1.-ALGUNAS FÓRMULAS DE DERIVACIÓN APROXIMADA

Se dan las siguientes fórmulas de derivación aproximada, indicándose su error de truncamiento ET:

FÓRMULAS CENTRADAS:

$$f''(c) \approx \frac{1}{h^2}\left(f(c+h)-2f(c)+f(c-h)\right) \quad , \quad ET=-f^{(iv}(\xi)\cdot h^2/12$$

$$f'(c) \approx \frac{1}{2h}\left(f(c+h)-f(c-h)\right) \ , \ ET=-f'''(\xi)\cdot h^2/6$$

FÓRMULAS UNILATERALES (hacia ADELANTE y hacia ATRÁS):

$$f'(c) \approx \frac{1}{h}\left(f(c+h)-f(c)\right) \ , \ ET=-f''(\xi)\cdot h/2 \quad , \quad f'(c) \approx \frac{1}{h}\left(f(c)-f(c-h)\right) \ , \ ET=f''(\xi)\cdot h/2$$

$$f'(c)\approx\frac{1}{2h}\left(-f(c+2h)+4f(c+h)-3f(c)\right) \ , \ f'(c) \approx\frac{1}{2h}\left(f(c-2h)-4f(c-h)+3f(c)\right), \ ET=f'''(\xi)\cdot h^2/3$$

$$f''(c)\approx\frac{1}{h^2}\left(f(c)-2f(c+h)+f(c+2h)\right), ET=-f'''(\xi)\cdot h, \ f''(c)\approx\frac{1}{h^2}\left(f(c)-2f(c-h)+f(c-2h)\right), ET=f'''(\xi)\cdot h$$

(la abscisa ξ es desconocida e intermedia a las abscisas en que se evalúa a fórmula correspondiente).

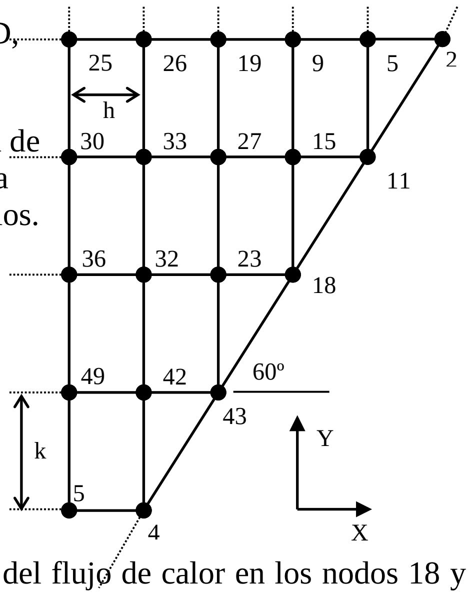
SE PIDE: Indicar justificadamente para cada fórmula, qué polinomios es capaz de derivar exactamente en x=c, independientemente del valor de h.

2.- E.T.S. I. Caminos. Santander. Plan Ing. de Caminos, 3er Curso. EC. DIF. Y MÉT. NUM. FINAL, MNP2. 11.02.03

Se tiene la ecuación de la difusión uniforme y estacionaria del calor en 2D,

$$\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 = 0,$$

(T: Temperatura) y un dominio en el que se quiere obtener la distribución de temperaturas, empleando el método de diferencias finitas. Los nodos de la discretización están numerados, y en la figura se muestra un equipo de ellos.



El nodo 18 está en el borde del dominio, y en él se verifica la condición de aislamiento térmico perfecto. Ese borde mostrado es recto y forma un ángulo de 60º con el eje X. SE PIDE:

i) Deducir la ecuación que resulta al expresar el cumplimiento de la condición de aislamiento térmico perfecto en el nodo 18.

ii) Deducir la ecuación que resulta al expresar el cumplimiento de la ecuación diferencial en el nodo 23.

iii) Escribir las expresiones aproximadas del gradiente de temperatura y del flujo de calor en los nodos 18 y 23, suponiendo distribución isotrópica y que el coeficiente de conductividad vale 1.

Se elegirán las fórmulas de derivación más adecuadas para aplicar en el ejercicio, justificando la elección.

3.- E.T.S. I. Caminos. Santander. Ing. de Caminos, 3er Curso. EC. DIF. Y MÉT. NUM. SEP 2010, MNP2

Dada la siguiente ecuación, relacionada con la torsión de una barra elástica:

$$\partial^2\Phi / \partial x^2 \ + \ \partial^2\Phi / \partial y^2 + j = 0 \ \text{(j es el nº de equipo)}$$

definida en cada punto del dominio plano cuadrado delimitado por x = +1, x = -1, y = +1, y = -1, considerando la condición auxiliar de que Φ es nula en todo punto del contorno del cuadrado anterior. SE PIDE:

i) Calcular una solución discretizada mediante el método de diferencias finitas, en los vértices de una malla cuadrada de lados paralelos a los ejes X e Y , con tamaño de lado h=1/2. El contorno cuadrado forma parte de la malla. Aprovechar las simetrías en la estructura geométrica del problema para reducir al mínimo el número de incógnitas. Dibujar la discretización y numerar los nodos.

ii) Suponiendo que la ecuación corresponde con las unidades adecuadas a la torsión de una barra de sección cuadrada, calcular aproximadamente y dibujar el vector $[\partial u/\partial y, -\partial u/\partial x]$ en los puntos de la retícula, que salvo un factor constante, coincide con el vector de tensiones tangenciales en puntos de la sección en el modelo de torsión.

Notas: Elegir las fórmulas de derivación aproximada adecuadas. Escribir en forma matricial el sistema resultante y resolverlo con un programa de ordenador.

4.- ETSICCP. Santander. METODOS NUMERICOS. Curso 3º. Examen Extraord. Parte 2ª. 7 Sep 1994

Se tienen las siguientes fórmulas aproximadas de derivación de tipo interpolatorio para la derivada 2ª y 1ª de una función f(x) en x=c, con c, h y θ (θ∈[0,1]) dados:

$$f''(c) \approx \left(\frac{1}{\theta} \cdot f(c-\theta \cdot h) - (1+\frac{1}{\theta}) \cdot f(c) + f(c+h) \right) \cdot \frac{2}{(1+\theta) \cdot h^2}, \quad f''(c) \approx \left(f(c-h) - (1+\frac{1}{\theta}) \cdot f(c) + \frac{1}{\theta} \cdot f(c+\theta \cdot h) \right) \cdot \frac{2}{(1+\theta) \cdot h^2}$$

que tienen ET respectivamente:

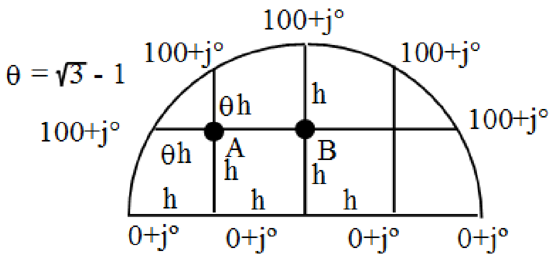
$$ET = -\frac{(1-\theta) \cdot h}{3} f'''(c) - \frac{(1+\theta^3) \cdot h^2}{12 \cdot (1+\theta)} \cdot f^{(iv}(c) + \ldots \text{ y } \quad ET = \frac{(1-\theta) \cdot h}{3} f'''(c) - \frac{(1+\theta^3) \cdot h^2}{12 \cdot (1+\theta)} \cdot f^{(iv}(c) + \ldots$$

(Comprobar el error para θ = 1)

$$f'(c) \approx \frac{-1}{\theta \cdot h \cdot (1+\theta)} \cdot f(c-\theta \cdot h) + \frac{1-\theta}{\theta \cdot h} \cdot f(c) + \frac{\theta}{(1+\theta) \cdot h} f(c+h), \quad f'(c) \approx \frac{-\theta}{h \cdot (1+\theta)} \cdot f(c-h) - \frac{1-\theta}{\theta \cdot h} \cdot f(c) + \frac{1}{(1+\theta) \cdot \theta \cdot h} f(c+\theta \cdot h)$$

Estas fórmulas de derivación aproximada se aplicarán para resolución del siguiente ejercicio:

. Una lámina semicircular de radio 2h y conductividad calorífica uniforme tiene en su diámetro una temperatura constante de 0+j° (j es el nº de equipo), y en el borde semicircular 100+j°.



i) Empleando el método de diferencias finitas aproximar la solución en los puntos de la malla de la figura. Escribir en forma matricial el sistema resultante y resolverlo con un programa de ordenador (tomar h=1).

ii) Aproximar el valor del gradiente de temperatura y del flujo de calor en los puntos A y B. Suponer que la conductividad térmica es isotrópica con coeficiente k conocido (tomar k=1).

Nota: El sistema de ecuaciones para aproximar las incógnitas básicas T_A, T_B se obtendrá particularizando la ecuación diferencial de Laplace ($\partial^2T/\partial x^2 + \partial^2T/\partial y^2=0$), que representa el fenómeno, en los puntos A y B, basándose para escribir las fórmulas de derivación aproximada en las fórmulas de derivación indicadas.

5.- E.T.S. I. Caminos. Santander. Ing. de Caminos, 3er Curso. EC. DIF. Y MÉT. NUM. SEP 2012 MNP2.

i) Deducir el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de diferencias finitas a la ecuación de Laplace: $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2 = 0$, en el dominio del plano XY formado por el cuadrado [0,1]×[0,1], con las condiciones auxiliares (j es el nº de equipo):

u(x, 0) = x+j ; u(x, 1) = j+1 – x ;
u(0, y) = y+j ; u(1, y) = j+1 – y ;

Se tomará la discretización basada en una retícula cuadrada de lado h = 1/3, paralela a los ejes X e Y.
Aprovechar la simetrías en la ecuación, el dominio y las condiciones auxiliares para simplificar el problema (ayudarse de una representación gráfica de la retícula numerando los nodos).
La derivación aproximada se basará en la fórmula de derivación unidimensional:

$$f''_{aprox}(c)= (f(c-h)-2f(c)+f(c+h))/h^2, \text{ cuyo error es } -f^{(IV}(\mu)h^2/12, \ \mu \text{ en } (c-h, c+h)$$

Escribir en forma matricial el sistema resultante y resolverlo con un programa de ordenador.

ii) Sabiendo que el problema tiene como solución exacta u(x,y)=x+y-2xy+j, ¿qué se puede decir del error en los puntos de la discretización entre la solución exacta y la que resulta mediante el método de diferencias finitas anterior? Justificar debidamente la respuesta.

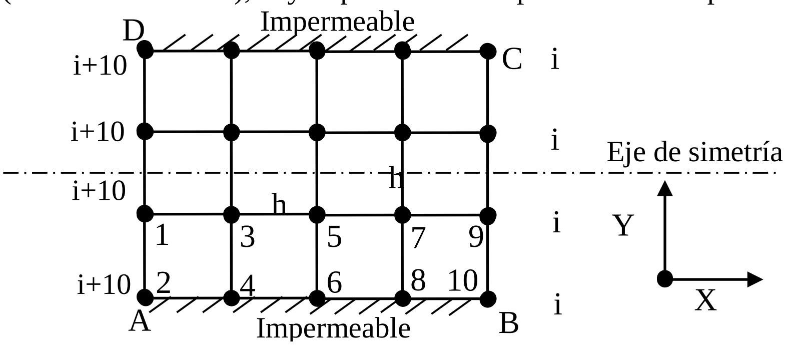
iii) Calcular de modo aproximado el gradiente ∇u en los puntos de la retícula (2/3,1/3) , (2/3,0) , (0,0), (1,1). Utilizar las fórmulas:

$$f'(c) \approx \frac{1}{h}(f(c) - f(c-h)), \ ET = -f''(\xi) \cdot h/2 \quad , \quad f'(c) \approx \frac{1}{h}(f(c+h) - f(c)), \ ET = f''(\xi) \cdot h/2$$

Dibujar los gradientes. Comparar con los resultados exactos y dar una justificación.

6.- E.T.S.Ingenieros de Caminos. Santander. METODOS NUMERICOS. Parte 2ª. Final. 11 Feb 2000

i) Obtener la solución numérica discretizada del problema de la distribución en régimen permanente del potencial de velocidad U de un fluido perfecto en el trozo de canal ABCD de la figura, regulado por la ecuación de Laplace ($\partial^2U/\partial x^2 + \partial^2U/\partial y^2= 0$), teniendo en cuenta que en el lado AD el potencial es de (10+i) unid. (i es el nºde equipo) y en el BC es de i unid., y en los puntos interiores de los lados CD y AB (no en los extremos), hay impermeabilidad perfecta. Se empleará la malla cuadrada de la figura.



ii) Calcular de modo aproximado el potencial y la velocidad del fluido en los nodos de la malla. con h=1. ($[v_x,v_y]=-\nabla U$). Dibujar los vectores correspondientes.

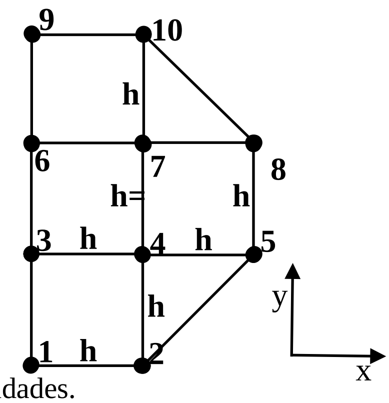
iii) Comparar el potencial y los gradientes con la solución exacta $u=-2.5\cdot x/h+i+10$ (origen en punto A). Justificar resultados.

Notas: Elegir fórmulas de derivación aproximada que tengan error de truncamiento ET de orden $O(h^2)$.
Escribir en forma matricial el sistema resultante y resolverlo por ordenador.

7.- E.T.S. I. Caminos. Santander. Ms Ing Caminos, 1er Curso. Mét. Mat y Numér en Ing. Bloque MN ene 2015

Se considera en la figura un modelo simplificado 2D de boquilla por la que circula un fluido perfecto en régimen estacionario, que verifica la ecuación diferencial de Laplace en 2D, con la variable dependiente u(x,y), que representa el potencial hidráulico.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$



En el dominio, h=1, se tienen las siguientes condiciones auxiliares:

. En el borde definido por los nodos 5, 8 se tiene que u=0 unidades

. En el borde definido por 1, 2 y 5, y el definido por 9, 10, 8,

el flujo normal $q_n=0$ (impermeable).

. En el borde de entrada de fluido, definido por 1, 3, 6, 9, el flujo normal $q_n= -10-j/10$ unidades.

(Por flujo normal en el borde se entiende $q_n = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$, siendo el vector flujo $\mathbf{q}=-\nabla u =[-\partial u/\partial x, -\partial u/\partial y]$, '·' producto escalar y **n** el vector normal unitario exterior al borde. j es el número de equipo).

Se trata de aproximar la solución del problema por diferencias finitas utilizando la retícula y nodos presentes en el dominio. Se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:
- El problema es simétrico, lo que implica que: $u_1=u_9$, $u_3=u_6$, $u_2=u_{10}$, $u_4=u_7$, $u_5=u_8$.

  Tómese como incógnitas u_1, u_2, u_3, u_4.
- En los nodos 1 y 3 se elegirá la condición de flujo normal conocido en el borde, con normal exterior **n** = [-1,0]
- En el nodo 2 se elegirá la condición de impermeabilidad, eligiendo como normal exterior al borde **n** = $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$
- En el nodo 5 se elegirá la condición de potencial hidráulico conocido $u_5=0$

Las fórmulas de derivación aproximada para las derivadas parciales se basarán en la siguientes fórmulas de derivación aproximada para una variable, Y NO OTRAS:
- Para la derivada 1a fórmulas de 2 puntos hacia adelante o hacia atrás , según corresponda:

$$f'(c)\approx\frac{1}{h}(f(c+h)-f(c)) \quad \text{o} \quad f'(c)\approx\frac{1}{h}(f(c)-f(c-h))$$

- Para la derivada 2a, fórmula bilateral centrada de 3 puntos: $f''(c)\approx\frac{1}{h^2}(f(c+h)-2f(c)+f(c-h))$

SE PIDE :

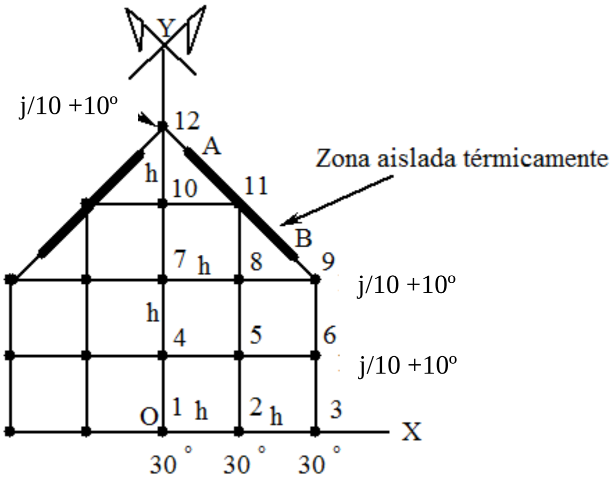
i) Deducir el sistema de ecuaciones por el método de diferencias finitas con los nodos de la figura, que permite resolver de modo aproximado el problema. Escribirlo en forma matricial.

ii) Resolver dicho sistema por ordenador.

iii) Calcular y DIBUJAR aproximadamente el vector flujo **q** en el nodo 4, con los resultados anteriores.

8. E.T.S.I. Caminos. Santander. METODOS NUMERICOS. Parte 2ª. Final. 6 Feb 1997

Se modela un local en cuyo interior hay una piscina con agua a 30 grados como se indica en la figura, y se desea hacer una valoración de la distribución estacionaria de la temperatura en el ambiente del local. Se supone que el local es suficientemente largo como como para considerar representativa una sección transversal con ejes XY en la que estudiar la distribución estacionaria de temperatura, regulada por la ecuación de Laplace $\partial^2T/\partial x^2 + \partial^2T/\partial y^2 = 0$. Se considera la retícula de la figura, con tamaño h para el lado básico, sobre la que se buscará la solución aproximada por el método de diferencias finitas.



El local tiene su sección transversal simétrica respecto al eje OY, y se supone que las condiciones de temperatura interior y exterior también lo son. Los puntos 1, 2, 3 corresponden a la superficie del agua, y en ellos la temperatura se mantiene siempre a 30º En los 6 y 9, en la pared acristalada del local, la temperatura es de j/10+10º (j es el nº de equipo) que se supone constante e igual a la temperatura en el exterior. Esa misma temperatura se da en el punto 12, que corresponde a una zona acristalada en la cumbrera del tejado. Otra parte del tejado está aislada térmicamente (zona AB y su simétrica), y esa condición de aislamiento térmico perfecto se debe imponer en el punto 11.

Se considerará la simetría del problema y se emplearán fórmulas de derivación con error de truncamiento ET de orden $O(h^2)$

i) Se deducirá el sistema de ecuaciones que conduce a la resolución aproximada del problema en los puntos de la retícula de la figura.

Escribir en forma matricial el sistema resultante y resolverlo con un programa de ordenador.

ii) Calcular de modo aproximado el flujo de calor en los nodos, suponiendo distribución isotrópica y que el coeficiente de conductividad vale 1 (aquí Flujo=-Grad(T)). Tomar h=1. Dibujar los vectores correspondientes

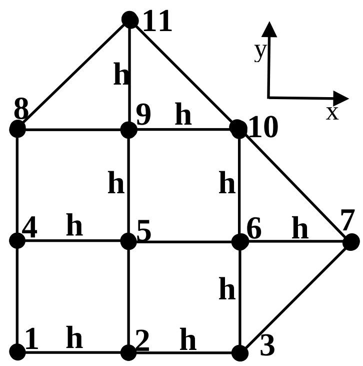
9. E.T.S. I. Caminos. Santander. Máster Ing Caminos, 1er Curso. Mét. Mat y Numér en Ing. Bloque MN sep 2014

Se considera la ecuación diferencial de Laplace en 2D, con una variable dependiente u(x,y), que puede representar la temperatura un problema de distribución estacionaria del calor en un medio isótropo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

definida en el dominio de la figura, basado en una retícula cuadrada de lado h=1

Se tienen las siguientes condiciones auxiliares (j es el nº de equipo):



. En el borde definido por los nodos 1, 2, 3, 7, se tiene que u = j unidades

. En el borde definido por los nodos 8,11 se tiene que u = 0 unidades

. En el borde definido por 11, 10 y 7, el flujo normal q_n= 0.

. En el borde definido por 8, 4 y 1, el flujo normal q_n=10.

(Por flujo normal en el borde se entiende $-\nabla u\cdot\mathbf{n}$, siendo ∇u el vector gradiente de u, '·' producto escalar y **n** un vector normal unitario exterior al borde). SE PIDE :

. Deducir el sistema de ecuaciones por el método de diferencias finitas con los nodos de la figura, que permite resolver de modo aproximado el problema. Escribir en forma matricial el sistema resultante y resolverlo con un programa de ordenador.Tomando como vector flujo **q** = ($-\partial u/\partial x$, $-\partial u/\partial y$), calcular aproximadamente el flujo en los nodos 2,4,5,9, a partir de los resultados del apartado anterior.

Elegir la fórmula de derivación aproximada para las derivadas parciales más adecuada a cada caso.