{\mathrm{e}}}{\partial \mathrm{x}}\cdots\frac{\partial \mathrm{N}_{\mathrm{ne}}^{\mathrm{e}}}{\partial \mathrm{x}}\\ \frac{\partial \mathrm{N}_1^{\mathrm{e}}}{\partial \mathrm{y}}\cdots\frac{\partial \mathrm{N}_{\mathrm{ne}}^{\mathrm{e}}}{\partial \mathrm{y}}\end{bmatrix}=\frac{1}{2\cdot A^e}\begin{bmatrix}y_2^e-y_3^e & y_3^e-y_1^e & y_1^e-y_2^e\\ x_3^e-x_2^e & x_1^e-x_3^e & x_2^e-x_1^e\end{bmatrix}$$

$$2\cdot A^e=(x_2^e\cdot y_3^e-x_3^e\cdot y_2^e)-(x_1^e\cdot y_3^e-x_3^e\cdot y_1^e)+(x_1^e\cdot y_2^e-x_2^e\cdot y_1^e)$$

$$[K^e]=\int_{\mathrm{A}^e} B^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\cdot[\mathrm{k}]\cdot B^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{dA}^{\mathrm{e}}=B^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\cdot[\mathrm{k}]\cdot B^{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{e}}$$

$N^e=[N_1^e,\ldots,N_{ne}^e]$

d_E: T conocida en nodos borde, condiciones esenciales

d_r: el resto de coeficientes, son incógnitas, T en nodos no esenciales

$$\begin{bmatrix}K_E & K_{Er}\\ K_{rE} & K_r\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}d_E\\ d_r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_E+r_E\\ f_r\end{Bmatrix},\ d_r,\ r_E\ (desconocidos)$$

$$\mathrm{K_r\cdot d_r=f_r-K_{rE}\cdot d_E}$$

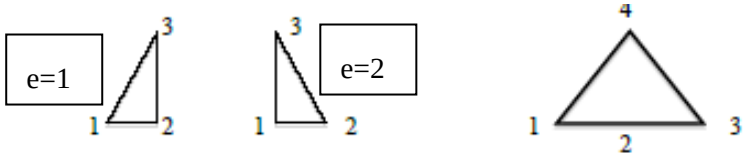
Los elementos r_E sólo son no nulos en las 'filas' asociadas a valores nodales 'Esenciales'

En este ejemplo, puesto que la temperatura en BC es dada T=10ºC, los nodos B y C, tienen numeración global, 3 y 4 se puede describir r=[0,0,r_3,r_4]^T .

Referencia para Local y Global para los Nodos:

e=1: Local 1-2-3, corresp. Glob: 1-2-4

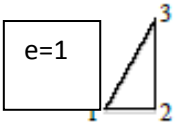
e=2: Local 1-2-3, corresp. Glob: 2-3-4

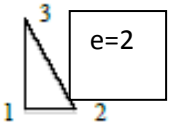


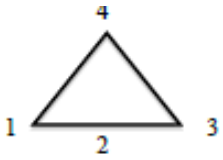
Para el elemento 1., e=1: $2\cdot A^1=6$

$$B^1=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix},\quad B^{1^T}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\qquad [K^1]=B^{1^T}\cdot 4\cdot B^1\cdot A^1=\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\ -3 & 13/3 & -4/3\\ 0 & -4/3 & 4/3\end{bmatrix}$$

Para el elemento 2., e=2: $2\cdot A^2=6$







$$B^2=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-3 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B^{1^T}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\qquad [K^2]=B^{2^T}\cdot 4\cdot B^2\cdot A^2=\frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix}13 & -9 & -4\\ -9 & 9 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

e=1: Local 1-2-3, corresp. Glob: 1-2-4

e=2: Local 1-2-3, corresp. Glob: 2-3-4

El ensamblado da: $K=\begin{bmatrix}3+0 & -3+0 & 0+0 & 0+0\\ -3+0 & \frac{13}{3}+\frac{26}{3} & 0-\frac{18}{3} & -\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\\ 0+0 & 0-\frac{18}{3} & 0+\frac{18}{3} & 0+0\\ 0+0 & -\frac{4}{3}-\frac{8}{3} & 0+0 & \frac{4}{3}+\frac{8}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 0 & 0\\ -3 & 13 & -6 & -4\\ 0 & -6 & 6 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 4\end{bmatrix}$

El vector independiente (de 'fuerzas'): F = f_Γ + f_A +r . $\qquad f_\Gamma^e=-\int_{\Gamma^e}[N^e]^T\cdot\bar{q}\cdot d\Gamma^e$

f_Γ provendrá de la condición de flujo en el borde AC, de valor $\bar{q}=15\cdot x$:

En AC las funciones base no nulas globales son N_1, N_2, N_3. Veamos por elementos:

En e=1, en AC

$N_1^1(x,y=0)=1-x/2$

$N_2^1(x,y=0)=x/2$

$N_3^1(x,y=0)=0$

$$f^1_{\Gamma\,y=0}=-\int_0^2\begin{bmatrix}1-x/2\\ x/2\\ 0\end{bmatrix}\cdot 15\cdot x\cdot dx=\begin{bmatrix}-10\\ -20\\ 0\end{bmatrix}$$

En e=2

$N_1^2(x,y=0)=2-x/2$

$N_2^2(x,y=0)=-1+x/2$

$N_3^2(x,y=0)=0$

$$f^2_{\Gamma\,y=0}=-\int_2^4\begin{bmatrix}2-x/2\\ -1+x/2\\ 0\end{bmatrix}\cdot 15\cdot x\cdot dx=\begin{bmatrix}-40\\ -50\\ 0\end{bmatrix}$$

Ensamblando: $f_\Gamma=\begin{bmatrix}-10+0\\ -20-40\\ 0-50\\ 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\ -60\\ -50\\ 0\end{bmatrix}$

En cuanto a f_A, $\qquad f_A=\int_{A^e}N^{e^T}\cdot f\cdot dA^e$

en este problema no hay una 'fuente' distribuida por el dominio, sino que hay una fuente 'puntual' P=45 W, actuando sobre el punto x=3, y=0. Para su representación se emplea la función 'delta' de Dirac, δ(x-3,y-0). Recordar en notas de clase L12. Actúa en el elemento 2, sobre su lado 1-2 (local), 2-3 (global).

$$f_A^2 = \int_{A^2} P \cdot [N]^2 \cdot \delta(x-3, y-0) \cdot dA^2 = \int_{A^2} 45 \cdot \begin{Bmatrix} N_1^2 \\ N_2^2 \\ N_3^2 \end{Bmatrix} \cdot \delta(x-3, y-0) \cdot dA^2 =$$

$$= \int_{A^2} 45 \cdot \begin{Bmatrix} -(x-4)/2 \\ (x-2)/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \delta(x-3, y-0) \cdot dA^2 = 45 \cdot \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45/2 \\ 45/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El elemento 1 no contribuye a f_A. Globalmente: $f_A=[0+0,0+45/2,0+45/2, 0+0]^T=[0,45/2,45/2,0]^T$.

Ensamblando vectores independientes en el sistema global:

(los nodos esenciales son 3 y 4) $\begin{bmatrix} K_E & K_{Er} \\ K_{rE} & K_r \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_E \\ d_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E + r_E \\ f_r \end{Bmatrix}$, d_r, r_E *(desconocidos)*

$$f_\Gamma + f_A + r = \begin{Bmatrix} -10+0+0 \\ -60+45/2+0 \\ -50+45/2+r_3 \\ 0+0+r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -75/2 \\ -55/2+r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix}$$

Y el sistema global [K]·T=f, teniendo en cuenta las condiciones esenciales: $T_3=T_4=10$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 13 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -75/2 \\ -55/2+r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix}$$

$K_r \cdot d_r = f_r - K_{rE} \cdot d_E$

Se resuelve:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -\frac{75}{2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10-0 \\ -\frac{75}{2}+100 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ \frac{125}{2} \end{Bmatrix}$$

T_1=1.9167 , T_2=5.25 r_3=56 , r_4=19

El vector flujo se puede calcular para cada elemento (ecuaciones constitutivas, Lec10): **q**=-K·∇T

Recuérdese (Lec12) :

$$\nabla T^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^e}{\partial x} \\ \frac{\partial T^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \cdot T_1^e + \ldots + \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} \cdot T_{ne}^e \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \cdot T_1^e + \ldots + \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \cdot T_{ne}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \ldots \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \ldots \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^e \\ \vdots \\ T_{ne}^e \end{bmatrix} = [B^e(x,y)] \cdot \{d^e\} = [B^e] \cdot L^e \cdot \{d\}$$

Para elementos triangulares lineales (3 nodos), la matriz B^e es constante (Lec 11):

$$B^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \ldots \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \ldots \frac{\partial N_{ne}^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot A^e} \begin{bmatrix} y_2^e - y_3^e & y_3^e - y_1^e & y_1^e - y_2^e \\ x_3^e - x_2^e & x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix}$$

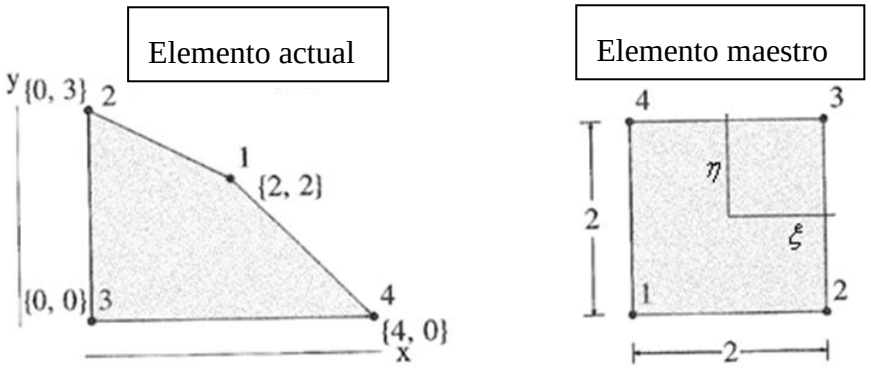
Elemento 1: $$\{q^1\} = \begin{Bmatrix} q_x^1 \\ q_y^1 \end{Bmatrix} = -k^1 \cdot B^1 \cdot \{d^1\} = -4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.9167 \\ 5.25 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.667 \\ -6.333 \end{bmatrix}$$

Elemento 2: $$\{q^2\} = \begin{Bmatrix} q_x^2 \\ q_y^2 \end{Bmatrix} = -k^2 \cdot B^2 \cdot \{d^2\} = -8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 5.25 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -12.667 \end{bmatrix}$$

Obsérvese el flujo de calor en ambos casos, de la zonas ‘calientes’ (BC=3-4) a las ‘frías’ (AD=1-2)

Problema PI-3 . Transformación de cuadriláteros. (cálculos a mano))

Se considera el elemento cuadrilátero de 4 nodos de la figura, y su imagen transformada a un elemento maestro o tipo:



PI-3.a) Desarrollar una transformación adecuada para transformar el elemento actual en el elemento 'maestro' 2x2 mostrado en la figura.

PI-3.b) Comprobar que la transformación es correcta (invertible).

PI-3.c) Deducir la expresión de $N_3(x,y)$ en los 4 bordes del elemento actual en x-y.

Calcular $\partial N_3/\partial y$ en el nodo 3 (0,0) del elemento en (x,y), donde $N_3(x,y)$ es la tercera función de interpolación global y $\hat{N}_3(\xi,\eta)$ su expresión en el elemento maestro respectivamente. Calcular también el valor de esa derivada para cualquier punto del lado 2-3 (0,3)-(0,0). Para $\partial N_3/\partial y$ en el nodo 3 (0,0) de X-Y hacer los cálculos en el elemento maestro, donde al punto 3 (0,0) le corresponden las coordenadas ξ,η: (1,1), y al lado 2-3 le corresponde el lado ξ=1, entre los puntos (1,-1) y (1,1) del dominio ξ,η.

PI-3.d) Calcular $\iint_A 64 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot dA$ donde $N_2(x,y)$ y $N_3(x,y)$ son la segunda y tercera funciones de interpolación y A es el área del elemento actual. Utilizar integración numérica con una regla de Gauss-Legendre de tipo 1x1.

PI-3.e) Calcular $\int_C 4 \cdot N_{3C}\, dc$ donde C es el lado 3-4 del elemento, dc es el diferencial de longitud de arco a lo largo del lado 3-4 y N_{3C} es la tercera función de interpolación del elemento maestro expresada en un parámetro que varía a lo largo de ese lado. Utilizar integración numérica con una regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base. Realizar la integral del mismo integrando a lo largo del otro lado del cuadrilátero en que no se anula, esto es, el lado 2-3. Obtener asimismo las integrales de N_1, N_2, N_4 a lo largo de los lados del elemento cuadrilátero en que no se anula cada una de ellas. Realizar las integrales empleando métodos geométricos, analíticos y numéricos (Gauss-Legendre).

PI-3.a) Solución

Desarrollar una transformación adecuada para transformar el elemento actual en el elemento 'maestro' 2x2 mostrado en la figura. (Lec13 pg 9, 12)

$$x = \sum_{j=1}^{M} x_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta) \;,\; y = \sum_{j=1}^{M} y_j \cdot \hat{N}_j(\xi,\eta)$$

$$\hat{N}_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1-\eta) = \frac{1}{4}(1-\eta-\xi+\xi\cdot\eta)$$
$$\hat{N}_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1-\eta) = \frac{1}{4}(1-\eta+\xi-\xi\cdot\eta)$$
$$\hat{N}_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)\cdot(1+\eta) = \frac{1}{4}(1+\eta+\xi+\xi\cdot\eta)$$
$$\hat{N}_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)\cdot(1+\eta) = \frac{1}{4}(1+\eta-\xi-\xi\cdot\eta)$$

$x=4\cdot N_4(x,y)+2\cdot N_1(x,y)=4\cdot \hat{N}_4(\xi,\eta) + 2\hat{N}_1(\xi,\eta)$

$y=2\cdot N_1(x,y)+3\cdot N_2(x,y)=2\cdot \hat{N}_1(\xi,\eta) + 3\hat{N}_2(\xi,\eta)$

operando: $x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4$

** Es conveniente recordar el modo en que están definidas para el elemento cuadrilátero irregular las 4 funciones base $N_j(x,y)$, j=1, 2, 3, 4 que son no nulas en el elemento considerado.

Se trata de una representación en forma paramétrica de cada parche:

N1(x,y):

$x(\xi,\eta)=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2$, $y(\xi,\eta)=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4$, $z(\xi,\eta)=(1-\eta-\xi+\xi\cdot\eta)/4$

$(\xi,\eta)\in[-1,1]x[-1,1]$

En los bordes del elemento, cada Nj (j=1,2,3,4, numeración 'local') es lineal, vale 1 en su nodo asociado y 0 en los demás. Al considerar los diferentes elementos y las funciones base globales, estas comparten los valores de las $N_j(x,y)$ entre elementos, que se comportan linealmente y por tanto hay continuidad C^0 entre elementos para la solución aproximada, que resulta de combinar las funciones base globales.

En forma explícita, N1(x,y) NO ES POLINOMICA, en su expresión hay raíces cuadradas.

Veamos esto con más detalle.

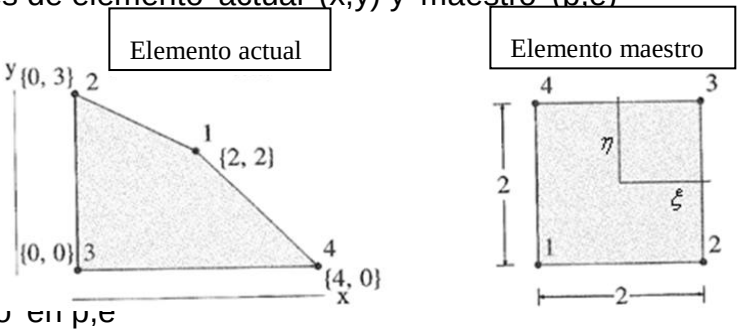
% e es η p es ξ . Se trata del ej HW6 P3

Despejemos η y ξ en el cambio de variable empleando Matlab.

```
[e,p]=solve('(3+e-3*p-p*e)/2-x=0','(5-5*e+p-p*e)/4-y=0','p,e')
 e =
 x/6 - y/3 + (x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)^(1/2)/3 - 1
 x/6 - y/3 - (x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)^(1/2)/3 - 1
p =
  y/2 - x/4 + (x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)^(1/2)/2 - 2
 y/2 - x/4 - (x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)^(1/2)/2 - 2
 % la segunda solución no vale pues p y e no se salen de [-1,1]
>> e=e(1);p=p(1)
```

% Se comprueba la correspondencia de vértices de elemento 'actual' (x,y) y 'maestro' (p,e)

```
>> x=4;y=0; eval(p), eval(e), ans = -1  ans = 1
>> x=2;y=2; eval(p), eval(e), ans = -1  ans = -1
>> x=0;y=3; eval(p), eval(e), ans =  1  ans = -1
>> x=0;y=0; eval(p), eval(e), ans =  1  ans =  1
```



% la f. de forma N1 en el elemento maestro:

```
>> N1=(1-e-p+p*e)/4;% Este es el N1 'sombrero' en p,e
>> N1=simple(N1) = 3 - y/2 - (x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)^(1/2)/2 - x/4
```

OBSERVAR QUE NO ES UN POLINOMIO EN X,Y, EN FORMA EXPLICITA,TIENE RAICES CUADRADAS,

Recordar que EN FORMA PARAMETRICA, N1 SE EXPRESA MENDIANTE COMPONENTES POLINOMICAS:

N1(x,y): $x(\xi,\eta)=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2$, $y(\xi,\eta)=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4$, $z(\xi,\eta)=(1-\eta-\xi+\xi\cdot\eta)/4$

con $(\xi,\eta)\in[-1,1]x[-1,1]$

Comprobemos que N1 (x,y) cumple las condiciones requeridas (el nodo 1 es (2,2)

```
>> x=2;  y=2; eval(N1)  ,  ans =     1       >> x=0;y=0;eval(N1) , ans =     0
>> x=4;  y=0; eval(N1)  ,  ans =     0       >> x=0;y=3;eval(N1) , ans =     0
```

Por otra parte, N1(x,y) se puede expresar de forma implícita como una superficie algebraica (polinómica)

z=3 - y/2 - (x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)^(1/2)/2 - x/4; agrupando:

(z-3+y/2+x/4)·2=sqrt(x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36), elevando al cuadrado, queda:

$f(x,y,z)=0$, $(z-3+y/2+x/4)^2-(x^2/4 - x*y - 6*x + y^2 - 12*y + 36)=0$, una de cuyas componentes es la función de forma N1(x,y) del ejercicio

.----------

PI-3.b) Solución Comprobar que la transformación es correcta (invertible).

|J|? $\partial x/\partial\xi = (-3-\eta)/2$ $\partial x/\partial\eta = (1-\xi)/2$

$\partial y/\partial\xi = (1-\eta)/4$ $\partial y/\partial\eta = (-5-\xi)/4$

$|J| = 7/4 + \xi/2 + 3\eta/4$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Jacobiana } [J]} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}$$

|J| es siempre >0 para puntos de ambos recintos, ('peor' punto (-1,-1), |J|=1/2)

Luego la transformación es invertible por ser |J| siempre positivo.

PI-3.c) Deducir la expresión de $N_3(x,y)$ en los 4 bordes del elemento actual en X-Y.

Calcular $\partial N_3/\partial y$ en el nodo 3 (0,0) del elemento en (x,y), donde $N_3(x,y)$ y es la tercera función de interpolación global y $\hat{N}_3(\xi,\eta)$ en el elemento maestro respectivamente. Calcular también el valor de esa derivada para cualquier punto del lado 2-3 (0,3)-(0,0). Para $\partial N_3/\partial y$ en el nodo 3 (0,0) de X-Y hacer los cálculos en el elemento maestro, donde al punto 3 (0,0) le corresponden las coordenadas ξ,η: (1,1), y al lado 2-3 le corresponde el lado ξ=1, entre los puntos (1,-1) y (1,1) del dominio ξ,η.

Solución

$N_3(x,y) = \hat{N}_3(\xi,\eta)$

. En el lado 1-2, η=-1, luego: $= \hat{N}_3(\xi,-1) = N_3(x,y) = 0$, se tiene que:

x=1-ξ, con ξ∈[-1,1] , esto es x varía de 2 a 0, y=(5+ξ)/2, · con ξ∈[-1,1] , esto es y varía de 2 a 3

. En el lado 2-3, ξ=1, luego: $= \hat{N}_3(1,C = (1+\eta)/2 = N_3(x,y)$, se tiene que:

x=(3+η-3ξ-ξ·η)/2=0 , y=(5-5η+ξ-ξ·η)/4=3/2-3η/2, ·η=1-2y/3 , $N_3(x,y)=1-y/3$, eso es, para x=0 es una función lineal que vale 1en (0,0) y 0 en (0,3).

. En el lado 3-4, η=1, luego: $= \hat{N}_3(\xi,1) = (1+\xi)/2 = N_3(x,y)$, se tiene que:

x=(3+η-3ξ-ξ·η)/2=2-2ξ , ξ=1-x/2, y=0, $N_3(x,y)=(2-x/2)/2=1-x/4$, esto es, para y=0 es una función lineal que vale 1en (0,0) y 0 en (4,0).

. En el lado 4-1, ξ=-1, luego: $= \hat{N}_3(-1,\eta) = N_3(x,y) = 0$, se tiene que:

x=1-ξ, con ξ∈[-1,1] , esto es x varía de 2 a 0, y=2-2η, · con η∈[-1,1] , esto es y varía de 4 a 2 .

Entendiendo la forma geométrica de $N_3(x,y)$, nos fijamos en que es un polinomio en x,y, que vale 1 en el nodo 3 (0,0) y 0 en los nodos 1, 2, y 4. Además $N_3(x,y)$ sobre 2-3 varía linealmente, pues en el dominio se corresponde con el lado 2-3 del elemento maestro, ξ=1, y sobre dicho lado, x e y son funciones lineales de η, luego describen una recta.

Para ver la derivada parcial, para cualquier punto de 2-3, entre ellos el 3 (0,0) se tiene:

$\partial N_3/\partial y = (0-1)/3-0) = -1/3$

El nodo 3 del elemento es (0,0) que se corresponde con (1,1) en el elemento maestro. Vamos a calcular la derivada respecto a y en el nodo 3, operando con el elemento maestro

$$\frac{\partial N_3(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-1}{|J|}.\sum_{k=1}^{M} x_k \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \eta}\ ,\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J|}.\sum_{k=1}^{M} x_k \frac{\partial \hat{N}_k(\xi,\eta)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \eta} = (1+\xi)/4 \quad \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial \eta} = (-1-\xi)/4 \quad \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \eta} = (1+\xi)/4 \quad \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial \eta} = (1-\xi)/4$$

$$\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \xi} = (-1+\eta)/4 \quad \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial \xi} = (1-\eta)/4 \quad \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \xi} = (1+\eta)/4 \quad \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial \xi} = (-1-\eta)/4$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{-1}{|J|}\cdot\left(x_1\cdot\frac{\partial \hat{N}_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}+x_2\cdot\frac{\partial \hat{N}_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}+x_3\cdot\frac{\partial \hat{N}_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}+x_4\cdot\frac{\partial \hat{N}_4(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)=\frac{-1}{|J|}\left(2\cdot\frac{\partial \hat{N}_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}+4\cdot\frac{\partial \hat{N}_4(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\cdot\left(x_1\cdot\frac{\partial \hat{N}_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}+x_2\cdot\frac{\partial \hat{N}_2(\xi,\eta)}{\partial \xi}+x_3\cdot\frac{\partial \hat{N}_3(\xi,\eta)}{\partial \xi}+x_4\cdot\frac{\partial \hat{N}_4(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)=\frac{1}{|J|}\left(2\cdot\frac{\partial \hat{N}_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}+2\cdot\frac{\partial \hat{N}_4(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{-1}{|J|}\left(2\cdot\frac{\partial \hat{N}_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}+4\cdot\frac{\partial \hat{N}_4(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)=\frac{-1}{|J|}\cdot(2\cdot(-1+\xi)/4+4\cdot(1-\xi)/4)=\frac{-1}{|J|}(1-\xi)/2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\left(2\cdot\frac{\partial \hat{N}_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}+4\cdot\frac{\partial \hat{N}_4(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)=\frac{1}{|J|}(2\cdot(-1+\eta)/4+4\cdot(-1-\eta)/4)=\frac{-1}{|J|}(3+\eta)/2$$

El nodo 3 (0,0) en (x,y), se corresponde con nodo 3 (1,1) en el dominio ξ-η del elemento maestro.

Para ese punto:

|J|=7/4+1/2+3/4=12/4=3

$\frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \xi}=1/2$ $\frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \eta}=1/2$ $\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$ $\frac{\partial \eta}{\partial y}=-2/3$, luego $\frac{\partial N_3}{\partial y}\Big]_{(0,0)}=(1/2)\cdot 0+(1/2)\cdot(-2/3)=-1/3$

En general, se puede escribir:

$$\frac{\partial N_3(x,y)}{\partial y}=\frac{1+\eta}{4}\cdot\frac{-1}{|J|}\cdot\frac{1-\xi}{2}+\frac{1+\xi}{4}\cdot\frac{-1}{|J|}\cdot\frac{3+\eta}{2}$$

Para todos los puntos del segmento 2-3, ξ=1 , luego en ellos:

|J|=3·(3+η)/4

$$\frac{\partial N_3(x,y)}{\partial y}=0+\frac{1+1}{4}\cdot\frac{-1}{3(3+\eta)/4}\cdot\frac{3+\eta}{2}=\frac{-1}{3}$$

PI-3.d) Calcular $\iint_A 64\cdot N_2\cdot N_3\cdot dA$ donde $N_2(\xi,\eta)$ y $N_3(\xi,\eta)$ son la segunda y tercera funciones de interpolación y Ω es el área del elemento actual y A la del maestro, . Utilizar integración numérica con una regla de Gauss-Legendre de tipo 1x1.

Solución

$$\iint_\Omega 64\cdot N_2(x,y)\cdot N_3(x,y)d\Omega=\iint_A 64\cdot|J|\cdot\hat{N}_2(\xi,\eta)\cdot\hat{N}_3(\xi,\eta)dA$$

Con un solo punto base de Gauss-Leg, (0,0) en (ξ,η), peso: $w_0\cdot w_0=2\cdot 2=4$

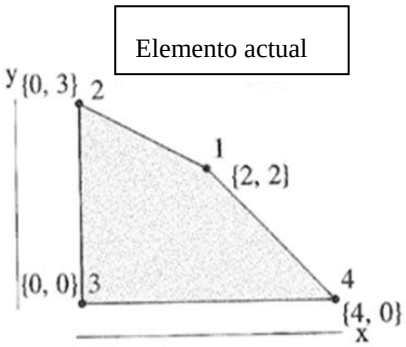
$$\iint_\Omega 64\cdot N_2(x,y)\cdot N_3(x,y)d\Omega=\iint_A 64\cdot|J|\cdot\hat{N}_2(\xi,\eta)\cdot\hat{N}_3(\xi,\eta)dA\approx$$

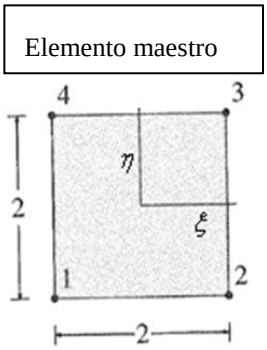
$$\approx 64\cdot|J|_{(0,0)}\cdot\hat{N}_2(0,0)\cdot\hat{N}_3(0,0)\cdot w_0\cdot w_0=64\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4=28$$

PI-3.e) Calcular $\int_C \ 4 \cdot N_{3C}\, dc$ donde C es el lado 3-4 del elemento, dc es el diferencial de longitud de arco a lo largo del lado 3-4 y N_{3C} es la tercera función de interpolación del elemento maestro expresada en un parámetro que varía a lo largo de ese lado. Utilizar integración numérica con una regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base. Realizar la integral del mismo integrando a lo largo del otro lado del cuadrilátero en que no se anula, esto es, el lado 2-3. Obtener asimismo las integrales de N_1, N_2, N_4 a lo largo de los lados del elemento cuadrilátero en que no se anula cada una de ellas. Realizar las integrales empleando métodos geométricos, analíticos y numéricos (Gauss-Legendre)

Realizar la integración de $\int_C \ 4 \cdot N_{iC}\, dc$ i=1, 2, 4, para las restantes funciones de forma, a lo largo de los lados C en que se no se anulan idénticamente cada una de ellas. Todas las integrales curvilíneas sobre tramos C de borde se realizan en sentido antihorario.

Solución





INTEGRACIÓN de N_{3C}

Caso en que C es el lado [3-4] en el dominio x-y

Enfoque I (Geométrico) ,

. En el lado 3-4, η=1, luego: = $\widehat{N}_3(\xi,1)$ =(1+ξ)/2 = $N_3(x,y)_C$, se tiene que:

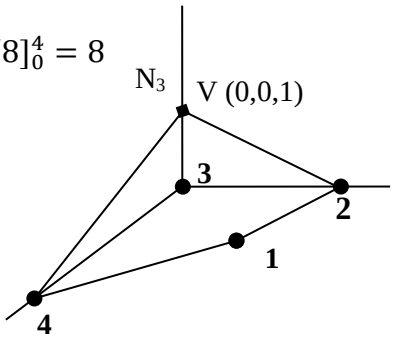
x=(3+η-3ξ-ξ·η)/2=2-2ξ , ξ=1-x/2, y=0, $N_3(x,y)]_C$ =(2-x/2)/2=1-x/4, esto es, para y=0 es una función lineal que vale 1en (0,0) y 0 en (4,0).

* La integral pedida es el área bajo la curva 4·N3 a lo largo del segmento [3-4], esto es: 4·(4·1)/2=8

Enfoque II (analítico)

Directo

$*\int_C \ 4 \cdot N_{3C}\, dc = \int_C \ 4 \cdot (1 - x/4)\, dc = \int_0^4 4 \cdot (1 - x/4)\, dx = 4 \cdot [x - x^2/8]_0^4 = 8$



. La curva C es y=0, con x en [0, 4],

$.el\ diferencial\ de\ arco: dc = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ =dx

. y el integrando z=4·(1-x/4), pues N_{3C} sobre [3-4] es 1-x/4

Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C \ 4 \cdot N_{3C}\, dc$ Mediante el cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro ξ-η

. En el lado 3-4, η=1, y el segmento 3-4 de x-y se transforma en 3-4 en ξ-η con η=1 y ξ variando de 1 (en pto 3) a -1 (en pto 4)

. En el lado 3-4, η=1, luego $N_3(x,y)_C$ = N_{3C} = $\widehat{N}_3(\xi,1)$ =(1+ξ)/2 , se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=1}$=2-2ξ , y=0, x=2-2ξ , y=0

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación para el computador, interesa que en el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Así que SE HACE EL CAMBIO DE VARIABLE: ξ=-ξ', con lo que se tendrá:

N_{3C} = $\widehat{N}_3(-\xi',1)$ =(1-ξ')/2 =$\widetilde{N}_3(\xi')$

Y la curva C: x=2+2ξ' , y=0, dx=2dξ' , dy=0

Así, el diferencial de arco crece dc en el mismo sentido que la variable ξ', y se escribe:

dc=$\sqrt{dx^2+dy^2}$ =[(∂x(ξ',1)/∂ξ'·dξ')^2+∂y(ξ',1)/∂ξ'·dξ')^2]$^{1/2}$=2·dξ'

Y la integral:

* $\int_C 4\cdot N_{3C}\,dc = 4\cdot\int_{-1}^{1}\widetilde{N}_3(\xi')\cdot 2\cdot d\xi' = 4\cdot\int_{-1}^{1}((1-\xi')/2)\cdot 2\cdot d\xi' = 4\cdot[\xi'-\xi'^2/2]_{-1}^{+1}$ =4·(1-(-1)=8

<u>Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)</u>

<u>(Es el que se utiliza en un programa de computador)</u>

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $\widehat{N}_3(\xi,\eta)=(1+\xi)\cdot(1+\eta)/4$, $N_{3C}=\widehat{N}_3(\xi,1)=(1+\xi)/2$, ξ varía de 1 a -1 ,

. Cambio de variable para obtener la transformada de C en la variable ξ:

x=(3+η-3ξ-ξ·η)/2] $_{\eta=1}$=2-2·ξ , y=(5-5η+ξ-ξ·η)/4] $_{\eta=1}$=0,

x=2-2·ξ , y=0

. Cambio de variable ADICIONAL para obtener la integración en [-1,1] en lugar de en [1,-1] y que el crecimiento de la longitud de arco dc corresponda con el de la variable de integración: ξ=-ξ',

x=2+2·ξ' , y=0 , dx=2dξ' , dy=0

N_{3C}=(1-ξ')/2 , dc=$\sqrt{dx^2+dy^2}$ =[∂x(ξ',1)/∂ξ'·dξ')^2+∂y(ξ',1)/∂ξ'·dξ')^2]$^{1/2}$=(2^2+0)$^{1/2}$·dξ'=2·dξ'

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dcde variable longitud de arco de C y la dξ': dc=|j|·dξ' |j|=[∂x(ξ',1)/∂ξ')^2+∂y(ξ',1)/∂ξ')^2]$^{1/2}$=(2^2+0)$^{1/2}$= 2

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

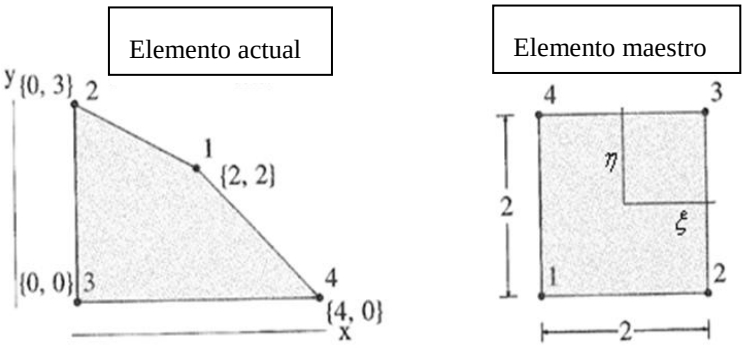
Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg ξ'$_0$=-1/√3, w$_0$= 1; ξ'$_1$=1/1/√3, w$_1$= 1

$N_{3C}]_{-1/\sqrt{3}}$=(1+1/√3)/2 , $N_{3C}]_{1/\sqrt{3}}$=(1-1/√3)/2

* $\int_C 4\cdot N_{3C}\,dc \approx I_{G\text{-}L}=\sum_0^1 4\cdot N_{3C}]_i\cdot w_i\cdot|j|$=4·(1+1/√3)/2·1·2+4·(1-1/√3)/2·1·2=8

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

Caso en que C es el lado [2-3] en el dominio x-y



<u>Enfoque I (Geométrico)</u> ,

. En el lado 2-3, ξ=1,

. luego: = $\widehat{N}_3(1,\eta)$ =(1+η)/2 = $N_3(x,y)_C$,

. se tiene que:

x=(3+η-3ξ-ξ·η)/2=0 ,

y=(5-5η+ξ-ξ·η)/4=3/2-3η/2 ·, η=1-2y/3 , $N_3(x,y)$=1-y/3, eso es, para x=0 es una función lineal que vale 0 en (0,3) y 1en (0,0).

* La integral pedida es el área bajo la curva 4·N3 a lo largo del segmento [2-3], esto es: 4·(3·1)/2=6

Enfoque II (analítico)

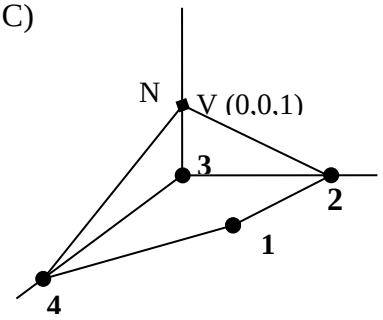
Directo

* $\int_C 4\cdot N_{3C}\,dc = \int_C 4\cdot(1-y/3)\,dc = \int_3^0 4\cdot(1-y/3)\,(-dy) = 4\cdot[y-y^2/6]_0^3 = 6$

. La curva C , [2-3] es x=0, con y ente 3 y 0, . *el diferencial de arco*: $dc=\sqrt{dx^2+dy^2}$ =-dy , pues se avanza

en sentido negativo (pensar en la integral como límite de incrementos de C)

. y el integrando z=4·(1-y/3), pues N_{3C} sobre [2-3] es 1-y/3



Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4 \cdot N_{3C}\, dc$, mediante cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro en ξ-η

. En el lado 2-3, ξ=1, y el segmento 2-3 de x-y se transforma en 2-3 en ξ-η con ξ=1 y η variando de -1 (en pto 2) a +1 (en pto 3).

. En el lado 2-3, ξ=1, luego $N_3(x,y)_C = N_{3C} = \widehat{N}_3(1, \eta) = (1+\eta)/2$, se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=1}=0$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\xi=1}=3/2-3\eta/2$, x=0 , y=3/2-3η/2 ,

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación para el computador, , interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Como η varía entre -1 y 1, NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL EN ESTE CASO (sólo el de transformación del cuadrilátero en el cuadrado maestro):

. La curva C: x=0 , y=3/2-3η/2

. Así, el diferencial de arco dc de C crece en el mismo sentido que la variable η, y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(1,\eta)/\partial\,\eta\cdot d\eta)^2+\partial y(1,\eta)/\partial\,\eta\cdot d\eta)^2]^{1/2}=3/2\cdot d\eta$

Y la integral:* $\int_C 4 \cdot N_{3C}\, dc = 4 \cdot \int_{-1}^{1}(1+\eta)/2 \cdot (3/2)d\eta = 6 \cdot [(\eta+\eta^2/2)/2]_{-1}^{+1} = 6$

Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)

Se sigue el proceso analítico hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $\widehat{N}_3(\xi,\eta) = (1+\xi)\cdot(1+\eta)/4$, $N_{3C}=\widehat{N}_3(1,\eta)=(1+\eta)/2$, η varía de -1 a 1 ,

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=1}=0$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\xi=1}=3/2-3\eta/2$, x=0 , y=3/2-3η/2

Como η varía entre -1 y 1, NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL EN ESTE CASO (sólo el de transformación del cuadrilátero en el cuadrado maestro):

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(1,\eta)/\partial\,\eta\cdot d\eta)^2+\partial y(1,\eta)/\partial\,\eta\cdot d\eta)^2]^{1/2}=3/2\cdot d\eta$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dc la variable longitud de arco c y la dη: dc=|j|·dη |j|=3/2

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elemntos y funciones de forma

Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\eta_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0=1$; $\eta_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1=1$

$N_{3C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$, $N_{3C}]_{1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$

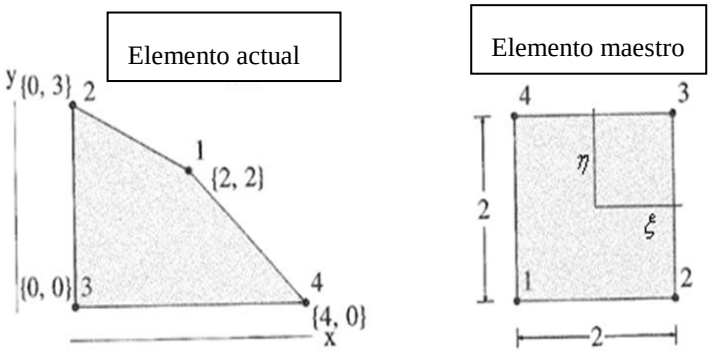
$\int_C 4 \cdot N_{3C}\, dc \approx I_{G\text{-}L}= \sum_0^1 4 \cdot N_{3C}]_i \cdot w_i \cdot |j| = 4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot 3/2+4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot 3/2=4\cdot 3/4+4\cdot 3/4=6$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

INTEGRACIÓN de N_{4C}

Caso en que C es el lado [4-1] en el dominio x-y

Enfoque I (Geométrico) ,



. En el lado 4-1, ξ=-1,

luego: $\widehat{N}_4(-1,\eta) = (1+\eta)/2$ = $N_4(x,y)_C$,

se tiene que:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}$ = 3+ η, η=x-3, pto 4 (4,0) en x-y, se corresponde con pto 4 (-1,1) en ξ-η

$y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\xi=-1}$ = 1- η, η=1-y, pto 1 (2,2) en x-y, se corresponde con pto 1 (-1,-1) en ξ-η

$N_4(x,y)_C$, = -1+x/2=1-y/2, x en [4,2], y en [0,2]es una función lineal que vale 1en el pto 4 (4,0) , y 0 en el pto 1 (2,2), en x.y.

* Integral pedida: área bajo la curva $4\cdot N4_C$ a lo largo del segmento [4-1], esto es: $4\cdot(\sqrt{2^2+2^2})\cdot 1\cdot/2=4\cdot\sqrt{2}$

Enfoque II (analítico)

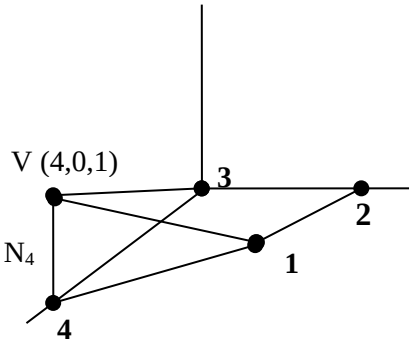
Directo

$$*\int_C 4\cdot N_{4C}\,dc = \int_C 4\cdot(-1+x/2)\,dc = \int_4^2 4\cdot(-1+x/2)\left(-\sqrt{2}dx\right) = -4\cdot[-x+x^2/4]_4^2\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}$$

. La curva C es y=4-x en x-y, con x en [4, 2], dy=-dx

$El\ diferencial\ de\ arco\ dc\ en\ x-y$: $dc=\sqrt{dx^2+dx^2}$ =-$\sqrt{2}$·dx

Al crecer el arco en el arco, la x decrece, pues varía de 4 a 2



Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4\cdot N_{4C}\,dc$, mediante cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro en ξ-η

. En el lado 4-1, ξ=-1, y el segmento 4-1 de x-y se transforma en 4-1 en ξ-η con ξ=-1 y η variando de 1 (en pto 4) a 1 (en pto 1)

. En el lado 4-1, η=1, luego $N_4(x,y)_C = N_{4C} = \widehat{N}_4(-1,\eta) = (1+\eta)/2$, se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables transformadas:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}$=3+η , y=1-η, x=3+η, y=1-η, con η en [1, -1]

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación con el computador, interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Así que SE HACE EL CAMBIO DE VARIABLE: η=-η', con lo que se tendrá:

$N_{4C} = \widehat{N}_4(-1,-\eta') = (1-\eta')/2 = \breve{N}_4(\eta')$ η' en [-1,1]

Y la curva C: x=3-η', y=1+η' dx=-dη' , dy=dη'

Así, el diferencial de arco dc crece en el mismo sentido que la variable η', y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(-1,\eta')/\partial\eta'\cdot d\eta')^2+\partial y(-1,\eta')/\partial\eta'\cdot d\eta')^2]^{1/2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot d\eta'=\sqrt{2}\,d\eta'$

Y la integral:

$$*\int_C 4N_{4C}\,dc = 4\int_{-1}^{1}\breve{N}_4(\eta')\sqrt{2}\,d\eta' = 4\int_{-1}^{1}((1-\eta')/2)\sqrt{2}\,d\eta' = 2\sqrt{2}[\eta'-\eta'^2/2]_{-1}^{+1} = 2\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)

(Es el que se utiliza en un programa de computador)

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $N_{4C}=\widehat{N}_4(-1, \eta)=(1+\eta)/2$, η varía de 1 a -1 ,

. La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables transformadas

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}=3+\eta$, $y=1-\eta$, $x=3+\eta$, $y=1-\eta$, con η en [1, -1]

. CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL para obtener la integración en [-1,1] en lugar de en [1,-1] y que el crecimiento de la longitud de arco dc corresponda con el de la variable de integración:

$\eta=-\eta'$, con lo que se tendrá:

$N_{4C} = \widehat{N}_4(-1,-\eta') =(1-\eta')/2 =\breve{N}_4(\eta')$ η' en [-1,1]

Y la curva C: $x=3-\eta'$, $y=1+\eta'$ $dx=-d\eta'$, $dy=d\eta'$

Así, el diferencial de arco dc crece en el mismo sentido que la variable η', y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2}=[(\partial x(-1, \eta')/\partial \eta'\cdot d\eta')^2+\partial y(-1, \eta')/\partial \eta'\cdot d\eta')^2]^{1/2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot d\eta'=\sqrt{2}\, d\eta'$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dcde variable longitud de arco de C y la $d\eta'$: $dc=|j|\cdot d\eta'$ $|j|=[\partial x(-1, \eta')/\partial \eta')^2+\partial y(-1, \eta')/\partial\eta')^2]^{1/2}=2^{1/2}$

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

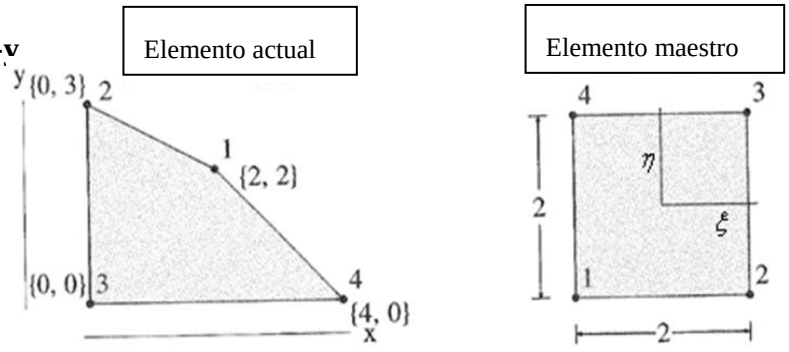
Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\eta'_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0= 1$; $\eta'_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1= 1$

$N_{3C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$, $N_{3C}]_{1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$

$* \int_C 4\cdot N_{4C}\, dc \approx I_{G\text{-}L}=\sum_0^1 4\cdot N_{4C}]_i\cdot w_i\cdot |j|=4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

Caso en que C es el lado [3-4] en el dominio x-y



Enfoque I (Geométrico) ,

. En el lado 3-4, $\eta=1$,

. luego: $= \widehat{N}_4(\xi, 1) =(1-\xi)/2 = N_4(x,y)_C$,

. se tiene que:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2= 2-2\xi$, $1-\xi=x/2$

$y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4=0$,

. $N_4(x,y)_C =x/4$, eso es, sobre C, es una función lineal que vale 1en (4,0) , y 0 en (0,0).

* La integral pedida es el área bajo la curva $4N_4$ a lo largo del segmento [3-4], esto es: $4\cdot(4\cdot 1)/2=8$

Enfoque II (analítico)

Directo

$* \int_C 4\cdot N_{4C}\, dc = \int_C 4\cdot(x/4)\, dc = \int_0^4 4\cdot x/4\, dx = [x^2/2]_0^4 = 8$

. La curva C , [3-4] es y=0, con x entre 0 y 4,

. *el diferencial de arco*: $dc=\sqrt{dx^2+dy^2}$ =dx , pues se x y la longitud de curva c crecen en el mismo sentido.

Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4 \cdot N_{4C}\, dc$ Mediante el cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro ξ-η

. En el lado 3-4, η=1, y el segmento 3-4 en x-y se transforma en 3-4 en ξ-η con η=1 , ξ variando de 1 (en pto 3) a -1 (en pto 4).

. En el lado 3-4, η=1, luego $N_4(x,y)_C = N_{4C} = \widehat{N}_4(\xi, 1) = (1-\xi)/2$, se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=1}=2-2\xi$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\eta=1}=0$, $x=2-2\xi$, $y=0$,

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación para el computador, , interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Como ξ varía entre 1 y -1, HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL EN ESTE CASO: ξ=-ξ', con lo que se tendrá:

$N_{4C} = \widehat{N}_4(-\xi',1) = (1+\xi')/2 = \breve{N}_4(\xi')$

Y la curva C: $x=2+2\xi'$, $y=0$

Así, el diferencial de arco crece dc en el mismo sentido que la variable ξ', y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(\xi',1)/\partial\xi'\cdot d\xi')^2+\partial y(\xi',1)/\partial\xi'\cdot d\xi')^2]^{1/2}=\sqrt{(2)^2+0}\, d\xi'=2\cdot d\xi'$

Y la integral:

$* \int_C 4 \cdot N_{4C}\, dc = 4 \cdot \int_{-1}^{1} \breve{N}_4(\xi') \cdot 2d\xi' = 4 \cdot \int_{-1}^{1}((1+\xi')/2) \cdot 2 \cdot d\xi' = 4 \cdot [\xi' - \xi'^2/2]_{-1}^{+1} = 4\cdot(1-(-1)=8$

Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $\widehat{N}_4(\xi,\eta) = (1-\xi)\cdot(1+\eta)/4$, $N_{4C}=\widehat{N}_4(\xi,1)=(1-\xi)/2$, ξ varía de 1 a -1 ,

. Cambio de variable para obtener la transformada de C en la variable ξ:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=1}=2-2\cdot\xi$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\eta=1}=0$,

$x=2-2\cdot\xi$, $y=0$

. Cambio de variable ADICIONAL para obtener la integración en [-1,1] en lugar de en [1,-1] y que el crecimiento de la longitud de arco dc corresponda con el de la variable de integración:

ξ=-ξ', $x=2+2\cdot\xi'$, $y=0$

$N_{4C}=(1+\xi')/2$, $dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [\partial x(\xi',1)/\partial\xi'\cdot d\xi')^2+\partial y(\xi',1)/\partial\xi'\cdot d\xi')^2]^{1/2}=(2^2+0)^{1/2}\cdot d\xi'=2\cdot d\xi'$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dcde variable longitud de arco de C y la dξ': $dc=|j|\cdot d\xi'$ $|j|=[\partial x(\xi',1)/\partial\xi')^2+\partial y(\xi',1)/\partial\xi')^2]^{1/2}=(2^2+0)^{1/2}= 2$

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\xi'_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0= 1$; $\xi'_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1= 1$

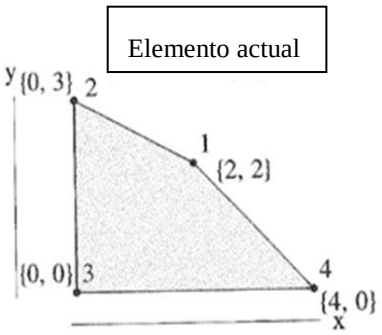
$N_{4C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$, $N_{4C}]_{1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$

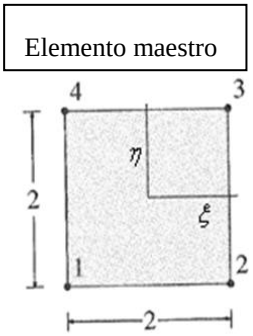
$* \int_C 4 \cdot N_{4C}\, dc \approx I_{G\text{-}L}= \sum_0^1 4 \cdot N_{4C}]_i \cdot w_i \cdot |j| = 4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot1\cdot2+4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot1\cdot2=4+4=8$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

INTEGRACIÓN de N_{1C}

Caso en que C es el lado [4-1] en el dominio x-y





Enfoque I (Geométrico) ,

. En el lado 4-1, ξ=-1,

luego: $\widehat{N}_1(-1,\eta) = (1-\eta)/2$ = $N_1(x,y)_C$,

se tiene que:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}$ = 3+ η, η=x-3, pto 4 (4,0) en x-y, se corresponde con pto 4 (-1,1) en ξ-η

$y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\xi=-1}$ = 1- η, η=1-y, pto 1 (2,2) en x-y, se corresponde con pto 1 (-1,-1) en ξ-η

$N_1(x,y)_C$, = y/2, y en [0,2], x en [2,4], es una función lineal que vale 1en el pto 4 (4,0) , y 0 en el pto 1 (2,2), en x-y.

* Integral pedida: área bajo la curva $4\cdot N1_C$ a lo largo del segmento [4-1], esto es: $4\cdot(\sqrt{2^2+2^2})\cdot 1\cdot/2=4\cdot\sqrt{2}$

Enfoque II (analítico)

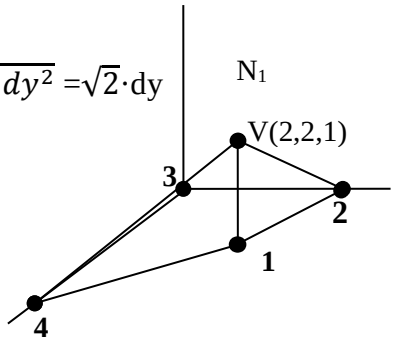
Directo

$*\int_C 4\cdot N_{1C}\,dc = \int_C 4\cdot(y/2)\,dc = \int_0^2 4\cdot(y/2)\left(\sqrt{2}dy\right) = 2\sqrt{2}\cdot[y^2/2]_0^2 \cdot = 4\cdot\sqrt{2}$

. La curva C es y=4-x en x-y, con x en [4, 2], dx=-dy

$.el\ diferencial\ de\ arco\ dc\ en\ x-y: dc = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(-dy)^2+dy^2}$ =$\sqrt{2}$·dy

. Al crecer el arco en el C, la y crece, varía de 0 a 2



Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4\cdot N_{1C}\,dc$, mediante cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro en ξ-η

. En el lado 4-1, ξ=-1, y el segmento 4-1 de x-y se transforma en 4-1 en ξ-η con ξ=-1 y η variando de 1 (en pto 4) a 1 (en pto 1)

. En el lado 4-1, ξ=1, luego $N_1(x,y)_C = N_{1C} = \widehat{N}_1(-1,\eta) = (1-\eta)/2$, se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables transformadas:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}$=3+η , y=1-η, x=3+η, y=1-η, con η en [1, -1]

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación con el computador, interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Así SE HACE EL CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL: η=-η', de modo que:

$N_{1C} = \widehat{N}_1(-1,-\eta') = (1+\eta')/2 = \breve{N}_1(\eta')$ η' en [-1,1]

Y la curva C: x=3-η', y=1+η' dx=-dη' , dy=dη'

Así, el diferencial de arco dc crece en el mismo sentido que la variable η', y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(-1,\eta')/\partial\eta'\cdot d\eta')^2+\partial y(-1,\eta')/\partial\eta'\cdot d\eta')^2]^{1/2} = \sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot d\eta' = \sqrt{2}\cdot d\eta'$

Y la integral:

$*\int_C 4N_{1C}\,dc = 4\int_{-1}^{1}\breve{N}_1(\eta')\sqrt{2}\,d\eta' = 4\int_{-1}^{1}((1+\eta')/2)\sqrt{2}\,d\eta' = 2\sqrt{2}[\eta'+\eta'^2/2]_{-1}^{+1} = 2\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}$

Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)

(Es el que se utiliza en un programa de computador)

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $N_{1C}=\widehat{N}_1(-1, \eta)=(1-\eta)/2$, η varía de 1 a -1 ,

. La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables transformadas

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}=3+\eta$, $y=1-\eta$, $x=3+\eta$, $y=1-\eta$, con η en [1, -1]

. Cambio de variable ADICIONAL para obtener la integración en [-1,1] en lugar de en [1,-1] y que el crecimiento de la longitud de arco dc corresponda con el de la variable de integración:

$\eta=-\eta'$, con lo que se tiene:

$N_{1C} = \widehat{N}_1(-1,-\eta') =(1+\eta')/2 = \widetilde{N}_1(\eta')$ η' en [-1,1]

Y la curva C: $x=3-\eta'$, $y=1+\eta'$ $dx=-d\eta'$, $dy=d\eta'$

Así, el diferencial de arco dc crece en el mismo sentido que la variable η', y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2}=[(\partial x(-1,\eta')/\partial\eta'\cdot d\eta')^2+\partial y(-1,\eta')/\partial\eta'\cdot d\eta')^2]^{1/2}=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}\cdot d\eta'=\sqrt{2}\, d\eta'$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dc de la variable longitud de arco de C y la $d\eta'$: $dc=|j|\cdot d\eta'$ $|j|=[\partial x(-1,\eta')/\partial\eta')^2+\partial y(-1,\eta')/\partial\eta')^2]^{1/2}=2^{1/2}$

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

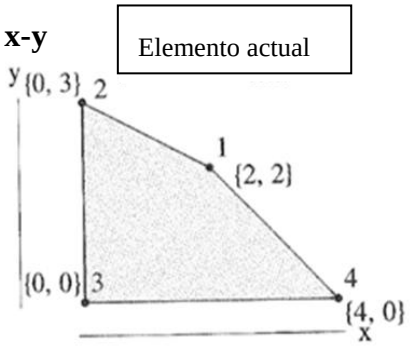
Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\eta'_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0= 1$; $\eta'_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1= 1$

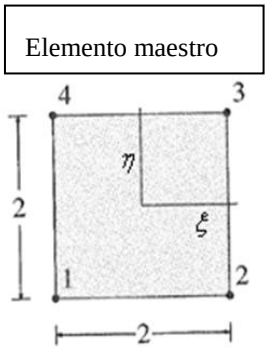
$N_{1C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$, $N_{1C}]_{1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$

$* \int_C 4\cdot N_{1C}\, dc \approx I_{G\text{-}L}=\sum_0^1 4\cdot N_{1C}]_i\cdot w_i\cdot |j|=4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

Caso en que C es el lado [1-2] en el dominio x-y





Enfoque I (Geométrico) ,

. En el lado 1-2, $\eta=-1$,

. luego: $=\widehat{N}_1(\xi, -1) =(1-\xi)/2 = N_1(x,y)_C$,

. se tiene que:

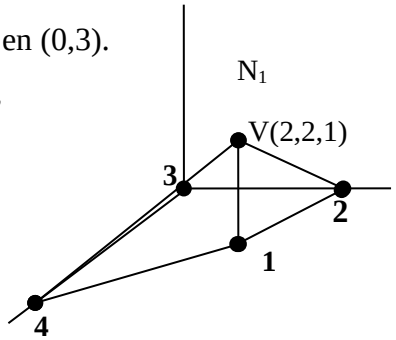
$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2= 1-\xi$, $\xi=1-x$

$y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4= (5+\xi)/2$

. $N_1(x,y)_C =x/2$, eso es, sobre C, es una función lineal que vale 1en (2,2) , y 0 en (0,3).

* La integral pedida es el área bajo la curva $4N_1$ a lo largo del segmento [1-2],

esto es: $4\cdot(\sqrt{2^2+1^2}\cdot 1)/2=2\sqrt{5}$



Enfoque II (analítico)

Directo

$* \int_C 4\cdot N_{1C}\, dc = \int_C 4\cdot(x/2)\, dc = \int_2^0 4\cdot x/2\cdot(-\sqrt{5}/2)dx = \sqrt{5}\,[x^2/2]_0^2 = 2\sqrt{5}$

. La curva C , [1-2] es $y=(6-x)/2$, con x entre 2 y 0, $dy=-dx/2$

. $el\ diferencial\ de\ arco$: $dc = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (-dx^2)/4} = (-\sqrt{5}/2)dx$, pues x y la longitud de curva c crecen en sentidos opuestos.

Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4 \cdot N_{1C}\, dc$ Mediante el cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro ξ-η

. En el lado 1-2, η=-1, y el segmento 1-2 en x-y se transforma en 1-2 en ξ-η con η=-1 , ξ variando de -1 (en pto 1) a +1 (en pto 2).

. En el lado 1-2, η=-1, luego $N_1(x,y)_C = N_{1C} = \widehat{N}_1(\xi, -1) = (1-\xi)/2$, se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=-1}=1-\xi$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\eta=-1}= (5+\xi)/2$, $x=1-\xi$, $y=(5+\xi)/2$,

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación para el computador, , interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Como ξ varía entre -1 y +1, NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL EN ESTE CASO (sólo el de transformación del cuadrilátero en el cuadrado maestro):

Así, el diferencial de arco crece dc en el mismo sentido que la variable ξ, y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2 + dy^2} =[(\partial x(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2+\partial y(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2]^{1/2}=\sqrt{(-1)^2 + (1/2)^2}\, d\xi=\sqrt{5}/2\cdot d\xi$

Y la integral:

$* \int_C 4 \cdot N_{1C}\, dc = 4\int_{-1}^{1} \widehat{N}_1(\xi) \cdot \sqrt{5}/2 d\xi = 4\int_{-1}^{1}((1-\xi)/2) \cdot \sqrt{5}/2 \cdot d\xi = \sqrt{5} \cdot [\xi - \xi^2/2]_{-1}^{+1} = 2\sqrt{5}$

Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $\widehat{N}_1(\xi,\eta) = (1-\xi)\cdot(1+\eta)/4$, $N_{1C}=\widehat{N}_1(\xi,-1)=(1-\xi)/2$, ξ varía de -1 a +1 ,

. Cambio de variable para obtener la transformada de C en la variable ξ:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=-1}=1-\xi$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\eta=-1}=(5+\xi)/2$, $x=1-\xi$, $y=(5+\xi)/2$

. NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL para obtener la integración en [-1,1] en lugar de en [1,-1] ya que el crecimiento de la longitud de arco dc se corresponde con el de la variable de integración:

$N_{1C}=(1-\xi)/2$, $dc=\sqrt{dx^2 + dy^2} =[\partial x(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2+\partial y(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2]^{1/2}=((-1)^2+(1/2)^2)^{1/2}\cdot d\xi=(\sqrt{5}/2)\cdot d\xi$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dc de la variable longitud de arco de C y la dξ: $dc=|j|\cdot d\xi$, $|j|=[\partial x(\xi,1)/\partial\xi)^2+\partial y(\xi,1)/\partial\xi)^2]^{1/2}=((-1)^2+(1/2)^2)^{1/2}=\sqrt{5}/2)$

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\xi_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0= 1$; $\xi_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1= 1$

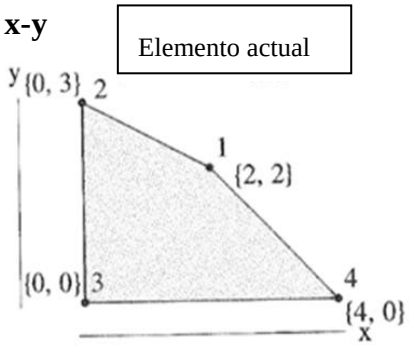
$N_{1C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$, $N_{4C}]_{1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$

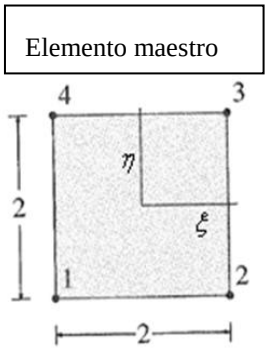
$* \int_C 4 \cdot N_{1C}\, dc \approx I_{G\text{-}L}= \sum_0^1(4 \cdot N_{1C}]_i \cdot w_i \cdot |j|)=4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot\sqrt{5}/2)+4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot\sqrt{5}/2)=2\cdot\sqrt{5}$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

INTEGRACIÓN de N_{2C}

Caso en que C es el lado [1-2] en el dominio x-y





Enfoque I (Geométrico) ,

. En el lado 1-2, η=-1,

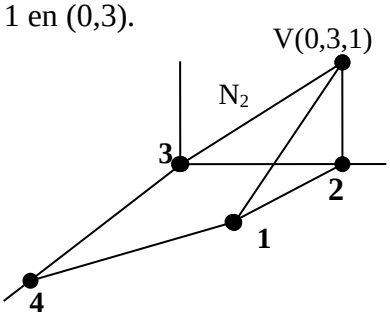
. luego: = $\widehat{N}_2(\xi, -1)$ =(1+ξ)/2 = $N_2(x,y)_C$,

. se tiene que:

x=(3+η-3ξ-ξ·η)/2= 1-ξ , ξ=1-x

y=(5-5η+ξ-ξ·η)/4= (5+ξ)/2

. $N_2(x,y)_C$ =1-x/2, eso es, sobre C, es una función lineal que vale 0 en (2,2) , y 1 en (0,3).



* La integral pedida es el área bajo la curva $4N_2$ a lo largo del segmento [1-2],

esto es: $4\cdot(\sqrt{2^2+1^2}\cdot 1)/2=2\sqrt{5}$

Enfoque II (analítico)

Directo

$* \int_C 4N_{2C}\,dc = \int_C 4(1-x/2)\,dc = \int_2^0 4(1-x/2)\,(-\sqrt{5}/2)dx = 2\sqrt{5}\cdot[x - x^2/4]_0^2 = 2\sqrt{5}$

. La curva C , [1-2] es y=(6-x)/2, con x entre 2 y 0, dy=-dx/2

. $el\ diferencial\ de\ arco$: $dc = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2+(-dx^2)/4} = (-\sqrt{5}/2)dx$, pues x y la longitud de curva c crecen en sentidos opuestos.

Enfoque II (analítico)

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4\cdot N_{2C}\,dc$ Mediante el cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro ξ-η

. En el lado 1-2, η=-1, y el segmento 1-2 en x-y se transforma en 1-2 en ξ-η con η=-1 , ξ variando de -1 (en pto 1) a +1 (en pto 2).

. En el lado 1-2, η=-1, luego $N_2(x,y)_C = N_{2C} = \widehat{N}_2(\xi, -1)$ =(1+ξ)/2 , se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=-1}=1-\xi$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\eta=-1}= (5+\xi)/2$, x=1-ξ , y=(5+ξ)/2 ,

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación para el computador, interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. Como ξ varía entre -1 y +1, NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL EN ESTE CASO (sólo el de transformación del cuadrilátero en el cuadrado maestro):

Así, el diferencial de arco crece dc en el mismo sentido que la variable ξ, y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} =[(\partial x(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2+\partial y(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2]^{1/2}=\sqrt{(-1)^2+(1/2)^2}\,d\xi=\sqrt{5}/2\cdot d\xi$

Y la integral:

$* \int_C 4\cdot N_{2C}\,dc = 4\int_{-1}^{1}\widehat{N}_2(\xi)\cdot\sqrt{5}/2 d\xi = 4\int_{-1}^{1}((1+\xi)/2)\cdot\sqrt{5}/2\cdot d\xi = \sqrt{5}\cdot[\xi+\xi^2/2]_{-1}^{+1} = 2\sqrt{5}$

Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $\widehat{N}_2(\xi,\eta) = (1-\xi)\cdot(1+\eta)/4$, $N_{2C}=\widehat{N}_2(\xi,-1)=(1+\xi)/2$, ξ varía de -1 a +1 ,

. Cambio de variable para obtener la transformada de C en la variable ξ:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\eta=-1}=1-\xi$, $y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\eta=-1}=(5+\xi)/2$, $x=1-\xi$, $y=(5+\xi)/2$

. NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL para obtener la integración en [-1,1] en lugar de en [1,-1] ya que el crecimiento de la longitud de arco dc se corresponde con el de la variable de integración:

$N_{2C}=(1+\xi)/2$, $dc=\sqrt{dx^2+dy^2}=[\partial x(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2+\partial y(\xi,-1)/\partial\xi\cdot d\xi)^2]^{1/2}=((-1)^2+(1/2)^2)^{1/2}\cdot d\xi=(\sqrt{5}/2)\cdot d\xi$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dc de la variable longitud de arco de C y la dξ: $dc=|j|\cdot d\xi$, $|j|=[\partial x(\xi,1)/\partial\xi)^2+\partial y(\xi,1)/\partial\xi)^2]^{1/2}=((-1)^2+(1/2)^2)^{1/2}=\sqrt{5}/2$

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

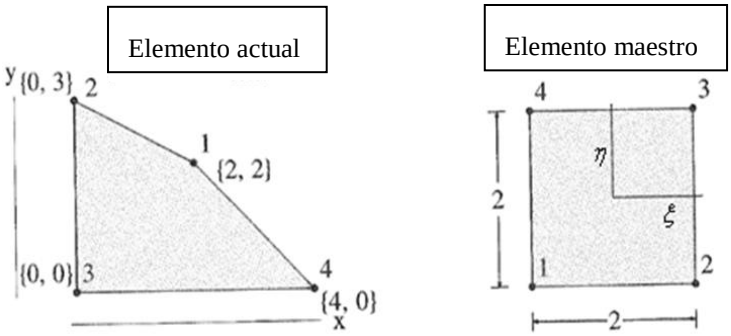
Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\xi_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0=1$; $\xi_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1=1$

$N_{2C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$, $N_{4C}]_{1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$

$*\int_C 4\cdot N_{2C}\,dc \approx I_{G\text{-}L}=\sum_0^1(4\cdot N_{2C}]_i\cdot w_i\cdot|j|)=4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot1\cdot\sqrt{5}/2)+4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot1\cdot\sqrt{5}/2)=2\cdot\sqrt{5}$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

Caso en que C es el lado [2-3] en el dominio x-y



<u>Enfoque I (Geométrico)</u> ,

. En el lado 2-3, ξ=1,

luego: $\widehat{N}_2(1,\eta) = (1-\eta)/2 = N_2(x,y)_C$,

se tiene que:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=1}=0$,

$y=(5-5\eta+\xi-\xi\cdot\eta)/4]_{\xi=1}=3(1-\eta)/2$, $\eta=1-2y/3$, pto 2 (0,3) en x-y, corresponde a pto 2 (1,-1) en ξ-η

pto 3 (0,0) en x-y, corresponde a pto 3 (1,1) en ξ-η

$N_2(x,y)_C$, = y/3, y en [0,3], x=0, es una función lineal, vale 1en el pto 2 (0,3) , y 0 en el pto 3 (0,0), en x-y.

* Integral pedida: área bajo la curva $4N_{2C}$ a lo largo del segmento [2-3], esto es: $4\cdot3\cdot1/2=6$

Enfoque II (analítico)

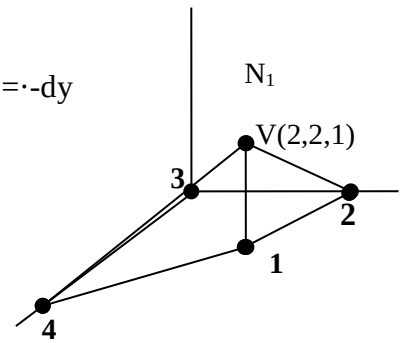
Directo

$*\int_C 4\cdot N_{2C}\,dc = \int_C 4\cdot(y/3)\,dc = \int_3^0 4\cdot(y/3)\,(-dy) = 4\cdot[y^2/6]_0^3 = 6$

. La curva C es x=0 en x-y, con y en [3, 0]

$.el\ diferencial\ de\ arco\ dc\ en\ x-y: dc=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{0^2+dy^2}$ =·-dy

. Se elige dc=-dy pues al crecer el arco en C, la y decrece, varía de 3 a 0



<u>Enfoque II (analítico)</u>

CAMBIO DE VARIABLE

$\int_C 4 \cdot N_{2C}\, dc$,mediante cambio de variable para trasformar el cuadrilátero en x-y al recinto maestro en ξ-η

. En el lado 2-3, ξ=1, y el segmento 2-3 de x-y se transforma en 2-3 en ξ-η con ξ=1 y η variando de -1 (en pto 2) a 1 (en pto 3)

. En el lado 2-3, ξ=1, luego $N_2(x,y)_C = N_{2C} = \widehat{N}_2(1,\eta) = (1-\eta)/2$, se tiene que:

La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables transformadas:

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=-1}=0$, $y=3(1-\eta)/2$, con η en [-1,+1]

. A efectos de la integración numérica que se utilizará en el proceso de programación con el computador, interesa que el dominio transformado la integral se haga en el intervalo [-1,1] para aplicación directa de reglas de Gauss-Legendre. En este caso NO HAY QUE HACER CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL.

Así, el diferencial de arco dc crece en el mismo sentido que la variable η, y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(1,\eta)/\partial\eta\cdot d\eta)^2+\partial y(1,\eta)/\partial\eta\cdot d\eta')^2]^{1/2}=\sqrt{0^2+(-3/2)^2}\cdot d\eta = (3/2)\cdot d\eta$

Y la integral:

$$* \int_C 4N_{2C}\, dc = 4\int_{-1}^{1} N_{2C}\left(\frac{3}{2}\right) d\eta = 4\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) d\eta = 3\left[\eta-\frac{\eta^2}{2}\right]_{-1}^{+1} = 3(1+1) = 6$$

<u>Enfoque III (Numérico, integración numérica de Gauss-Legendre)</u>

<u>(Es el que se utiliza en un programa de computador)</u>

Se sigue el proceso analítico con cambio de variables hasta formular la integral final, que se realiza numéricamente con la regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base.

. $N_{2C}=\widehat{N}_2(1,\eta)=(1-\eta)/2$, η varía de -1 a 1 ,

. La curva C en x-y se puede escribir en términos de las variables transformadas

$x=(3+\eta-3\xi-\xi\cdot\eta)/2]_{\xi=1}=0$, $y=3(1-\eta)/2$, $x=0$, $y=3(1-\eta)/2$ con η en [-1, 1]

. NO hay que hacer cambio de variable ADICIONAL pues la integración es [-1,1].

En la curva C: $x=0$, $y=3(1-\eta)/2$ $dx=0$, $dy=-(3/2)d\eta$

El diferencial de arco dc crece en el mismo sentido que la variable η, y se escribe:

$dc=\sqrt{dx^2+dy^2} = [(\partial x(1,\eta)/\partial\eta\cdot d\eta)^2+\partial y(1,\eta)/\partial\eta\cdot d\eta)^2]^{1/2}=\sqrt{0^2+(-3/2)^2}\cdot d\eta' = (3/2)d\eta$

. Vamos a escribir como |j| al factor que representa el cambio de escala en la diferencial dc de la variable longitud de arco de C y la dη: $dc=|j|\cdot d\eta$ $|j|=[\partial x(1,\eta)/\partial\eta)^2+\partial y(1,\eta)/\partial\eta)^2]^{1/2}=3/2$

Observar que |j| resulta constante para este tipo de elementos y funciones de forma

Abscisas base y pesos para 2 puntos base de Gauss-Leg $\eta'_0=-1/\sqrt{3}$, $w_0=1$; $\eta'_1=1/1/\sqrt{3}$, $w_1=1$

$N_{2C}]_{-1/\sqrt{3}}=(1+1/\sqrt{3})/2$, $N_{1C}]_{1/\sqrt{3}}=(1-1/\sqrt{3})/2$

$$* \int_C 4 \cdot N_{2C}\, dc \approx I_{G\text{-}L}= \sum_0^1 4 \cdot N_{2C}]_i \cdot w_i \cdot |j| = 4\cdot(1+1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot(3/2)+4\cdot(1-1/\sqrt{3})/2\cdot 1\cdot(3/2)=3+3=6$$

Obsérvese que resulta el valor exacto pues la regla de Gauss-Leg con 2 puntos base integra exactamente integrandos polinómicos de grado menor o igual que 3, y en este caso el integrando es de grado 1.

Como comentario general, obsérvese que para las integrales a lo largo de los lados [1-2] y [2-3] se HACE SOLO EL CAMBIO DE VARIABLE BASICO, mientras que para los lados [3-4] y [4-1] SE HACE EL CAMBIO DE VARIABLE ADICIONAL cambiando el signo de la variable 'maestra'

Lado [1-2]: ξ no se cambia, η=-1

Lado [2-3]: ξ=1, η no se cambia

Lado [3-4]: ξ=-ξ', ξ se cambia η=1

Lado [4-1]: ξ=-1, η se cambia η=-η'

Problema PI-4 – Transferencia de calor por convección (Matlab)

Se considera el análisis por Elementos Finitos de problemas de calor que implican fenómenos de convección (esto es, transferencia de energía entre un cuerpo sólido y medio fluido que lo envuelve).

La ecuación del problema en el caso particular que se considera aquí es:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) = f \qquad \text{en } \Omega$$

Donde T es la temperatura (en ºC), k_x y k_y son las conductividades [en W/(m·ºC)] a lo largo de las direcciones x e y respectivamente y f es la generación interna de calor por unidad de volumen en (W/m^3)

Las condiciones de contorno esenciales aquí implican la especificación de la temperatura T. Las condiciones de contorno naturales implican la especificación del flujo de calor $\hat{q}_n$ tal que:

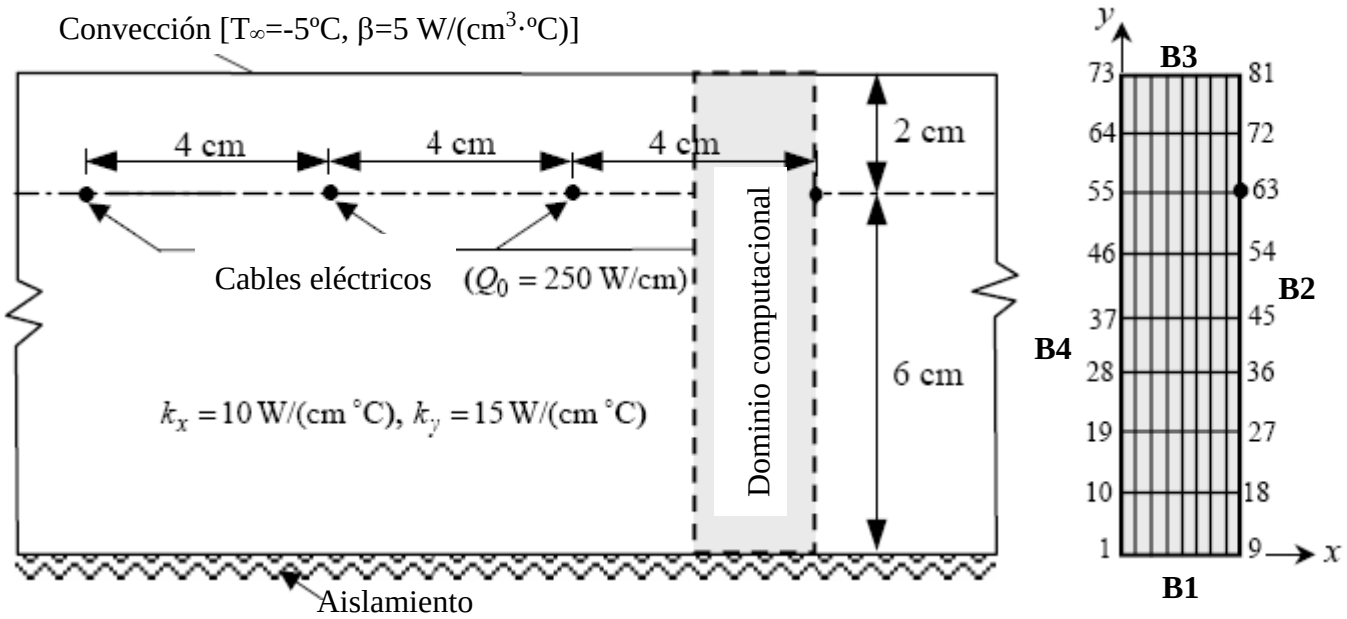
$$\underbrace{\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y\right)}_{-\vec{q}\cdot\vec{n}} + \beta(T - T_\infty) - \hat{q}_n = 0$$

donde β es el coeficiente de transferencia convectiva de calor [en W/(m·ºC)] y T_∞ es la temperatura ambiente del medio fluido envolvente y $\hat{q}_n$ el flujo de calor especificado.

El primer término tiene en cuenta la transferencia de calor por conducción, el segundo por convección y el tercero indica el flujo de calor especificado. SE PIDE:

PI-4.a) Deducir la forma débil para este tipo de problemas y dar expresiones explicitas de la matriz de 'rigidez' de un elemento y el vector de cargas de un elemento. Supóngase que parte de contorno tiene condiciones de contorno esenciales y el resto condiciones de contorno naturales como las indicadas antes. ¿Cómo afectan estas últimas condiciones a la matriz de rigidez?

PI-4.b) (Prob 8.28 de Reddy, J.N. 'An Introduction to the FEM', 3rd ed, 2006) Considérese ahora una serie de cables calientes colocados en un medio conductor, como se muestra en la figura. El medio tiene conductividad k_x=10 W/(cm·ºC) y k_y=15 W/(cm·ºC). En la parte superior del dominio la superficie está sometida a una temperatura de -5 ºC, y la superficie inferior está limitada por un medio aislante térmicamente. Suponer que cada cable es una fuente calorífica puntual de 250 W/cm. Considerar que al coeficiente convectivo entre el medio y la superficie superior es β=5 W/(cm^2·ºC). Utilizar una malla de elementos cuadriláteros en el dominio computacional (aprovechar cualquier simetría presente en el problema). Dibujar el mapa de contornos de temperaturas. De ello comprobar la convergencia de la malla.



Indicación: Utilizando la simetría del problema, se puede reducir al dominio computacional al mostrado en la figura. La entrada de calor en el nodo donde se está el cable es 125 W/cm, se localiza en el nodo 63. Las condiciones de borde en el contorno superior son de tipo convectivo, en los bordes a la derecha e izquierda, el flujo de calor es cero (por la simetría), y en el borde inferior el flujo de calor es cero debido al aislamiento.

PI-4 Solución:

PI4.a) La EDP del problema es:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) = f \qquad \text{en } \Omega$$

La condición de contorno natural implica la especificación del flujo qn de modo que:

$$\underbrace{\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y\right)}_{-\vec{q}\cdot\vec{n}} + \beta(T - T_\infty) - \hat{q}_n = 0$$

P4.a) La forma débil es:

$$\iint_\Omega (k_x \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}) \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega} \beta \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{w} \cdot \mathrm{ds} = \iint_\Omega f \cdot w \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot T_\infty + \hat{q}_n)\, w \cdot ds$$

Esto da la siguiente expresión para la matriz de rigidez y vector de carga de un elemento:

$$K^e = \iint_\Omega B^T \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} B d\Omega + \int_{\partial\Omega} \beta \cdot N^T N ds$$

$$f^e = \iint_\Omega f \cdot N^T d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot T_\infty + \hat{q}_n) \cdot N^T ds$$

Las condiciones de contorno naturales afectan al vector de 'rigidez' añadiendo términos de integral curvilínea.

PI4.b) Soluciones con Matlab

Modificaciones en el programa Matlab:

Se van a distinguir:

I) Uso de malla rectangular de lados paralelos a los ejes X-Y, conforme a la opción loadgrid='no' del programa 2dBVP.

II) Uso de malla cuadrilátera o triangular con refinamiento de malla, conforme a la opción loadgrid='refine', que tabula la evolución de los nodos iniciales a lo largo del 'refine'.

I) malla rectangular de lados paralelos a los ejes X-Y , opción loadgrid='no'.

InputGrid.m

Atendiendo a la simetría en el problema, poner el rango de x de 0 a 2 cm, y el rango de y de 0 a 8 cm., con 8 elementos en las dos direcciones x e y. Utilizar elementos cuadriláteros, con 2 dimensiones espaciales.

```
if strcmpi(load_grid,'no')==1 % Usar la malla por defecto
      xl = 0.0; % extremo izqdo. (left) del rango en la direccion x
      xr = 2.0; % extremo dcho (right) del rango en la direccion x
      yb = 0.0; % extremo inferior (bottom) del rango en la direccion y
      yt = 8.0; % extremo superior (top) del rango en la direccion y
      nx = 8; % numero de elementos e la direccion x
      ny = 8; % numero de elementos e la direccion y
      ElementType = 1; % 1: Q4 2: T3 , cuadrilatero 4 lados Q4, Triangulo 3 nodos T3
      nsd = 2; % numero de direcciones espaciales (2 (por defecto) o 3)
      BoxGrid_2D(xl,xr,yb,yt,nx,ny); % funcion genera malla-caja elementos rectangulos
End
```

InputData.m

Dibuja la malla, los contornos, curvas de nivel y vectores

```
plot_mesh = 'yes'; % Se dibuj la malla. Para mallas grandes
plot_node = 'no'; % es major no dibujar num. nodos y vectores conjuntamente (borrón).
plot_boundary = 'yes'; % Dibujar borde          % ELEGIR OPCIONES DE MODO APROPIADO
plot_contour = 'yes'; % Dibujar curvas de nivel de la solución
```

```
plot_vector = 'yes'; % Dibujar vector gradient de la solución (flujos)
is_exact = 'no';  % Se introduce caso dando solución exacta, para comparar
```

El borde 3 (B3) es el único que tiene condiciones de contorno naturales no nulas. Los bordes **B1**, **B2**, **B4** tienen flujos de calor nulo, como se muestra en el dibujo de los bordes.

Se indica en la variable asociada:

```
IsBoundaryCondition = [0 0 1 0];
```

Conductivity.m

Funcion en que se introduce la matriz de conductividad, con kx= 10 y ky=15.

```
D = [10 0;0 15];% matriz diagonal 2x2
```

specifyEssBCValue.m:

Puesto que no se especifican temperaturas en los bordes, no hay condicones de borde (BC) esenciales. Así

```
dof = []; % inicializar los dos vectores output de resultados
vals =[];
```

specifyNaturalBCValue.m:

Introducir la condición de controno natural especificada en el borde **B3**.

Puesto que

$$\underbrace{\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y\right)}_{-\vec{q}\cdot\vec{n}} = -\beta \cdot T + \beta \cdot T_\infty$$

Comparando esto con k·grad(u)=alfa·u+beta , en el programa $k \cdot \nabla T = \alpha T + \beta$

Se tiene: alpha=-β=-5 , beta=β·T∞=5*(-5)

Así se introduce en el programa:

```
if ( sideInd == 3 ) % Introducir debajo valores de NC, condiciones Contorno Naturales
      alpha = -5;
      beta = 5*(-5);
end
```

ff.m

Puesto que no hay generación interna de calor;

```
Value=0;
```

NodalSoln.m

Función para introducir el valor de la mitad de la fuente puntual de 250/2=125 W/cm en el nodo 63 (Se introduce la mitad de la fuente puntual, debido a la simetría)

```
R(63)=R(63)+125
```

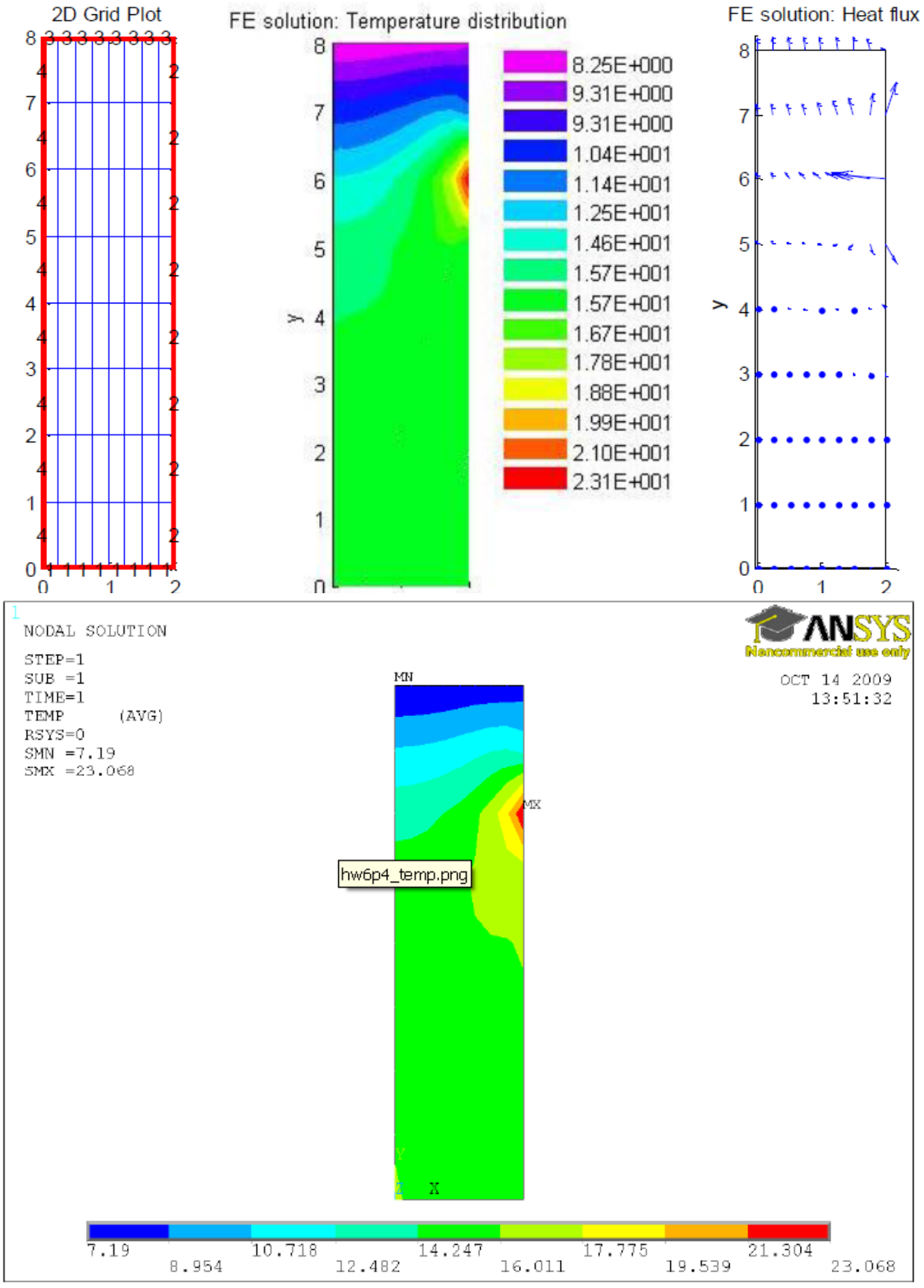
Puesto que no hay condiciones de borde esenciales (valor de temperatura especificado), no hay necesidad de particionar la matriz. Se resuelve directamente el sistema de las temperaturas. No hay vector de 'reacciones'

```
d=K\R
```

```
rf=0;
```

No hay que hacer cambios en **integrands.m** ni en **integrands4side.m** pues se ajustan a la forma débil de este problema.

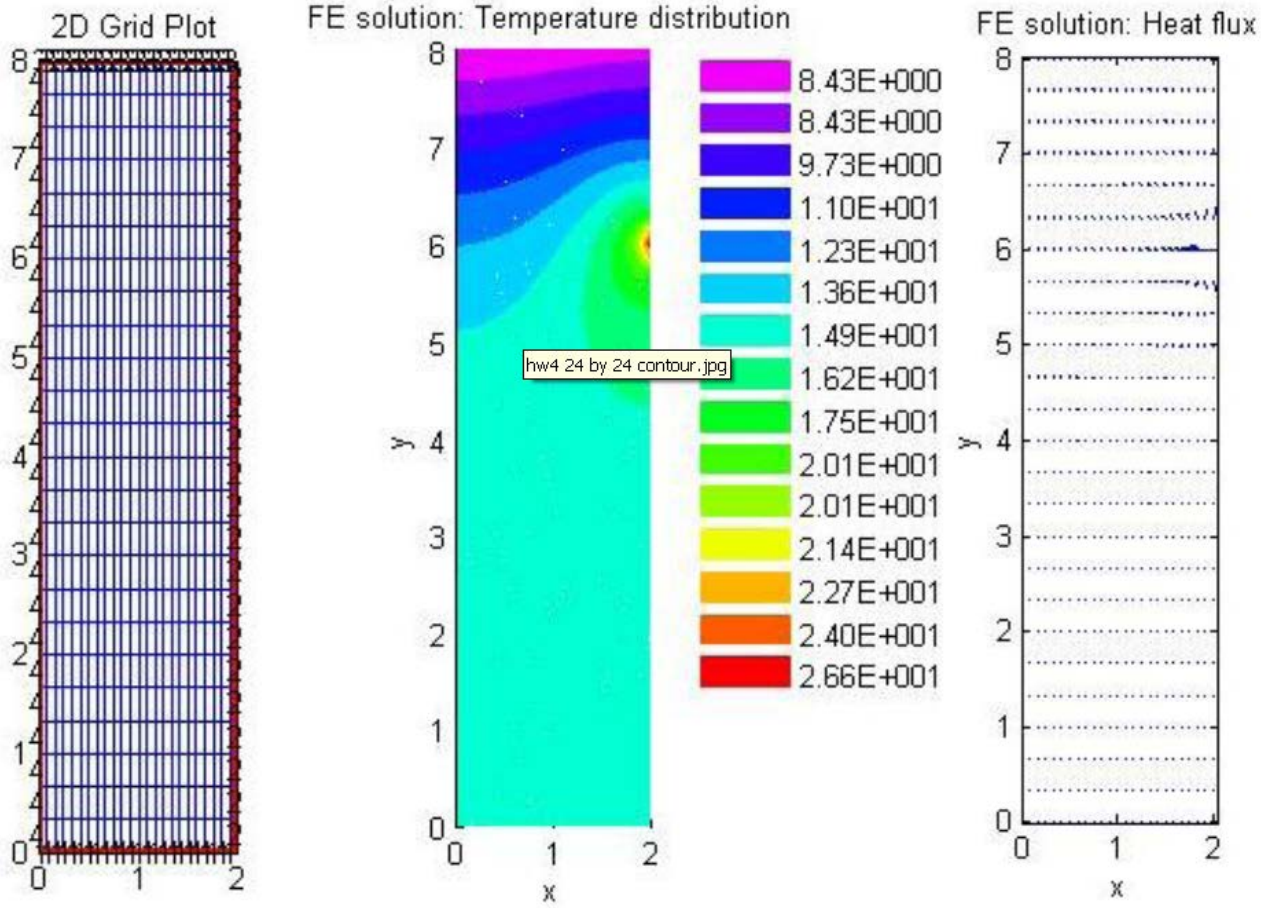
Resultados del programa MATLAB



Los resultados son comparables.

Observando el dibujo de las líneas de nivel de temperatura, se ve que la temperatura es máxima en el nodo en que se ubica el cable, lo que tiene sentido, pues el flujo de calor en las zonas junto a ese nodo transfiere calor al dominio. Sin embargo, se debería dispersar de modo más homogéneo en todas direcciones aunque la figura no lo muestre.

Si se incrementa el número de elementos de la malla a 24 por 24, se obtiene mejor precisión del flujo de calor, como se muestra en la figura siguiente:



II) malla cuadrilátera o triangular con refinamiento de malla, conforme a la opción loadgrid='refine'

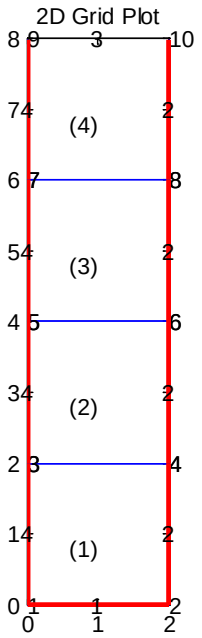
Se indican las funciones en que son relevantes para el caso las modificaciones.

Main2D_refine

Asignar a la variable nrefine el número de etapas de refine. Recuérdese que en cada etapa, tanto con malla cuadrilátera como con triangular, se cuadriplica el número de elementos (cada cuadrilátero y cada triángulo se subdivide en cuatro uniendo puntos medios de lados opuestos en los cuadriláteros y puntos medios de lados contiguos en los triángulos). No se debe dar valores grandes a nrefine, para casos de prueba, entre 2 y 6 puede ser adecuado. Crece el número de variables excesivamente y se ralentiza la resolución o puede bloquearse la memoria del ordenador. Nótese que para nrefine=6, resulta 4^6=4096 veces más el número de elementos inicial.

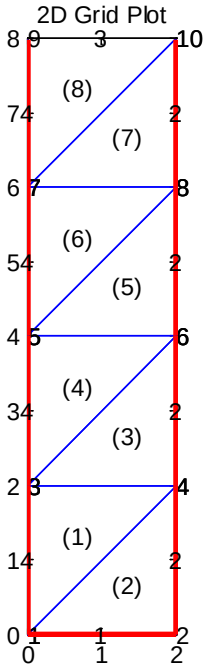
InputIniGeometria

Para el caso cuadrilátero y la malla inicial de la figura:




```
   Nodes(1,1:2)=[0,2];Nodes(2,1:2)=[0,0];
   Nodes(1,3:4)=[0,2];Nodes(2,3:4)=[2,2];
   Nodes(1,5:6)=[0,2];Nodes(2,5:6)=[4,4];
   Nodes(1,7:8)=[0,2];Nodes(2,7:8)=[6,6];
   Nodes(1,9:10)=[0,2];Nodes(2,9:10)=[8,8];
      nno=size(Nodes,2);% nº nodos
      nno_ini=nno; % num nodos primera iteracion
 Elems=[1,2,4,3;3,4,6,5;5,6,8,7;7,8,10,9]; % contrarreloj!!
       Elems=Elems'; % cada col es 1 elemento,
       nel=size(Elems,2); % nº elems
      BoundaryNodes(1).Nodes=[1,2]; % No importa orden
      BoundaryNodes(2).Nodes=[2,4,6,8,10];
      BoundaryNodes(3).Nodes=[10,9];
      BoundaryNodes(4).Nodes=[9,7,5,3,1];
```

Para el caso triangular y la malla inicial de la figura:




```
Nodes(1,1:2)=[0,2];Nodes(2,1:2)=[0,0];
   Nodes(1,3:4)=[0,2];Nodes(2,3:4)=[2,2];
   Nodes(1,5:6)=[0,2];Nodes(2,5:6)=[4,4];
   Nodes(1,7:8)=[0,2];Nodes(2,7:8)=[6,6];
   Nodes(1,9:10)=[0,2];Nodes(2,9:10)=[8,8];
       nno=size(Nodes,2);% nº nodos
       nno_ini=nno; % num nodos primera iteracion
 Elems=[1,4,3;1,2,4;4,6,3;3,6,5;5,6,8;5,8,7;7,8,10;10,9,7];
       Elems=Elems'; % cada col es 1 elemento,
       nel=size(Elems,2); % nº elems
      BoundaryNodes(1).Nodes=[1,2]; % No importa orden
      BoundaryNodes(2).Nodes=[2,4,6,8,10];
      BoundaryNodes(3).Nodes=[10,9];
      BoundaryNodes(4).Nodes=[9,7,5,3,1];
```

Recuérdese que la numeración de los nodos no se modifica a lo largo de los sucesivos refines, con lo que se puede seguir la evolución a lo largo de los refines de los nodos iniciales (de otros).

NodalSoln.m

Para introducir la fuente puntual , en el nodo 8 de las discretizaciones anteriores, **NodalSoln.m**

```
R(8)=R(8)+125
d=K\R
rf=0;
```

Como la numeración no varía, la referencia al nodo 8 anterior vale para todos las etapas de refines.
Puesto que no hay condiciones de borde esenciales (valor de temperatura especificado), no hay necesidad de particionar la matriz. Se resuelve directamente el sistema de las temperaturas. No hay vector de 'reacciones'

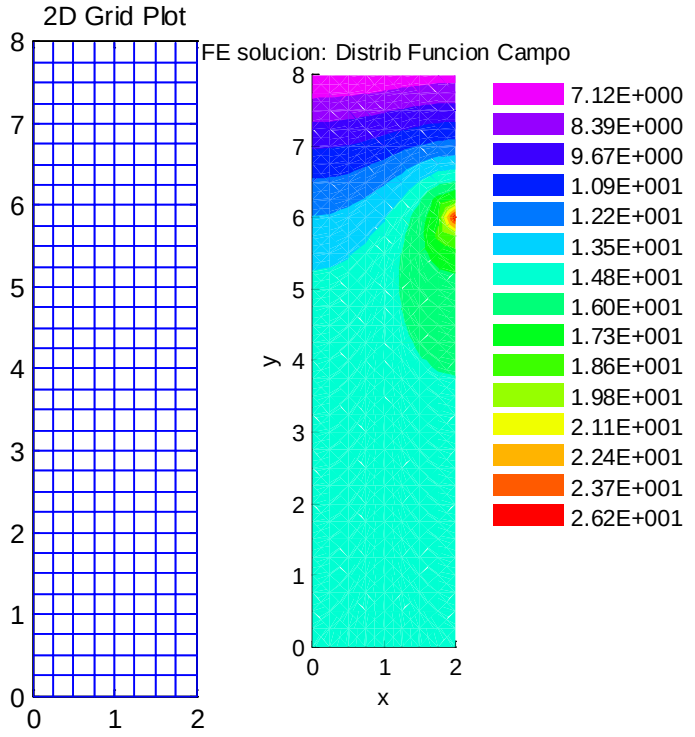
Evolución de temperatura en los 10 nodos iniciales a lo largo de 6 etapas, MALLA CUADRILATERA:

```
Evol =
   1   15.83398   15.83266   15.83111   15.83056   15.83042   15.83038   15.83037
   2   15.83269   15.83401   15.83555   15.83610   15.83625   15.83629   15.83630
   3   15.82621   15.82555   15.81705   15.81476   15.81418   15.81404   15.81400
   4   15.84046   15.84113   15.84963   15.85199   15.85259   15.85274   15.85278
   5   15.98948   15.65843   15.60046   15.59369   15.59221   15.59185   15.59176
   6   15.67718   16.01533   16.07398   16.08915   16.09294   16.09389   16.09413
   7   12.40516   13.44840   13.52455   13.55846   13.56728   13.56950   13.57005
   8   19.26151   21.64154   23.94535   26.21055   28.46575   30.71843   32.97050
   9    7.76371    7.21390    7.12894    7.12151    7.11999    7.11963    7.11954
  10    7.23629    7.79912    7.88508    7.90726    7.91278    7.91416    7.91450
```

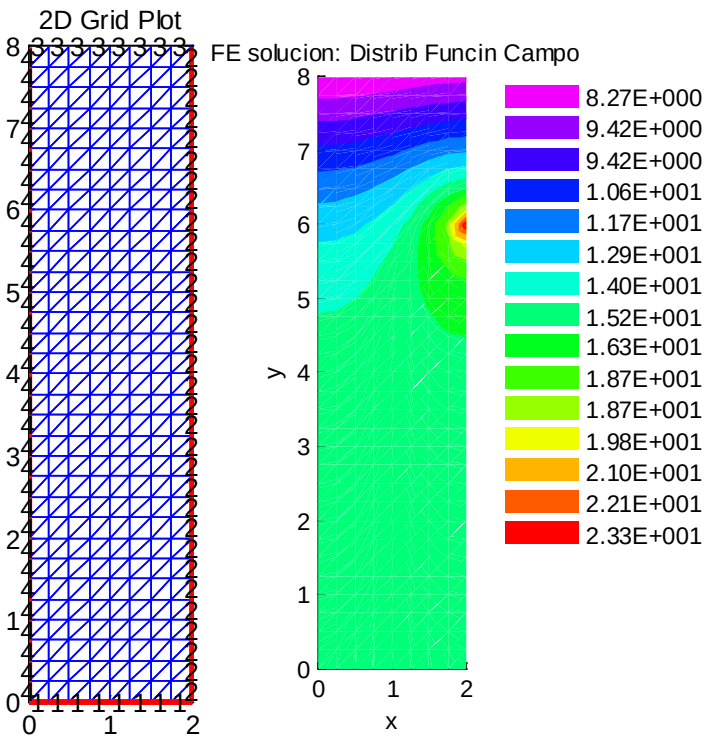
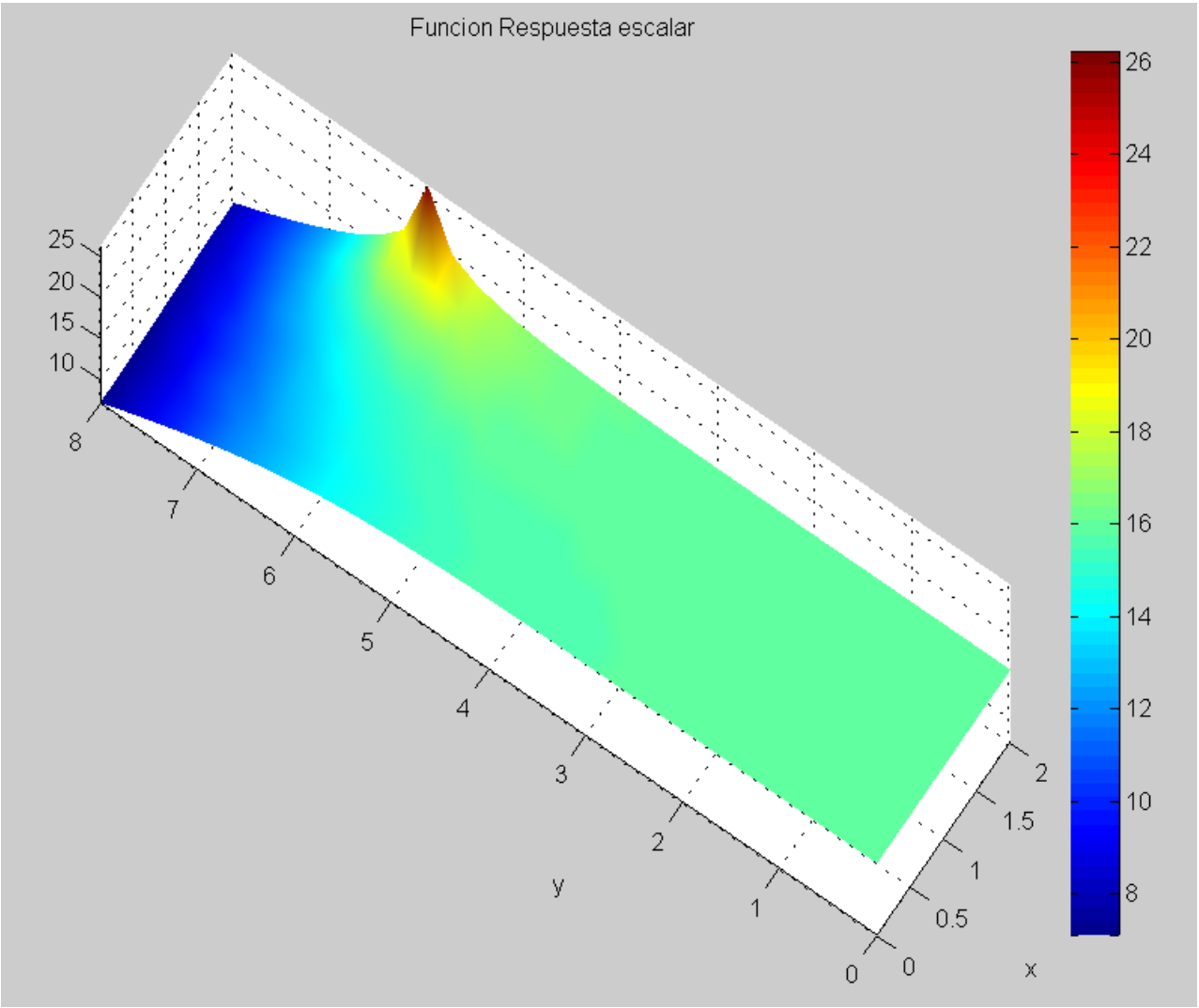
Evolución de temperatura en los 10 nodos iniciales a lo largo de 6 etapas, MALLA TRIANGULAR

```
Evol =
   1   15.78637   15.82494   15.82936   15.83014   15.83031   15.83035   15.83036
   2   15.88030   15.84224   15.83732   15.83653   15.83636   15.83631   15.83630
   3   15.72375   15.79648   15.81009   15.81305   15.81376   15.81393   15.81398
   4   15.94292   15.87529   15.85706   15.85379   15.85303   15.85285   15.85280
   5   15.36890   15.53321   15.57678   15.58797   15.59079   15.59150   15.59168
   6   16.29777   16.23388   16.13101   16.10215   16.09613   16.09468   16.09433
   7   13.77555   13.67127   13.59114   13.57487   13.57137   13.57052   13.57030
   8   17.89112   19.97639   22.18914   24.43299   26.68294   28.93432   31.18605
   9    6.69478    6.99993    7.08817    7.11156    7.11751    7.11901    7.11938
  10    8.30522    8.19041    7.98800    7.93054    7.91847    7.91557    7.91485
```

Malla cuadrilátera
3 refines



Malla triangular
3 refines



La perspectiva 3D de la distribución de temperaturas tras 3 refines en la malla cuadrilátera es: