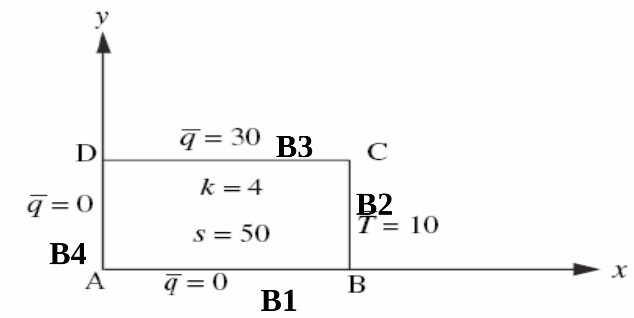
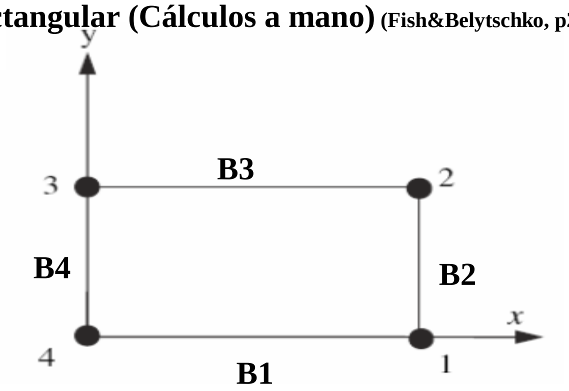
Prob PII-1. Conducción del calor en un dominio 2D rectangular (Cálculos a mano) **(Fish&Belytschko, p210)**

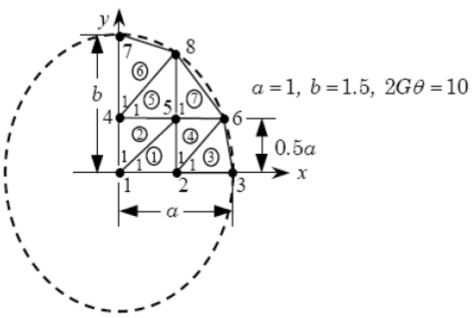




Se considera un problema de distribución de calor en un dominio rectangular (2x1 m) como se ve en la figura de la izquierda. La conductividad es k=4 W·ºC^{-1}. La temperatura está forzada a $\bar{T} = 10ºC$ en el borde CB Los lados AB y CD están aislados, es decir, en ellos $\bar{q} = 0$ W·m^{-1} . A lo largo del lado DC, el flujo de borde es $\bar{q} = 30$ W·m^{-1}. Sobre el rectángulo actúa una fuente distribuida de calor constante, s=50 W m^{-2}

Obtener la temperatura en los nodos y los flujos en los nodos. Evaluar las matrices de los elementos mediante integración de Gauss. Utilizar un solo elemento finito rectangular, con la numeración de nodos indicada en la figura derecha, de modo que la numeración local y global coincide.

Problema PII-2. Torsión de una pieza cilíndrica de sección constante



Por simetría, se puede utilizar un cuadrante de la sección como dominio computacional

La teoría de Prandtl de la torsión de una pieza cilíndrica lleva a la EDP:

$$-\nabla^2 u = 2\cdot G\cdot\theta \quad \text{en } \Omega,\ u=0 \text{ sobre } \Gamma \text{ (el borde de la sección } \Omega)$$

donde Ω es la sección transversal de la pieza cilíndrica sometida a torsión, Γ es la curva contorno de Ω, G es el módulo de corte del material e la pieza, θ es el ángulo de giro en la torsión, y u es la función de tensión.

SE PIDE: Resolver la ecuación para el caso en que Ω una sección elíptica de la pieza, utilizando la malla de elementos triangulares lineales o de elementos cuadriláteros implementada en el programa 2dBVP en Matlab. Comparar la solución pro elementos finitos con la solución exacta (válida para secciones elípticas con ejes a y b)

$$u = \frac{G\cdot\theta\cdot a^2\cdot b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$. Utilizar a=1, b=1.5, y $f_0 = 2\cdot G\cdot\theta = 10$

Obsérvese que la malla mostrada en la figura es sólo para ilustrar. Se podría crear una malla con algún software. Si se utiliza ANSYS se puede utilizar la función loadFromGridFile.m del programa 2dBVP para leer la malla. Es interesante comprobar la convergencia de la malla.

Se utilizarán funciones de mallado en formulación de coordenadas polares (función FunGeomPolar.m en carpeta 2dBVP_EF_MallasPolares) así como las modificaciones introducidas al respecto en los diversos módulos de 2dBVP (Main2D_refine, InputIniGeometria, InputData, include_variables,...). Observar la evolución de la convergencia a lo largo de sucesivos refines de la malla de elementos finitos.

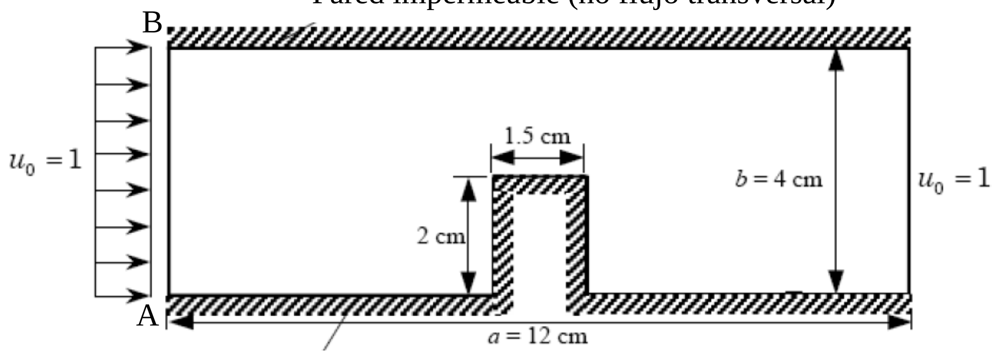
Una vez que la función de tensión u se ha obtenido, las tensiones se puede calcular de las expresiones:

$$\sigma_{xz} = G\cdot\theta\cdot\partial u/\partial y \qquad , \qquad \sigma_{yz} = -\,G\cdot\theta\cdot\partial u/\partial x$$

Dibujar el vector tensión: $\mathbf{v} = \bar{\sigma}_{xz}\mathbf{i} + \bar{\sigma}_{yz}\mathbf{j}$, donde $\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz}/(G\cdot\theta)$, $\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz}/(G\cdot\theta)$

PII-3. Flujo confinado en torno a una muro rectangular

Pared impermeable (no flujo transversal)



Pared impermeable (no flujo transversal)

El flujo irrotacional de un fluido ideal (es decir, un fluido no viscoso) en torno a un muro (ver la figura anterior) se va a analizar mediante el método de elementos finitos con el programa 2dBVP en Matlab. La ecuación que representa este flujo es:

$$-\nabla^2 F = 0 \qquad \text{en } \Omega,$$

donde u puede ser cualquiera de las dos funciones: a) F(x,y) es función de corriente $\Psi(x,y)$ o b) F(x,y) es potencial de velocidad $\phi(x,y)$.

a) Si u es la función de corriente Ψ, las componentes de la velocidad del campo de flujo son:

$$u_1 = -\partial\Psi/\partial y \quad , u_2 = +\partial\Psi/\partial x$$

b) Si u es el potencial de velocidad ϕ, las componentes de la velocidad del campo de flujo son:

$$u_1 = -\partial\phi/\partial x \quad , u_2 = -\partial\phi/\partial y$$

En ambos casos, el campo de velocidades no está afectado por un término constante en la solución u. Por simetría, basta modelar la mitad izquierda del dominio. Se elige el punto inferior izquierdo como origen. Primero se puede crear una malla a mano y refinarla, o con un programa como ANSYS y utilizar la función loadFromGridFile.m para leer dicha malla y resolver el problema utilizando las dos formulaciones.

SE PIDE:

. Calcular la solución en cada elemento y comparar los resultados con las dos formulaciones a) y b).

. Obtener el dibujo de vectores velocidad y el de curvas de nivel de los potenciales.

Hay que tener cuidado con el tipo de condiciones de contorno que se utilicen. Seguidamente se indican las justificaciones básicas para las condiciones de contorno mostradas en las figuras.

a) **Formulación con función de corriente**:

Puesto que $u_2 = \partial\Psi/\partial x = 0$ en el borde AB, la función de corriente Ψ sólo depende de y en AB.

Como $u_1 = -\partial\Psi/\partial y = cte = u_0 = 1$ en AB, la función Ψ es lineal en y en AB, esto es $\Psi(x_{AB}, y_{AB}) = c + d\cdot y$. El valor de c se puede tomar arbitrario, no influye en la solución de la EDP.

Recordar que al flujo perpendicular a una línea de corriente es cero. Por tanto, ¡¡ se deben considerar las paredes del dominio como líneas de corriente!! Debido a la simetría respecto de la vertical en medio de la figura, basta con la mitad izquierda del dominio para el análisis. Puesto que el campo de velocidades depende de la diferencia relativa de dos líneas de corriente, se tomará el valor de la línea de corriente que coincide con el punto inferior izquierdo, (digamos el A) con $\Psi_A = 0$, y entonces se determinará el valor de Ψ en la pared superior con la condición de que u_0 es la velocidad del fluido paralela a la línea de corriente. Puesto que u_0 se da en la entrada al dominio, se determinará el valor en la línea de corriente en el punto superior izquierdo (digamos el B) integrando la ecuación anterior del modo siguiente:

$$\int_{\Psi_A}^{\Psi_B} d\Psi = \Psi_B - \Psi_A = \int_{y_A}^{y_B} -u_0 dy = -u_0(y_B - y_A) \qquad \text{o bien,}$$

$$\Psi_B = \Psi_A - u_0\cdot(y_B - y_A)$$

Puesto que la velocidad a la entrada es constante, Ψ varía linealmente en la entrada desde $\Psi_A = 0$ en el punto A , hasta el valor $-u_0 \cdot y_B$ en el punto B. Estas condiciones de contorno se pueden resumir así:

. Sobre el borde izquierdo, se especifica Ψ de valor $\Psi=-y \cdot u_0$, con valor $\Psi=-4 \cdot u_0$, en la pared superior, y $\Psi=0$ en la pared inferior, que incluye el borde del resalte rectangular.

. Sobre el borde 6, que está en la línea de simetría del dominio, la velocidad vertical es nula, $u_2=0$, allí $u_2=\partial\Psi/\partial x=0$, luego la proyección del gradiente de Ψ sobre la normal exterior al borde 6:

$$\mathrm{grad}(\Psi)\cdot\mathbf{n}=[\partial\Psi/\partial x=0,\ \partial\Psi/\partial y]\cdot[1,0] = 0,$$ esta es una condición natural.

b) **Formulación con potencial de velocidades**:

El hecho de que $u_2 = - \partial\phi/\partial y = 0$ en toda la pared superior y todo el borde inferior del dominio, da las condiciones de contorno en esos bordes.

A lo largo de AB, la velocidad u_0 está dada: $-\mathrm{grad}(\phi)=-(\partial\phi/\partial x ,0)= -(-u_0,0)= (u_0,0)$, $\mathrm{grad}(\phi) = (-u_0,0)$.

Al programa 2dBVP se ha de dar $\mathrm{grad}(\phi)\cdot\mathbf{n}=\mathrm{alfa}+\mathrm{beta}\cdot u$**,** , **n** normal exterior al recinto, aquí $\mathbf{n}=(-1,0)$:

$\mathrm{grad}(\phi)\cdot\mathbf{n}= \partial\phi/\partial n = (-u_0,0)\cdot(-1,0)= u_0= \mathrm{alfa}+\mathrm{beta}\cdot u$, como no depende de u será: $\mathrm{alfa}=u_0$, $\mathrm{beta}=0$

A lo largo de la línea vertical de simetría geométrica (antisimetría del sistema) se ha de saber bien ϕ o bien $\partial\phi/\partial n =\partial\phi/\partial x$. Puesto que $u_1 =-\partial\phi/\partial x$ no se conoce en ese lugar, se supondrá que ϕ es conocido y se hace ϕ igual a una constante (por ejemplo cero) para completar las condiciones de contorno. Haciendo $\phi=0$ sobre la línea vertical de simetría elimina el movimiento de sólido rígido en la solución. Puesto que el campo de velocidades depende del gradiente de ϕ, cualquier valor constante asignado a ϕ sobre esa línea dará los mismos resultados para $\nabla\phi$. Estas condiciones de contorno se resumen como sigue:

. En el borde derecho, se especifica que $\phi=0$.

. $\partial\phi/\partial n$ se especifica con valor cero en las paredes superior e inferior impermeables, incluyendo el borde rectangular de resalte.

. Sobre el borde izquierdo, $\partial\phi/\partial n=u_0$