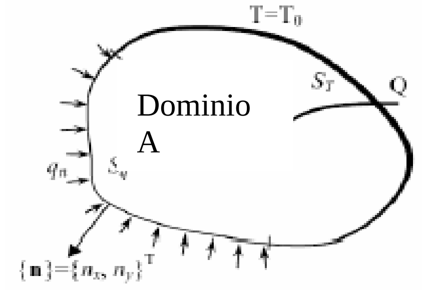
Prob PI-1. Forma débil de un problema de flujo de calor estacionario en 2D (Cálculos a mano)

Considérese el problema definido en la figura siguiente:



La EDP asociada es: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + Q = 0$$

con Q una fuente de calor por unidad de área, conocida.

Obsérvese que la forma compacta de esta EDP es:

$\nabla\cdot([k]\ \nabla T) + Q = 0$, [k] es la matriz de conductividad $[k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$ de la ecuación constitutiva.

Se consideran las siguientes condiciones en el contorno o borde del dominio A:

$T=T_0$ (predeterminado) sobre S_T , $q_n=\hat{q}_n$ sobre S_q

P1.a) Multiplicar la anterior ecuación diferencial por $w=\delta T$ e integrar sobre el dominio A. Recordar que $w=\delta T$ es cero en los bordes donde la temperatura T toma un valor conocido prescrito.

Integrar ‘por partes’ utilizando la fórmula de Green cada término separado de la EDP utilizando lo siguiente:

$$\iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)\cdot w + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right)\cdot w \right)\cdot dA = \int_S \left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\cdot n_x \cdot w + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\cdot n_y \cdot w \right)\cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x}\cdot k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right)\cdot dA$$

Mostrar que esta es la forma equivalente por componentes de la expresión compacta utilizada en las notas de clase:

$$\iint_A \nabla\cdot([k]\cdot\nabla T)\cdot w\cdot dA = \int_S \underbrace{[k]\cdot\nabla T\cdot\mathbf{n}}_{q_n}\cdot w\cdot ds - \iint_A \nabla w\cdot[k]\cdot\nabla T\cdot dA$$

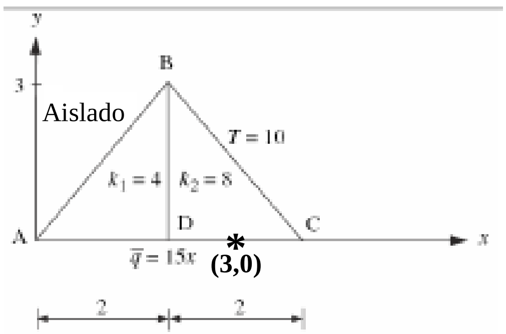
Donde $q_n=q_x\cdot n_x+q_y\cdot n_y$ es el flujo normal de calor 'ENTRANTE' en la superficie cuyo vector normal 'SALIENTE' al dominio A es $\mathbf{n}=n_x\cdot\mathbf{i}+n_y\cdot\mathbf{j}$. Deducir la forma ‘débil’ final de este problema.

P1.b) Considérese ahora una condición de convección en el contorno, dada por $\hat{q}_n = h\cdot(T_f - T)$ sobre S_q. Para este caso, deducir la nueva forma débil y deducir también la aportación matricial de un elemento $\mathbf{K^e}\cdot\mathbf{d^e}$ -> $\mathbf{f^e}$ en el problema de flujo de calor. Hacerlo para un elemento genérico e. Dejar la matriz de ‘rigidez’ y vector de ‘cargas’ en términos de las integrales que afectan a las funciones base $[N^e]$ y sus derivadas$[B^e]$.

Mostrar las contribuciones a $\mathbf{K^e}$ y a $\mathbf{f^e}$ que resultan de esta condición convectiva en el contorno.

Problema PI-2. Conducción del calor en un dominio 2D compuesto con 2 materiales (cálculo manual)

(Prob. 8.2 Fish, J., Belytschko, T. “A First Course in Finite Elements”. Ed. Wiley, 2007)



Considérese una placa triangular compuesta de dos materiales isotrópicos con conductividades térmicas $k_1=4$ W·ºC^{-1} y $k_2=8$ W·ºC^{-1} indicados en la figura, en la que las dimensiones son en metros.

Sobre el lado BC se impone una temperatura constante de T=10 ºC^{-1}.

El lado AB está aislado térmicamente.

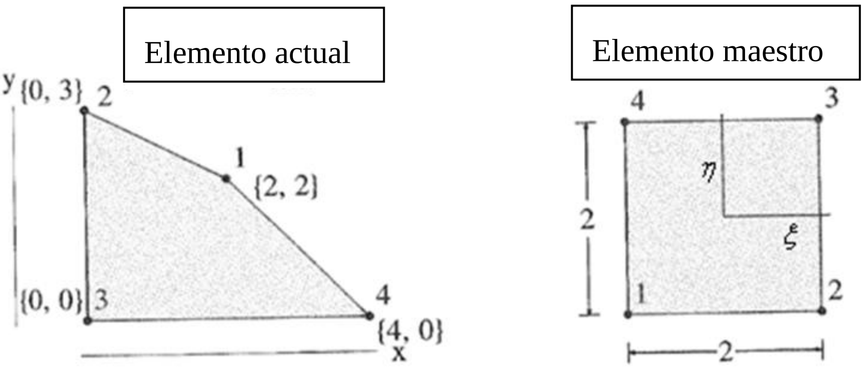
Sobre el lado AC se aplica un flujo dado por una distribución lineal $\bar{q}$=15x W·m^{-1}.

En el punto x=3, y=0, se aplica una fuente puntual P=45 W.

Para la malla de elementos finitos, considérense dos elementos triangulares, ABD y BDC. Operando a mano, obtener la temperatura y la distribución de flujos en la placa.

Problema PI-3 . Transformación de cuadriláteros. (cálculos a mano))

Se considera el elemento cuadrilátero de 4 nodos de la figura, y su imagen transformada a un elemento maestro o tipo:



P3.a) Desarrollar una transformación adecuada para transformar el elemento actual en el elemento 'maestro' 2x2 mostrado en la figura.

P3.b) Comprobar que la transformación es correcta (invertible).

P3.c) Deducir la expresión de N_3(x,y) en los 4 bordes del elemento actual en x-y.

Calcular $\partial N_3/\partial y$ en el nodo 3 (0,0) del elemento en (x,y), donde N_3(x,y) es la tercera función de interpolación global y $\widehat{N}_3$(ξ,η) su expresión en el elemento maestro respectivamente. Calcular también el valor de esa derivada para cualquier punto del lado 2-3 (0,3)-(0,0). Para $\partial N_3/\partial y$ en el nodo 3 (0,0) de X-Y hacer los cálculos en el elemento maestro, donde al punto 3 (0,0) le corresponden las coordenadas ξ,η: (1,1), y al lado 2-3 le corresponde el lado ξ=1, entre los puntos (1,-1) y (1,1) del dominio ξ,η.

P3.d) Calcular $\iint_A 64 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot dA$ donde N_2(x,y) y N_3(x,y) son la segunda y tercera funciones de interpolación y A es el área del elemento actual. Utilizar integración numérica con una regla de Gauss-Legendre de tipo 1x1.

P3.e) Calcular $\int_C 4 \cdot N_{3C}\, dc$ donde C es el lado 3-4 del elemento, dc es el diferencial de longitud de arco a lo largo del lado 3-4 y N_{3C} es la tercera función de interpolación del elemento maestro expresada en un parámetro que varía a lo largo de ese lado. Utilizar integración numérica con una regla de Gauss-Legendre con 2 puntos base. Realizar la integral del mismo integrando a lo largo del otro lado del cuadrilátero en que no se anula, esto es, el lado 2-3. Obtener asimismo las integrales de N_1, N_2, N_4 a lo largo de los lados del elemento cuadrilátero en que no se anula cada una de ellas. Realizar las integrales empleando métodos geométricos, analíticos y numéricos (Gauss-Legendre).

Problema PI-4 – Transferencia de calor por convección (Matlab)

Se considera el análisis por Elementos Finitos de problemas de calor que implican fenómenos de convección (esto es, transferencia de energía entre un cuerpo sólido y medio fluido que lo envuelve).

La ecuación del problema en el caso particular que se considera aquí es:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) = f \qquad \text{en } \Omega$$

Donde T es la temperatura (en ºC), k_x y k_y son las conductividades [en W/(m·ºC)] a lo largo de las direcciones x e y respectivamente y f es la generación interna de calor por unidad de volumen en (W/m^3)

Las condiciones de contorno esenciales aquí implican la especificación de la temperatura T. Las condiciones de control naturales implican la especificación del flujo de calor $\hat{q}_n$ tal que :

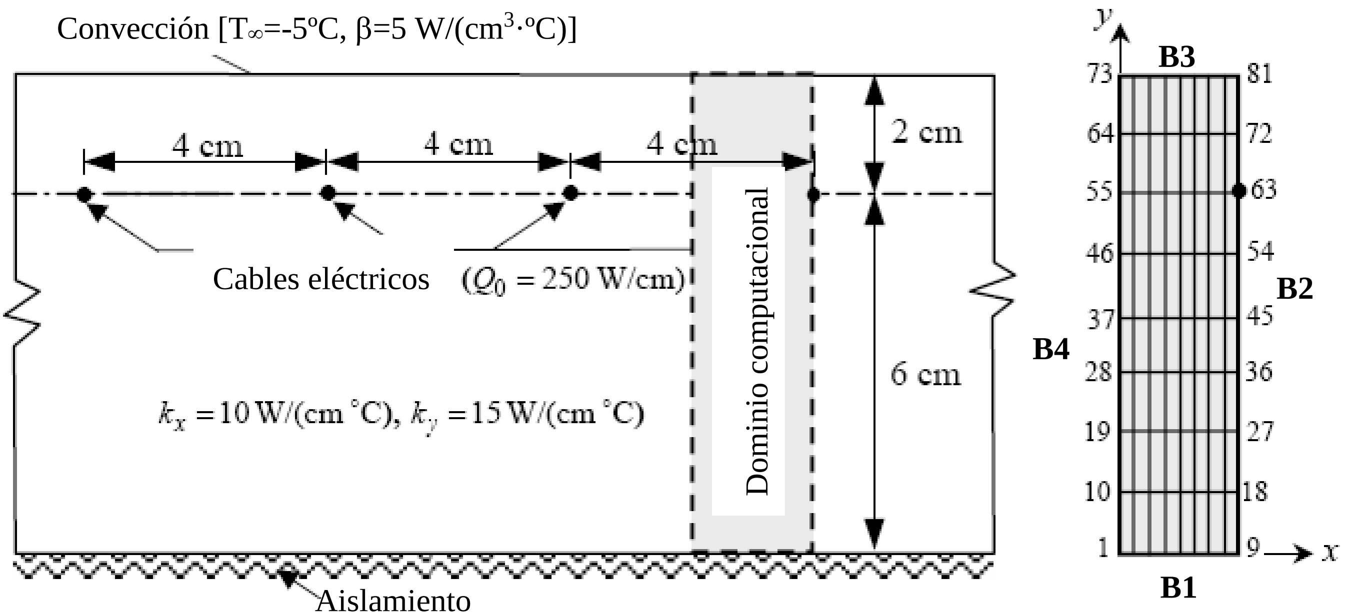
$$\underbrace{\left(k_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot n_x + k_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot n_y\right)}_{-\vec{q}\cdot\vec{n}} + \beta(T - T_\infty) - \hat{q}_n = 0$$

donde β es el coeficiente de transferencia convectiva de calor [en W/(m·ºC)] y T_∞ es la temperatura ambiente del medio fluido envolvente y $\hat{q}_n$ el flujo de calor especificado.

El primer término tiene en cuenta la transferencia de calor por conducción, el segundo por convección y el tercero indica el flujo de calor especificado. SE PIDE:

P4.a) Deducir la forma débil para este tipo de problemas y dar expresiones explicitas de la matriz de 'rigidez' de un elemento y el vector de cargas de un elemento. Supóngase que parte de contorno tiene condiciones de contorno esenciales y el resto condiciones de contorno naturales como las indicadas antes. ¿Cómo afectan estas últimas condiciones a la matriz de rigidez?

P4.b) (Prob 8.28 de Reddy, J.N. 'An Introduction to the FEM', 3rd ed, 2006) Considérese ahora una serie de cables calientes colocados en un medio conductor, como se muestra en la figura. El medio tiene conductividad k_x=10 W/(cm·ºC) y k_y=15 W/(cm·ºC). En la parte superior del dominio la superficie está sometida a una temperatura de -5 ºC, y la superficie inferior está limitada por un medio aislante térmicamente. Suponer que cada cable es una fuente calorífica puntual de 250 W/cm. Considerar que al coeficiente convectivo entre el medio y la superficie superior es β=5 W/(cm^2·ºC). Utilizar una malla de elementos cuadriláteros en el dominio computacional (aprovechar cualquier simetría presente en el problema). Dibujar el mapa de contornos de temperaturas. De ello comprobar la convergencia de la malla.



Indicación: Utilizando la simetría del problema, se puede reducir al dominio computacional al mostrado en la figura. La entrada de calor en el nodo donde está el cable es 125 W/cm, que se localiza en el nodo 63. Las condiciones de borde en el contorno superior son de tipo convectivo, en los bordes a la derecha e izquierda, el flujo de calor es cero (por la simetría), y en el borde inferior el flujo de calor es cero debido al aislamiento.