UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

TEOREMA SPETTRALE PER OPERATORI COMPATTI E APPLICAZIONI ALLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Relatore:
Chiar.mo Prof. Lorenzo D'Ambrosio

Laureando:
Fabio Pizzichillo

Anno Accademico 2011-2012

Indice

Introduzione

Una formulazione del Teorema Spettrale è nota dallo studio dall'algebra lineare. In dimensione finita, infatti, il Teorema fornisce una condizione necessaria affinché un operatore lineare sia diagonalizzabile, cioè rappresentabile da una matrice diagonale in una opportuna base, asserendo che ogni operatore lineare e simmetrico su uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è diagonalizzabile ed esiste una base ortonormale costituita da autovettori.

Possiamo applicare il Teorema allo studio su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, dell'equazione:

$$Au = f, \tag{1}$$

ove $u, f \in V$ ed $A : V \to V$ è un operatore lineare e simmetrico. Se $\{e_j\}$ è una base di V composta di autovettori e $\{\lambda_j\}$ è la famiglia dei relativi autovalori, essendo

$$u = \sum_{j=1}^{N} u_j e_j,$$

e imponendo che u sia soluzione di (1), abbiamo che:

$$Au = \sum_{j=1}^{N} u_j A e_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j u_j e_j = f = \sum_{j=1}^{N} f_j e_j. \tag{2}$$

Per l'unicità dei coefficienti, la (2) è equivalente alla risoluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1 = f_1 \\ \lambda_2 u_2 = f_2 \\ \quad \dots \\ \lambda_N u_N = f_N. \end{cases}$$

Lo scopo della presente tesi è mostrare una possibile estensione del teorema, e alcune sue conseguenze, nel caso di operatori lineari definiti su spazi vettoriali di dimensione infinita. Tale necessità deriva dal fatto che ci sono problemi differenziali ambientati in spazi di dimensione infinita, per cui è lecito supporre che la soluzione derivi dall'applicazione del Teorema Spettrale come nel caso finito dimensionale appena mostrato.

Una condizione affinché tale generalizzazione sia possibile è che l'operatore sia definito su uno spazio di Hilbert e sia compatto ed autoaggiunto. Queste condizioni rappresentano l'estensione più naturale possibile delle ipotesi del Teorema Spettrale in dimensione finita. Inoltre estenderemo il concetto di spettro di un operatore in dimensione infinita. Dalle proprietà dello spettro di un operatore compatto ed autoaggiunto - ipotesi che sono essenziali affinché il teorema sia valido - deriva il Teorema Spettrale o Teorema di Hilbert - Schmidt.

Mostreremo, nell'ultimo capitolo, un'applicazione del Teorema Spettrale alla ricerca delle soluzioni dei problemi differenziali quali, ad esempio, il Problema di Dirichlet omogeneo, che assume una particolare rilevanza nella teoria dei campi conservativi, e l'equazione di diffusione del calore che analizza il variare della temperatura in un mezzo omogeneo e isotropo rispetto alla propagazione del calore. In entrambi i casi costruiremo le soluzioni a partire dal Teorema Spettrale.

Capitolo 1

Teoria elementare degli Spazi di Hilbert.

Il capitolo primo costituisce una breve introduzione ai concetti generali relativi agli spazi di Hilbert e agli operatori limitati. Nella prima sezione, richiamiamo le nozioni e i teoremi che useremo nel seguito riguardanti gli spazi di Hilbert. Nella seconda sezione affrontiamo lo studio degli operatori limitati ed in particolar modo consideriamo le proprietà più rilevanti degli operatori autoaggiunti e degli operatori compatti, che applicheremo in seguito.

1.1 Spazi di Hilbert: Prime proprietà

Definizione 1.1.1.
Un Spazio Vettoriale complesso V si dice *normato* se e solo se esiste un'applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $v, w \in V$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $\|v\| \geqslant 0$;

(ii) $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$;

(iii) $\|\alpha v\|=|\alpha|\ \|v\|$;

(iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

La funzione $\|\cdot\|$ è detta *norma.*

Se tale spazio è completo rispetto alla metrica indotta dalla propria norma allora si dirà di *Banach.*

Definizione 1.1.2.
Uno spazio vettoriale V complesso è detto a *prodotto scalare* se e solo se esiste un'applicazione $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $x, y, z \in$ V, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $(x, x) \geqslant 0$ e $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$;

(ii) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

(iii) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$;

(iv) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

L'applicazione $(\cdot, \cdot)$ è detta *prodotto scalare.*

Osservazione 1.
Sia V uno spazio vettoriale complesso a prodotto scalare. Allora, per ogni $v \in V$, ponendo $\|v\| := \sqrt{(v,v)}$ si ottiene una norma su V che si dirà *dedotta* dal prodotto scalare. Perciò ogni spazio a prodotto scalare è normato.

Definizione 1.1.3.
Si definisce *spazio di Hilbert* ogni spazio vettoriale complesso $\mathcal{H}$ a prodotto scalare che sia di Banach rispetto alla norma dedotta dal suo prodotto scalare. Da ora in poi ogni spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ sarà *separabile*.

Definizione 1.1.4.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $x, y \in \mathcal{H}$. Diremo che x e y sono ortogonali e scriveremo $x \perp y$ se e solo se $(x, y) = 0$.

Teorema 1.1.5 (Teorema di Pitagora)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $x, y \in \mathcal{H}$ tali che $x \perp y$. Allora:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dimostrazione.
Siano $x, y \in \mathcal{H}$, tali che $(x, y) = 0$. Per definizione di prodotto scalare abbiamo che anche $(y, x) = 0$. Perciò possiamo dire che:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Lemma 1.1.6.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ un suo sottospazio. Allora $\mathcal{M}$ è separabile.

Per la dimostrazione si veda [5] $\S III.22$.

Proposizione 1.1.7.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Allora $\mathcal{M}$ è uno spazio di Hilbert separabile. Inoltre per ogni $x \in \mathcal{M}$:

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Dimostrazione.

Poiché $\mathcal{M}$ è un sottospazio di $\mathcal{H}$, allora $\mathcal{M}$ è separabile per il Lemma 1.1.6.

Sia $x \in \mathcal{M}$. Definiamo

$$\|x\|_{\mathcal{M}} := \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Per costruzione $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ è una norma su $\mathcal{M}$. Proviamo che possiamo dedurre $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ da un prodotto scalare e che $\mathcal{M}$ è completo rispetto a tale norma.

Per ogni $x, y \in \mathcal{M}$, definiamo:

$$(x, y)_{\mathcal{M}} = (x, y)_{\mathcal{H}}.$$

Per costruzione $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{M}}$ è un prodotto scalare su $\mathcal{M}$ da cui si deduce $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$. Infatti per ogni $x \in \mathcal{M}$ abbiamo che:

$$\sqrt{(x, x)_{\mathcal{M}}} = \sqrt{(x, x)_{\mathcal{H}}} = \|x\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{M}}.$$

Proviamo infine che $\mathcal{M}$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di $\mathcal{M}$ che risulti essere di Cauchy rispetto alla norma di $\mathcal{M}$. Poiché per ogni n, abbiamo che:

$$\|x_n\|_{\mathcal{M}} = \|x_n\|_{\mathcal{H}},$$

allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma di $\mathcal{H}$. Per la completezza di $\mathcal{H}$, esiste $x \in \mathcal{H}$, tale che $x_n \to x$.

Ma poiché $\mathcal{M}$ è chiuso, allora $x \in \mathcal{M}$. Cioè $\mathcal{M}$ è completo.

□

Definizione 1.1.8.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottoinsieme. Si definisce *complemento ortogonale di* $\mathcal{M}$ l'insieme

$$\mathcal{M}^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} : (x, y) = 0, \text{ per ogni } y \in \mathcal{M}\}.$$

Osservazione 2.
$\mathcal{M}^{\perp}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$. Infatti, fissato $y \in \mathcal{H}$ consideriamo l'applicazione continua e lineare: $F_y : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ che ad ogni $x \mapsto (x, y)$. Perciò $\mathcal{M}^{\perp} = \bigcap\limits_{y \in \mathcal{S}} \ker F_y$, è intersezione di sottospazi chiusi, cioè un sottospazio chiuso.

Teorema 1.1.9 (Teorema delle Proiezioni Ortogonali)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Allora ogni $x \in \mathcal{H}$ si scrive in maniera univoca $x = z + w$, ove $z \in \mathcal{M}$ e $w \in \mathcal{M}^{\perp}$. Cioè $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$.

Per la dimostrazione si veda [1], §4.11.

Definizione 1.1.10.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Per ogni $x \in \mathcal{H}$ per il Teorema delle Proiezioni Ortogonali esiste un unico $z \in \mathcal{M}$ ed un unico $w \in \mathcal{M}^{\perp}$ tali che $x = z + w$. Si definisce *proiettore su* $\mathcal{M}$ l'operatore $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ e *proiettore su* $\mathcal{M}^{\perp}$ l'operatore $P_{\mathcal{M}}^{\perp} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}^{\perp}$ tali che per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$P_{\mathcal{M}} x = z,$$
$$P_{\mathcal{M}^{\perp}} x = w.$$

Definizione 1.1.11.
Un sottoinsieme finito o numerabile $\{e_1, e_2, \ldots\}$ di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è detto *ortonormale* se

$$(e_h, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k, \\ 1 & \text{se } h = k. \end{cases}$$

Un sistema ortonormale $\{e_k\}$ si dice *massimale* se preso $v \in \mathcal{H}$ tale che per ogni k: $(e_k, v) = 0$, allora $v = 0$.

Definizione 1.1.12.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso tale che $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Fissato $x \in \mathcal{H}$, si definisce *distanza di x da $\mathcal{M}$* il numero :

$$dist(x, \mathcal{M}) := \inf_{v \in \mathcal{M}} \|x - v\|.$$

Lemma 1.1.13.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso tale che $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che $\|x\| = 1$ e $dist(x, \mathcal{M}) \geq 1 - \varepsilon$.

Dimostrazione.
Sia $v \in \mathcal{H}$ tale che $v \notin \mathcal{M}$. Sia $d := dist(v, \mathcal{M}) > 0$ e sia $\varepsilon > 0$. Possiamo sempre scegliere $m_0 \in \mathcal{M}$ tale che:

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Allora posto:

$$x := \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|},$$

osserviamo che$x$ verifica la tesi. Infatti $\|x\| = 1$ per costruzione ed inoltre per ogni $m \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\|x - m\| &= \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \leq \\
&= \frac{1}{\|v - m_0\|} \|v - (m_0 + \|v - m_0\| m)\| \\
&\leq d \cdot \frac{1 - \varepsilon}{d} = 1 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

poiché $v - (m_0 + \|v - m_0\| m) \in \mathcal{M}$.

□

Teorema 1.1.14 (Teorema delle quattro equivalenze)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\{e_k\}$ un sistema ortonormale finito o numerabile. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) $\{e_k\}$ *è massimale;*

(ii) *L'insieme delle combinazioni lineari finite degli elementi in $\{e_k\}$ è denso in $\mathcal{H}$;*

(iii) *per ogni $x \in \mathcal{H}$ definito $\hat{x}(k) = (x, e_k)$, allora vale l'identità di Bessel:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2;$$

(iv) *per ogni $x, y \in \mathcal{H}$ vale l'identità di Parseval:*

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}.$$

Per la dimostrazione si veda [1] §4.18.

Teorema 1.1.15 (Sviluppo in serie di Fourier)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert ed $\{e_n\}$ un sistema ortonormale massimale. Allora per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale lo sviluppo in serie di Fourier, ovvero :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}(k) e_k,$$

rispetto alla norma di $\mathcal{H}$.

I coefficienti $\hat{x}(k) = (x, e_k)$ sono detti coefficienti di Fourier.

Per la dimostrazione si consulti [7] §3.4.9.

Proposizione 1.1.16.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Allora $\mathcal{H}$ ammette un sistema ortonormale massimale numerabile.

Per la dimostrazione si veda [5] §V.10.

Osservazione 3.
La Proposizione 1.1.16 sussiste perchè stiamo supponendo che $\mathcal{H}$ sia separabile. In generale vale il fatto che $\mathcal{H}$ è separabile se e soltanto se ogni sistema ortonormale massimale è numerabile. Per quanto ci riguarda $\mathcal{H}$ sarà sempre separabile.

Lemma 1.1.17.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert tale che $B_1 := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$ è compatto. Allora $\mathcal{H}$ ha dimensione finita.

Dimostrazione.
Ammettiamo per assurdo che $\mathcal{H}$ sia di dimensione infinita. Per la Proposizione 1.1.16, $\mathcal{H}$ ammette un sistema ortonormale massimale numerabile $\{e_n\}$. Inoltre $e_n \in B_1$ per ogni n. Proveremo che dalla successione $\{e_n\}$ non si può estrarre alcuna sottosuccesione convergente, negando così l'ipotesi che B_1 è compatto. Infatti per il Teorema di Pitagora risulta che:

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{\|e_n\| + \|e_m\|^2} = \sqrt{2}$$

In sintesi: la successione $\{e_n\}$ di elementi del compatto B_1 non ammette alcuna estratta convergente in contraddizione con l'ipotesi di compattezza di B_1.

□

1.2 Lo spazio degli operatori limitati

Definizione 1.2.1.

Siano X e Y spazi di Banach e $T : X \to Y$ applicazione lineare. Definiamo:

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}. \tag{1.1}$$

Diremo che un operatore lineare T è *limitato* e scriveremo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se e solo se $\|T\| \leq M$ per qualche $M \in \mathbb{R}$. In tal modo, $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $\|\cdot\|$ su costruita è una norma su $\mathcal{L}(X, Y)$ il quale, se Y è completo, è uno spazio di Banach.

Sia ora $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Si definisce *spazio duale di* $\mathcal{H}$ e si indica con $\mathcal{H}' := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ mentre denoteremo $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Proposizione 1.2.2.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora $T|_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{H})$.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{M}$ un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$ e $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Per la Proposizione 1.1.7, sappiamo che $\mathcal{M}$ è uno spazio di Hilbert e per ogni $x \in \mathcal{M}$ abbiamo che:

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Sicuramente $T|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare poiché restrizione di un operatore lineare. Proviamo che è limitato. Infatti per ogni $x \in \mathcal{M}$ con $x \neq 0$, abbiamo :

$$\frac{\|Tx\|_{\mathcal{H}}}{\|x\|_{\mathcal{M}}} = \frac{\|Tx\|_{\mathcal{H}}}{\|x\|_{\mathcal{H}}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad $x \in \mathcal{M}$, si ha che:

$$\|T|_{\mathcal{M}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

cioè $T|_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{H})$.

□

Diamo ora l'enunciato (senza dimostrazione) di due importanti teoremi:

Teorema 1.2.3 (Teorema di Riesz)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $\ell \in \mathcal{H}'$ esiste un unico $x_\ell \in \mathcal{H}$ tale che per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$\ell(y) = (x_\ell, y)$$

Per la dimostrazione si veda [1] §4.12.

Teorema 1.2.4 (Teorema di Hahn-Banach)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un suo sottospazio chiuso. Sia $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare e limitato. Allora esiste $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ funzionale lineare e limitato che estende f, cioè per ogni $x \in \mathcal{M}$: $F(x) = f(x)$ e $\|F\| = \|f\|$.

Per la dimostrazione si veda [1] §5.16.

Corollario 1.2.5 (Primo corollario al teorema di Hahn - Banach)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $x \in \mathcal{H}$ elemento non nullo. Allora esiste $\ell \in \mathcal{H}'$ tale che $\|\ell\| = 1$ e $\ell(x) = \|x\|$.

Per la dimostrazione si veda [1] §5.20.

Corollario 1.2.6 (Secondo corollario al teorema di Hahn - Banach)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $x \in \mathcal{H}$ tale che per ogni $\ell \in \mathcal{H}'$ risulta $\ell(x) = 0$. Allora $\|x\| = 0$, cioè $x = 0$.

Definizione 1.2.7.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora diremo che T è un'*isometria* se $\|Tx\| = \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{H}$. Mentre diremo che T è un'*isometria parziale* se è un'isometria ristretta al sottospazio chiuso $(\ker T)^\perp$.

Definizione 1.2.8.
Sia X uno spazio di normato, $\{x_n\}$ una successione di elementi di X. Si dice che x_n *converge a 0* e si scrive $x_n \to 0$ se e solo se la successione di numeri reali $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.
Sia $x \in X$, allora diremo che $x_n \to x$ se e solo se $x_n - x \to 0$.

Definizione 1.2.9.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$. Diremo che $\{x_n\}$ *converge debolmente* ad x e scriveremo $x_n \rightharpoonup x$ se e solo se

$$\ell x_n \to \ell x$$

per ogni $\ell \in \mathcal{H}'$.

Proposizione 1.2.10.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione finita e $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{H}$. Allora $\{x_n\}$ è convergente rispetto alla norma di $\mathcal{H}$ se e solo se $\{x_n\}$ è debolmente convergente, cioè la topologia debole e la topologia dedotta dalla norma sono equivalenti.

Per la dimostrazione si veda [5] §III.6.

Proposizione 1.2.11.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$ tale che $x_n \to x$. Allora $x_n \rightharpoonup x$. Inoltre se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita e $x_n \rightharpoonup x$ in generale non è vero che $x_n \to x$.

Dimostrazione.
Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$ tale che $x_n \to x$. Sia $\ell \in \mathcal{H}'$. Poichè ℓ è un funzionale continuo allora abbiamo che:

$$\ell x_n \to \ell x.$$

Data l'arbitrarietà di $\ell \in \mathcal{H}'$, abbiamo che:

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Sia ora e_n un sistema ortonormale massimale. Si può facilmente vedere che $e_n \rightharpoonup 0$ ma non è vero che $e_n \to 0$. Infatti sia $\ell \in \mathcal{H}'$ e x_ℓ l'unico elemento di $\mathcal{H}$ che, in base al Teorema di Riesz, rappresenta ℓ. Allora:

$$\ell(e_n) = (x_\ell, e_n) = \hat{x}_\ell(n).$$

Per la (iii) del Teorema 1.1.14, risulta:

$$\|x_\ell\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_\ell(n)|^2$$

cioè

$$|\hat{x}_\ell(n)|^2 \to 0$$

quindi

$$|\hat{x}_\ell(n)| \to 0$$

che significa che

$$e_n \rightharpoonup 0.$$

Tuttavia abbiamo già visto nella dimostrazione del Lemma 1.1.17, che se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita allora

$$\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

cioè la successione $\{e_n\}$ non è di Cauchy, quindi non converge.

$\square$

Definizione 1.2.12.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{T_n\}$ una successione di operatori limitati di $\mathcal{H}$ e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si dice che T_n *converge debolmente a* T *in* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e si scrive $T_n \rightharpoonup T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se e solo se

$$|\ell(T_n x) - \ell(Tx)| \to 0$$

per ogni $\ell \in \mathcal{H}'$ e $x \in \mathcal{H}$.

Proposizione 1.2.13.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{T_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora per ogni $x \in \mathcal{H}$, $T_n x \to Tx$ in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione.
Sia $x \in \mathcal{H}$. $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora:

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T - T_n\| \cdot \|x\| \to 0.$$

□

Proposizione 1.2.14.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{T_n\}$ una successione di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora $T_n \rightharpoonup T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Dimostrazione.
Sia $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Per la Proposizione 1.2.13 sappiamo che $T_n x \to Tx$, quindi per la proposizione 1.2.11 $T_n x \rightharpoonup Tx$ ovvero per ogni $\ell \in \mathcal{H}'$:

$$\ell(T_n x) \to \ell(Tx)$$

cioè $T_n \rightharpoonup T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

□

Combinando la Proposizione **III.5** e il Teorema **III.27** di [5], si ottiene il seguente risultato:

Proposizione 1.2.15.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$. Allora possiamo dire che:

(i) se $\{x_n\}$ è debolmente convergente ad x, allora è limitata e:

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|;$$

(ii) se $\{x_n\}$ è limitata allora ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

Definizione 1.2.16.
Siano X, Y spazi di Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si chiama *aggiunto di T nello spazio di Banach* l'operatore $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ così definito:

$$(T'\ell)x = \ell(Tx)$$

per ogni $\ell \in Y'$, $x \in X$.

L'operatore T' è ben posto, infatti per costruzione $T' : Y' \to X'$ ed è limitato poiché composizione di operatori limitati.

Definizione 1.2.17.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ l'applicazione che assegna ad ogni $y \in \mathcal{H}$ l'operatore lineare $(y, \cdot) \in \mathcal{H}'$. Per il teorema di Riesz C è continua, conserva la norma, è lineare e surgettiva. Pertanto definiamo *aggiunto* di T, l'operatore $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$:

$$T^* := C^{-1}T'C.$$

Per ogni $x, y \in \mathcal{H}$, possiamo dire che:

$$(x, Ty) = (Cx)(Ty) = (T'Cx)(y) = (CT^*x)(y) = (T^*x, y).$$

Proposizione 1.2.18.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora T^* è l'unico operatore limitato che per ogni $x, y \in \mathcal{H}$ risulti:

$$(Tx, y) = (x, T^*y). \tag{1.2}$$

Dimostrazione.
Sia $y \in \mathcal{H}$ e supponiamo che esista $\overline{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, un ulteriore operatore che soddisfi la (1.2). Allora per ogni $x \in \mathcal{H}$ abbiamo che:

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = (x, \overline{T}y)$$

cioè:

$$(x, T^*y - \overline{T}y) = 0.$$

Poiché la relazione è vera per ogni $x \in \mathcal{H}$ allora $T^*y - \overline{T}y = 0$. Per l'arbitrarietà di y, $T^* = \overline{T}$.

□

Lemma 1.2.19.
Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, allora $\|T\| = \sup\{|(Tx, y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$, ove $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$

Dimostrazione.
Chiamiamo $M = \sup\{|(Tx, y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.
Siano $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$ tali che $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$. Per la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* allora:

$$|(Tx, y)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \tag{1.3}$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad x e y: $M \leq \|T\|$.

Sia ora $z \in \mathcal{H}_1$. Se $Tz = 0$ allora $0 \leq M$. Altrimenti definisco $x := \dfrac{z}{\|z\|}$ e $y := \dfrac{Tz}{\|Tz\|}$. Ovviamente $\|x\| = \|y\| = 1$ ed inoltre:

$$\frac{\|Tz\|}{\|z\|} = \left| \left(\frac{Tz}{\|z\|}, \frac{Tz}{\|Tz\|} \right) \right| = |(Tx, y)| \leq M.$$

Passando all'estremo superiore rispetto a z: $\|T\| \leq M$, cioè $\|T\| = M$.

□

Teorema 1.2.20.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ allora:

(i) $\|T\| = \|T^*\|$

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$;

(iii) $(T^*)^* = T$;

(iv) *se* T *è invertibile ed ha inverso* T^{-1} *limitato, allora* T^* *è invertibile, ha inversa limitata e* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$;

(v) $\ker T^* = Im(T)^\perp$

(vi) $\|T^*T\| = \|T\|^2$;

(vii) *se indichiamo con rank(T) la dimensione dell'immagine dell'operatore* T*, allora* $rank(T) = rank(T^*)$.

Dimostrazione.
La (i) si prova utilizzando il Lemma 1.2.19. Infatti prese $x, y \in \mathcal{H}$ tali che $\|x\| = \|y\| = 1$, risulta:

$$|(Tx, y)| = |(x, T^*y)| = |(T^*y, x)|.$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad x e y ho $\|T\| = \|T^*\|$.

Per la (ii) basta osservare che:

$$\big((TS)x, y\big) = (Sx, T^*y) = \big(x, (S^*T^*)y\big).$$

Per la (iii):

$$\begin{cases} (T^*x, y) = \big(x, (T^*)^*y\big) \\ (T^*x, y) = \overline{(y, T^*x)} = \overline{(Ty, x)} = (x, Ty) \end{cases}$$

Cioè per ogni $y \in \mathcal{H} : \big((T^*)^* - T\big)(y) = 0$, ovvero

$$(T^*)^* = T.$$

La (iv) si dimostra osservando che $T(T^{-1}) = I = (T^{-1})T$.
Pertanto per la (ii)

$$(T^{-1})^* T^* = \big(T(T^{-1})\big)^* = I = \big((T^{-1})T\big)^* = T^*(T^{-1})^*.$$

Cioè la tesi.

Dimostriamo la (v). Sia $x \in \ker(T^*)$, allora per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$(T^*x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, Ty) = 0$$

Ovvero $x \in Im(T)^{\perp}$.

Per la (vi) notiamo che $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$ e

$$\|T^*T\| \geqslant \sup_{\|x\|=1} (x, (T^*T)x) = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|.$$

Infine proviamo la (vii). Supponiamo che $rank(T) = n$. Sia ora $\{u_k\}_{k=1\ldots n}$ una base ortonormale dell'immagine di T. Poniamo

$$v_k := T^*(u_k).$$

Siano ora $x, y \in \mathcal{H}$:

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} (Tx, u_k)u_k = \sum_{k=1}^{n} (x, T^*u_k)u_k = \sum_{k=1}^{n} (x, v_k)u_k.$$

Allora :

$$\begin{aligned}(x, T^*y) = (Tx, y) &= \left(\sum_{k=1}^{n} (x, v_k)u_k, y\right) = \sum_{k=1}^{n} (x, v_k)(u_k, y) \\ &= \left(x, \sum_{k=1}^{n} (v_k, y)u_k\right).\end{aligned}$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro e tenendo presente che T^*y è l'unico elemento di $\mathcal{H}$ che rappresenti l'operatore che ad $x \mapsto (Tx, y)$, allora risulta che $T^*y = \sum_{k=1}^{n}(v_k, y)u_k$, ovvero $rank(T^*) \leq rank(T)$. Scambiando T con T^* ottengo la seconda disuguaglianza.

Sia ora T di rango infinito. Se per assurdo il rango di T^* è finito allora il rango di $(T^*)^* = T$ lo è, il che è assurdo poiché T ha rango infinito.

□

Corollario 1.2.21.
L'applicazione $^* : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tale che a* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *è una isometria.*

Proposizione 1.2.22.
Sia $\mathcal{H}$ *uno spazio di Hilbert e* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$*. Sia* $\mathcal{M}$ *sottospazio di* $\mathcal{H}$ *invariante per* T*, cioè tale che per ogni* $x \in \mathcal{M} : Tx \in \mathcal{M}$*. Allora* $\mathcal{M}^{\perp}$ *è invariante per* T^**.*

Dimostrazione.
Sia $y \in \mathcal{M}^{\perp}$, allora $T^*y \in \mathcal{M}^{\perp}$ se e solo se per ogni $x \in \mathcal{M}$: $(T^*y, x) = 0$ Sia ora $x \in \mathcal{M}$, allora:

$$(T^*y, x) = (y, Tx) = 0$$

poiché $Tx \in \mathcal{M}$.

□

Definizione 1.2.23.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora T si dice *autoaggiunto* se e solo se:

$$T^* = T.$$

Diremo che T è *positivo* e scriveremo $T \geq 0$ se e solo se per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$(Tx, x) \geq 0,$$

mentre diremo T è *strettamente positivo* e scriveremo $T > 0$ se e solo se per ogni $x \in \mathcal{H}$ e $x \neq 0$:

$$(Tx, x) > 0.$$

Scriveremo $A \geq B$ se $A - B$ è positivo e $A > B$ se $A - B$ è strettamente positivo.

Proposizione 1.2.24.
Sia $\mathcal{H}$ *uno spazio di Hilbert e* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *un operatore strettamente positivo. Allora* $\ker(T) = \{0\}$.

Dimostrazione.
Sia $x \in \mathcal{H}$ e $x \neq 0$. Poiché T è positivo:

$$(Tx, x) > 0$$

da cui deduciamo che $Tx \neq 0$.

□

Proposizione 1.2.25.
Sia $\mathcal{H}$ *uno spazio di Hilbert e* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Allora l'operatore* T^*T *è autoaggiunto e positivo. Inoltre:*

$$\ker(T^*T) = \ker(T).$$

Dimostrazione.
Per la (ii) e la (iii) del Teorema 1.2.20:

$$\big((T^*)T\big)^* = T^*\big((T^*)\big)^* = T^*T$$

cioè T^*T è autoaggiunto. Inoltre preso $x \in \mathcal{H}$:

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0,$$

cioè T^*T è positivo.

Sia $y \in \ker(T^*T)$ e $y \neq 0$, allora per la (v) del Teorema 1.2.20 abbiamo che $y \in Im(T^*T)^\perp$, cioè per ogni $x \in \mathcal{H}$, risulta che:

$$0 = (y, T^*Tx) = (Ty, Tx),$$

cioè $Ty \in Im(T)^\perp$. Ma $Ty \in Im(T)$, quindi $Ty = 0$, cioè $y \in \ker(T)$, ovvero $\ker(T^*T) \subset \ker(T)$. L'altra inclusione è ovvia, poiché se $y \in \ker(T)$, allora $Ty = 0$, quindi $T^*Ty = T^*0 = 0$. Pertanto:

$$\ker(T^*T) = \ker(T).$$

$\square$

Definizione 1.2.26.
Siano X, Y spazi di Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora diremo che T è *compatto* se e solo e per ogni successione limitata $\{x_n\}$ di X esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{Tx_{n_k}\}$ converge rispetto alla norma di Y. Se X e Y sono spazi di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ equivalentemente T è compatto se e solo se mappa limitati in relativamente compatti.

Proposizione 1.2.27.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore di rango finito. Allora T è compatto.

Dimostrazione.
Sia $\{x_n\}$ una successione limitata. Poichè T è limitato allora la successione $\{Tx_n\}$ è limitata infatti per ogni n:

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| < \infty$$

Poiché la successione $\|Tx_n\|$ è limitata per la Proposizione 1.2.15 ammette una estratta Tx_{n_k}debolmente convergente, cioè esiste $y \in \mathcal{H}$ tale che :

$$Tx_{n_k} \rightharpoonup y.$$

Tuttavia in dimensione finita la convergenza in norma è equivalente alla convergenza debole, quindi :

$$Tx_{n_k} \to y \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

Cioè T è compatto.

□

Proposizione 1.2.28.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto su $\mathcal{H}$. Allora $T|_{\mathcal{M}}$ è compatto da $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione.

Per la Proposizione 1.2.2 sappiamo che $T|_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{H})$. Proviamo che è compatto. Sia $\widetilde{B}_1 := \{x \in \mathcal{M} : \|x\| \leq 1\}$. Se $\widetilde{B}_1$ è vuoto allora $T(\widetilde{B}_1)$ è compatto. Altrimenti per la Proposizione 1.1.7 è un sottoinsieme della palla unitaria $B_1 := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$. Pertanto :

$$T(\widetilde{B}_1) \subset T(B_1)$$

e passando alle chiusure:

$$\overline{T(\widetilde{B}_1)} \subset \overline{T(B_1)}.$$

Poiché T è compatto su $\mathcal{H}$ allora $\overline{T(B_1)}$ è un insieme compatto. Inoltre $\overline{T(\widetilde{B}_1)}$ è un sottoinsieme chiuso di $\overline{T(B_1)}$ che è compatto, pertanto $\overline{T(\widetilde{B}_1)}$ è a sua volta compatto. Cioè $T|_{\mathcal{M}}$ è compatto su $\mathcal{M}$.

□

Lemma 1.2.29.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$. Allora $P_{\mathcal{M}}$, il proiettore su $\mathcal{M}$, è limitato ossia $P_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$. Inoltre se $\mathcal{M}$ ha dimensione finita allora $P_{\mathcal{M}}$ ha rango finito.

Dimostrazione.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathcal{M}$ un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$. Sia $x \in \mathcal{H}$. Per il Teorema 1.1.9 esiste un unico $z \in \mathcal{M}$ ed un solo $w \in \mathcal{M}^{\perp}$ tale che $x = z + w$. Per definizione che:

$$P_{\mathcal{M}}x = z$$

Ovviamente se $\mathcal{M}$ ha dimensione finita, allora $P_{\mathcal{M}}$ ha rango finito poiché l'immagine di $P_{\mathcal{M}}$ è un sottospazio di $\mathcal{M}$.

Proviamo che $P_{\mathcal{M}}$ è un operatore lineare e limitato.

Proviamo la linearità. Siano $x, y \in \mathcal{H}$, $z, z' \in \mathcal{M}$ e $w, w' \in \mathcal{M}^{\perp}$ gli unici vettori tali che :

$$x = z + w$$
$$y = z' + w'.$$

Da cui, sommando membro a membro, abbiamo che:

$$x + y = z + z' + w + w'$$

Poiché ogni vettore di $\mathcal{H}$ si decompone in maniera unica e $z + z' + w + w'$ è una decomposizione di $x + y$, possiamo dire che:

$$P_{\mathcal{M}}(x + y) = z + z' = P_{\mathcal{M}}x + P_{\mathcal{M}}y.$$

Analogamente si prova che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$P_{\mathcal{M}}(\alpha x) = \alpha P_{\mathcal{M}}x.$$

Proviamo che $P_{\mathcal{M}}$ è limitato. Sia $x \in \mathcal{H}$ e siano $z \in \mathcal{M}$ e $w \in \mathcal{M}^{\perp}$ gli unici vettori per cui:

$$x = z + w.$$

Per il Teorema di Pitagora si ha che:

$$\|z + w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$

Quindi:

$$\|x\|^2 = \|z + w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2,$$

cioè:

$$\|z\|^2 \leq \|x\|^2.$$

ovvero:

$$\|z\| \leq \|x\|.$$

Allora per ogni $x \in \mathcal{H}$ sia ha che:

$$\|P_{\mathcal{M}}x\| \leq \|x\|,$$

cioè $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$, ovvero $P_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tuttavia, preso $z \in \mathcal{M}$ e $\|z\| = 1$:

$$\|P_{\mathcal{M}}z\| = \|z\| = 1$$

ovvero 1, oltre ad essere un maggiorante per $\|P_{\mathcal{M}}x\|$ è l'estremo superiore.

□

Teorema 1.2.30.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(i) *Se S è compatto, allora anche TS e ST lo sono;*

(ii) *Se $\{T_n\}$ è una famiglia di operatori compatti e $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora T è compatto;*

(iii) *Lo spazio degli operatori di rango finito su $\mathcal{H}$ è denso nello spazio degli operatori compatti su $\mathcal{H}$ rispetto alla norma di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$;*

(iv) *T è compatto se e solo se T^* lo è.*

Dimostrazione.

Per la (i) basta osservare che se $\{x_n\}$ è limitata allora anche $\{Tx_n\}$ lo è.

Pertanto esiste una estratta $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{S(Tx_{nk})\} = \{ST(x_{nk})\}$ converge. Mentre se $\{S(x_{n_k})\}$ è convergente, poichè T è limitato quindi continuo, anche $\{T(Sx_{nk})\} = \{TS(x_{nk})\}$ lo è.

Per la prova di (ii) utilizziamo la diagonalizzazione. Infatti sia $\{x_k\}$ una successione limitata. Allora poichè T_1 è compatto esiste una estratta $\{x_{1,k}\}$ tale che $T_1(x_{1,k})$ converge. Poichè $\{x_{1,k}\}$ è limitata in corrispondenza di T_2 esiste una estratta $\{x_{2,k}\}$ tale che $T_2(x_{2,k})$ converge. In questa maniera possiamo costruire una ulteriore successione $\{y_k\}$ tale che per ogni k risulti :

$$y_k := x_{k,k}.$$

La successione $\{T(y_k)\}$ è di Cauchy, infatti:

$$\|T(y_k) - T(y_\ell)\| \leq \|T(y_k) - T_m(y_k)\| + \|T_m(y_k) - T_m(y_\ell)\| + \|T_m(y_\ell) - T(y_\ell)\|$$

Poiché $\|T_n - T\| \to 0$ e $\{y_k\}$ è limitata allora posso porre il primo ed il terzo termine entrambi $< \varepsilon/3$ per m molto grande e indipendente da k e ℓ. Per questo fissato m, notiamo che $\|T_m(y_k) - T_m(y_\ell)\| < \varepsilon/3$ per k ed ℓ molto grandi. Questo prova che $\{T(y_k)\}$ converge, cioè T è compatto.

Proviamo ora la (iii).

Proveremo che possiamo approssimare bene quanto vogliamo un operatore compatto con uno di rango finito. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora detta $B_1 := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$, la palla di centro l'origine e raggio 1, risulta che $T(B_1)$ è relativamente compatto, cioè $K = \overline{T(B_1)}$ è compatto. Sia $\varepsilon > 0$, dalla topologia degli spazi metrici sappiamo che esiste una famiglia $\{x_i\}_{i\in I}$ di elementi di $\mathcal{H}$ con I insieme di indici tale $\{B_\varepsilon(x_i)\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di K, cioè:

$$\bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(x_i) = K.$$

Per la compattezza di K esistono $i_1, i_2, \ldots, i_n$, tali che $\{B_\varepsilon(x_{i_j})\}_{j=1,2,\ldots,n}$ è un ricoprimento per K, cioè:

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_{i_j}) = K.$$

Sia $\mathcal{M}$ il sottospazio generato dai vettori $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ e $P_{\mathcal{M}}$ il proiettore sul sottospazio $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ ha dimensione finita quindi $P_{\mathcal{M}}$ ha rango finito in base al Lemma 1.2.29. Sia

$$T_\varepsilon := P_{\mathcal{M}} T.$$

Per costruzione T_ε è un operatore di rango finito. Proviamo che è proprio l'operatore cercato cioè:

$$\|T - T_\varepsilon\| < 2\varepsilon.$$

Sia $x \in B_1$, allora esisterà $\overline{j} \in \{1, 2, \ldots n\}$ tale che

$$\|Tx - x_{i_{\overline{j}}}\| < \varepsilon.$$

Applicando $P_{\mathcal{M}}$ abbiamo che:

$$\|P_{\mathcal{M}} Tx - P_{\mathcal{M}} x_{i_{\overline{j}}}\| = \|T_\varepsilon x - x_{i_{\overline{j}}}\| < \varepsilon.$$

Dunque:

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \|Tx - x_{i_{\overline{j}}}\| + \|T_\varepsilon x - x_{i_{\overline{j}}}\| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in B_1.$$

Poiché $\|x\| = 1$, passando all'estremo superiore rispetto ad $x \in B_1$ otteniamo che :

$$\|T - T_\varepsilon\| < 2\varepsilon.$$

Infine proviamo la (iv).

Sia T compatto. Allora per la (iii) esiste una successione $\{T_n\}$ di operatori lineari di rango finito tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Per ogni n, T_n è di rango finito, quindi T_n^* lo è. Inoltre $T_n^* \to T^*$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ poichè:

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\| \to 0.$$

Perciò abbiamo provato che T^* è compatto.
Invece se T^* è compatto allora anche $(T^*)^* = T$ lo è.

□

Corollario 1.2.31.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora T è compatto se e solo se esiste una successione $\{T_n\}$ di operatori di rango finito tale che:

$$T_n \to T$$

rispetto alla norma di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Proposizione 1.2.32.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ compatto. Allora T manda successioni debolmente convergenti in successioni convergenti in norma.

Dimostrazione.
Sia $\{x_n\}$ una successione di $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$ tale che $x_n \rightharpoonup x$. Per la Proposizione 1.2.15, la successione $\{x_n\}$ è limitata poichè debolmente convergente, ovvero esiste $M > 0$ tale che $\|x_n\| \leq M$. Poiché T è limitato allora anche $Tx_n \rightharpoonup Tx$. Infatti per ogni $\ell \in \mathcal{H}'$, $(\ell \circ T) \in \mathcal{H}'$ in quanto composizione di operatori lineari e limitati, perciò :

$$\ell(Tx_n) = (\ell \circ T)(x_n) \to (\ell \circ T)(x) = \ell(Tx)$$

Cioè

$$Tx_n \rightharpoonup Tx.$$

Supponiamo che T abbia rango finito. Allora, dalla Proposizione 1.2.10 abbiamo che $Tx_n \to Tx$.

Supponiamo che T non abbia rango finito. Fissiamo $\varepsilon > 0$, essendo T compatto, per la (iii) del Teorema 1.2.30 esiste $T_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ di rango finito tale che:

$$\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Poiché T_ε è di rango finito allora per n molto grandi:

$$\|T_\varepsilon x_n - T_\varepsilon x\| < \varepsilon.$$

Quindi, per n molto grandi, risulta che:

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx\| &\leq \|Tx_n - T_\varepsilon x_n\| + \|T_\varepsilon x_n - T_\varepsilon x\| + \|T_\varepsilon x - Tx\| \\ &\leq \|T - T_\varepsilon\| \cdot \|x_n\| + \|T_\varepsilon x_n - T_\varepsilon x\| + \|T - T_\varepsilon\| \cdot \|x\| \\ &\leq \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon M = (2M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

cioè la tesi.

$\square$

Capitolo 2

Proprietà spettrali degli operatori limitati

Questo capitolo è rivolto all'analisi delle proprietà degli spettri di operatori limitati ed è suddiviso in due sezioni. La prima, considera lo spettro nel caso in cui l'operatore sia solo limitato ed eventualmente autoaggiunto. In particolar modo mostriamo in questa sezione, come lo spettro di un operatore limitato sia sempre un sottoinsieme chiuso e non banale dell'insieme dei numeri complessi. Nella seconda sezione, invece, analizziamo le proprietà degli spettri di operatori limitati che verifichino l'ulteriore ipotesi di compattezza. Da considerare in quest'ultima sezione sono i Teoremi di Riesz - Shauder e di Hilbert - Schmidt o Teorema Spettrale.

2.1 Spettro di un operatore limitato

Definizione 2.1.1.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora diremo che un numero complesso λ appartiene all'*Insieme risolvente* di T e scriveremo $\lambda \in \rho(T)$ se e soltanto se l'operatore $(T - \lambda\mathbb{I})$ è bigettivo con inverso limitato $R_\lambda T$ che è detto risolvente di T in λ. Se $\lambda \notin \rho(T)$ allora diremo che λ appartiene allo spettro di T e scriveremo $\lambda \in \sigma(T)$.

Definizione 2.1.2.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$ e λ un numero complesso:

(i) Se $x \neq 0$ e $Tx = \lambda x$ allora x si dice *autovettore* di T relativo all' *autovalore* λ. L'insieme degli *autovalori non nulli* di T che denoteremo con $\sigma_p(T)$ è detto *spettro puntuale* di T. Sia $\lambda \in \sigma_p(T)$, chiameremo *autospazio relativo a* λ il sottospazio: $\mathcal{M}_\lambda = \{x \in \mathcal{H} : Tx = \lambda x\}$ e *molteplicità dell'autovalore* λ, la dimensione del sottospazio $\mathcal{M}_\lambda$;

(ii) Se λ non è un autovalore e se $Im(T - \lambda\mathbb{I})$ non è denso, allora diremo che λ appartiene allo *spettro residuo* di T e scriveremo $\lambda \in \sigma_r(T)$,

(iii) Se λ non è autovalore ma $Im(T - \lambda\mathbb{I})$ è denso allora diremo che diremo che λ appartiene allo *spettro continuo* di T e scriveremo $\lambda \in \sigma_c(T)$

Proposizione 2.1.3.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e λ un autovalore non nullo di T. Allora $\mathcal{M}_\lambda$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$.

Dimostrazione.
Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{M}_\lambda$, tale che $x_n \to x$ in $\mathcal{H}$. Proviamo che $x \in \mathcal{M}_\lambda$. Se $Tx = 0$, allora $x \in \mathcal{M}_\lambda$. Se $Tx \neq 0$ proviamo che $Tx = \lambda x$. Per linearità risulta:

$$\lambda x_n \to \lambda x$$

e poiché T è continuo allora

$$Tx_n \to Tx.$$

Tuttavia $Tx_n = \lambda x_n$ per ogni n, per l'unicità del limite possiamo dire che:

$$Tx = \lambda x,$$

cioè $x \in \mathcal{M}_\lambda$.

$\square$

Lemma 2.1.4.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| \geq \|T\|$. Allora $\lambda \in \rho(T)$ e vale il seguente sviluppo in serie detto Sviluppo in serie di Neumann:

$$R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n.$$

Inoltre per ogni $\lambda \geq \|T\|$:

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \tag{2.1}$$

Dimostrazione.

Valutiamo:

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T^k}{\lambda^k}\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\left\|\frac{T^k}{\lambda^k}\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\|T\|^k}{|\lambda|^k}.$$

Poiché $|\lambda| \geq \|T\|$ allora $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{T^k}{\lambda^k}$ soddisfa le ipotesi del criterio di convergenza di Cauchy. Detta X_λ la sua somma, valutiamo:

$$\begin{aligned}-(T-\lambda\mathbb{I})\frac{1}{\lambda}X_\lambda &= -(T-\lambda\mathbb{I})\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^{k+1}}{\lambda^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k} = \mathbb{I}.\end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga si prova che

$$-\frac{1}{\lambda}X_\lambda(T-\lambda\mathbb{I})=\mathbb{I}.$$

Quindi $(T-\lambda\mathbb{I})$ è invertibile e la sua inversa:

$$R_\lambda(T)=-\frac{1}{\lambda}X_\lambda=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n.$$

Ci resta da provare che $R_\lambda(T)$ è limitata. A tal proposito proviamo la (2.1). Infatti basta osservare che preso $\lambda>\|T\|$, allora $\dfrac{\|T\|}{|\lambda|}<1$, quindi:

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(T)\| &= \left\|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{T^n}{\lambda^n}\right\| \\ &\le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n} \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{|\lambda|}{|\lambda|-\|T\|} \\ &= \frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.\end{aligned}$$

Pertanto $R_\lambda(T)$ è limitata quindi $\lambda\in\rho(T)$.

□

Corollario 2.1.5.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora l'insieme risolvente $\rho(T)$ è non vuoto.

Corollario 2.1.6.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\lambda\in\sigma(T)$. Allora $|\lambda|\le\|T\|$.

Teorema 2.1.7.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora:

(i) $\rho(T)$ è un sottoinsieme aperto del piano complesso;

(ii) l'applicazione $\lambda \in \rho(T) \mapsto R_\lambda(T)$ è analitica in ogni componente connessa di $\rho(T)$;

(iii) per ogni $\lambda, \mu \in \rho(T)$, $R_\lambda(T)$ e $R_\mu(T)$ commutano e vale :

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T). \tag{2.2}$$

Dimostrazione.
Iniziamo provando (i). Fissiamo $\lambda_0 \in \rho(T)$ che è sicuramente non vuoto per il Corollario 2.1.5. Vogliamo provare che esiste $M > 0$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda - \lambda_0| < M$ allora $\lambda \in \rho(T)$, cioè un intero intorno di λ_0 è contenuto in $\rho(T)$. A tal fine consideriamo la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(T)]^n. \tag{2.3}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda - \lambda_0)^k [R_{\lambda_0}(T)]^k \right\| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda - \lambda_0|^k \|[R_{\lambda_0}(T)]^k\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda - \lambda_0|^k \|R_{\lambda_0}(T)\|^k. \end{aligned}$$

Se $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ allora la serie (2.3) è convergente per il criterio di Cauchy. Sia X_λ l'operatore a cui la serie (2.3) converge, quindi $\|X_\lambda\| < \infty$. Proveremo che il numero M che cerchiamo è proprio $\|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ definiamo:

$$\widetilde{R}_\lambda(T) := R_{\lambda_0}(T) \left\{ \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(T)]^n \right\}.$$

Proviamo che $(T - \lambda\mathbb{I})$ è invertibile con inverso limitato e il suo operatore inverso $R_\lambda(T)$ è proprio $\widetilde{R}_\lambda(T)$.

Calcoliamo $\widetilde{R}_\lambda(T)(T-\lambda\mathbb{I})$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_\lambda(T)(T-\lambda\mathbb{I}) &= R_{\lambda_0}(T)\Big\{\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^n\Big\}(T-\lambda\mathbb{I})\\
&= R_{\lambda_0}(T)\Big\{\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^n\Big\}\big((T-\lambda_0\mathbb{I})-(\lambda-\lambda_0)\mathbb{I}\big)\\
&= \Big\{R_{\lambda_0}(T)+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^{n+1}\Big\}\big((T-\lambda_0\mathbb{I})-(\lambda-\lambda_0)\mathbb{I}\big)\\
&= \mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^n-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(T)\\
&\quad -\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n+1}[R_{\lambda_0}(T)]^{n+1}\\
&= \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Analogamente si prova che:

$$(T-\lambda\mathbb{I})\widetilde{R}_\lambda(T)=\mathbb{I}.$$

Dunque $(T-\lambda\mathbb{I})$ è invertibile e $R_\lambda(T)=\widetilde{R}_\lambda(T)$. Ci resta da provare che $R_\lambda(T)$ è limitato. Sappiamo che:

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda(T)\| &= \left\|R_{\lambda_0}(T)\Big\{\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^n\Big\}\right\|\\
&\leq \|R_{\lambda_0}(T)\|\left\|\Big\{\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^n\Big\}\right\|\\
&\leq \|R_{\lambda_0}(T)\|\left\{\|\mathbb{I}\|+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n[R_{\lambda_0}(T)]^n\right\|\right\}\\
&\leq \|R_{\lambda_0}(T)\|\Big(1+\|X_\lambda\|\Big)<\infty,
\end{aligned}$$

cioè $R_\lambda(T)$ è limitato.

In conclusione, se $\lambda_0\in\rho(T)$, tutti i λ tali che $|\lambda-\lambda_0|<\|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ appartengono al risolvente , cioè $\rho(T)$ è aperto ed inoltre:

$$R_\lambda(T)=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)[R_{\lambda_0}(T)]^{n+1}. \tag{2.4}$$

Abbiamo inoltre dimostrato che l'applicazione che $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ si può esprimere in un intorno di $\lambda_0 \in \rho(T)$ mediante la (2.4), pertanto essa è analitica e ciò prova la (ii).

Per quanto riguarda la (iii) notiamo che presi $\lambda, \mu \in \rho(T)$:

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) - R_\mu(T) &= R_\lambda(T)(T - \mu\mathbb{I})R_\mu(T) - R_\lambda(T)(T - \lambda\mathbb{I})R_\mu(T) \\ &= R_\lambda(T)(T - \mu\mathbb{I} - T + \lambda\mathbb{I})R_\mu(T) \\ &= (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T). \end{aligned}$$

Questa uguaglianza ci mostra che gli operatori commutano. Siano $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Se $\lambda = \mu$ ovviamente $R_\lambda(T)$ e $R_\mu(T)$ commutano.

Se $\lambda \neq \mu$, per (2.2):

$$\begin{aligned} R_\lambda(T)R_\mu(T) &= (\lambda - \mu)^{-1}(R_\lambda(T) - R_\mu(T)) = (\mu - \lambda)^{-1}(R_\mu(T) - R_\lambda(T)) \\ &= R_\mu(T)R_\lambda(T). \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.1.8.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora $\sigma(T)$ è non vuoto.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che $\sigma(T)$ sia vuoto cioè per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ esiste ed è limitato $(T - \lambda\mathbb{I})^{-1} = R_\lambda(T)$. Per il Teorema 2.1.7 l'applicazione che ad ogni $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto R_\lambda(T)$ è analitica su tutto $\mathbb{C}$. Fissiamo $\ell \in \mathcal{H}^*$ e $x \in \mathcal{H}$. Definiamo l'applicazione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$g(\lambda) = \ell(R_\lambda(T)(x)).$$

Proveremo che:

1. g è analitica su tutto $\mathbb{C}$;

2. g è limitata su tutto $\mathbb{C}$;

3. g è costantemente nulla;

4. l'operatore $R_\lambda(T)$ è nullo per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, negando così il fatto che $\sigma(T)$ è vuoto.

Passo 1: proviamo che g è analitica.

Fissiamo $\lambda_0 \in \rho(T)$. Per il Teorema 2.1.7 sappiamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda - \lambda_0| \leq \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ allora $\lambda \in \rho(T)$ e rispetto alla norma di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [R_{\lambda_0}(T)]^{n+1}$$

Per la Proposizione 1.2.11, la convergenza in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ è più forte di quella debole in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, quindi:

$$g(\lambda) = \ell\big(R_\lambda(T)(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \ell\Big(\big(R_{\lambda_0}(T)\big)^{n+1}(x)\Big),$$

ovvero g è analitica e dall'ipotesi che $\sigma(T)$ è vuoto, allora g è analitica su tutto $\mathbb{C}$.

Passo 2: proviamo che g è limitata su tutto $\mathbb{C}$.

Se $|\lambda| > \|T\|$, per il Lemma 2.1.4 allora vale la disuguaglianza:

$$\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|},$$

da cui sfruttando sempre il fatto che la convergenza in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ è più forte della convergenza debole in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora:

$$|g(\lambda)| \leq \|\ell\|_{\mathcal{H}^*} \|R_\lambda(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}} \leq K \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \leq K$$

ove K è un opportuno maggiorante di $\|\ell\|_{\mathcal{H}^*} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}}$. Questa disuguaglianza ci dice anche che se $|\lambda| \to \infty$ allora $|g(\lambda)| \to 0$.

Supponiamo $|\lambda| \leq \|T\|$. Poiché g è analitica su tutto $\mathbb{C}$, in particolare è continua sull'insieme chiuso e limitato $\overline{D}_{\|T\|} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$. Quindi per il teorema di $Weierstrass$ la restrizione di g a $\overline{D}_{\|T\|}$ ammette massimo e minimo cioè g è limitata se $\lambda \leq \|T\|$. Pertanto g è limitata su tutto il piano complesso.

Passo 3: proviamo che g è costantemente nulla.

Abbiamo provato che g è limitata e analitica su tutto $\mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville g è costante e visto che $|g(\lambda)| \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$ allora deduciamo che g è costantemente nulla.

Passo 4: proviamo che $R_\lambda(T)$ è nullo per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Abbiamo provato che per ogni $\ell \in \mathcal{H}^*$:

$$\ell\big(R_\lambda(T)(x)\big) = 0$$

Tuttavia per il Secondo Corollario al teorema di $Hahn - Banach$, 1.2.6, allora $R_\lambda(T)(x) = 0$. Per l'arbitrarietà di $x \in \mathcal{H}$ possiamo concludere che $R_\lambda(T) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Ma ciò non può sussistere poiché $R_\lambda(T)$ è l'inverso dell'operatore $(T - \lambda\mathbb{I})$.

$\square$

Definizione 2.1.9.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si definisce *raggio spettrale di* T il numero reale positivo:

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Proposizione 2.1.10.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T)$. Inoltre se T è autoaggiunto: $r(T) = \|T\|$.

Dimostrazione.

Sia

$$\nu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Per prima cosa proviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \nu$$

Sia $\varepsilon > 0$. Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\|T^m\|^{1/m} < \nu + \varepsilon$. Inoltre per ogni $n > m$ esistono q, r interi e positivi e $0 \leq r \leq m-1$ tali che $n = mq + r$, cioè $\dfrac{mq+r}{n} = \dfrac{mq}{n} + \dfrac{r}{n} = 1$.

Poiché $r \leq m-1$ allora $r/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Per questo motivo: $mq/n \to 1$. Quindi:

$$\begin{aligned}\|T^n\|^{1/n} &= \|T^{mq+r}\|^{1/n} \leq \|T^{mq}\|^{1/n}\|T^r\|^{1/n} \\ &\leq \|T^m\|^{q/n}\|T\|^{r/n} \leq (\nu+\varepsilon)^{qm/n}\|T\|^{r/n}.\end{aligned}$$

Questo implica che:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} &< \limsup_{n\to\infty} (\nu+\varepsilon)^{qm/n}\|T\|^{r/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\nu+\varepsilon)^{qm/n}\|T\|^{r/n} = (\nu+\varepsilon).\end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di ε, otteniamo:

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \nu.$$

D'altra parte per le proprietà dell'estremo inferiore:

$$\nu \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

In conclusione:

$$\nu = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Ci resta ora da provare che:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Consideriamo la serie di Laurent:

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^k} \tag{2.5}$$

la quale, per il teorema di $Cauchy - Adamard$ ha raggio di convergenza r pari a:

$$\limsup_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n},$$

nel senso che essa converge per $|\lambda| > r$ e non converge per $|\lambda| < r$. Proviamo pertanto che $r(T) = r$.

Per il Lemma 2.1.4 se la serie (2.5) è convergente, allora converge proprio all'operatore $R_\lambda(T)$ cioè $\lambda \in \rho(T)$, perciò detto $\overline{D}_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$, poiché se $\lambda > r$ la serie converge, allora $\complement(\overline{D}_r) \subset \rho(T)$.

Passando ai complementari:

$$\sigma(T) \subset \overline{D_r},$$

cioè passando agli estremi superiori dei due insiemi:

$$r(T) \leq r.$$

Poiché $r = \inf \|T^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}$, se provo che $r(T) \leq \|T^n\|^{1/n}$ per qualche n, allora $r \leq r(T)$, cioè $r = r(T)$. In particolare se $n = 1$ per il Corollario 2.1.6 sappiamo che se $\lambda \in \sigma(T)$, allora $|\lambda| \leq \|T\|$, quindi $r(T) \leq \|T\|$, cioè $r = r(T)$, da cui la tesi.

Infine se T è autoaggiunto allora $\|T^2\| = \|T\|^2$ e per induzione $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$. Pertanto

$$r(T) = \lim_{k\to\infty}\|T^{2^k}\|^{1/2^k} = \|T\|.$$

$\square$

Teorema 2.1.11.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatore autoaggiunto. Allora:

(i) $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$;

(ii) Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali.

Dimostrazione.
Proviamo la (i). Per quanto detto nel precedente teorema basterà provare che se λ è un autovalore di T allora è reale. Infatti se $Tx = \lambda x$ e $x \neq 0$:

$$(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda\|x\|^2$$

e inoltre

$$(x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}\|x\|^2$$

Poiché T è autoaggiunto e $x \neq 0$ allora $\lambda = \overline{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proviamo la (ii). Siano λ, μ autovalore distinti e x, y autovettori corrispondenti rispettivamente agli autovalori λ e μ. Allora

$$(Tx, y) = \lambda(x, y) = (x, Ty) = \mu(x, y).$$

Cioè$(\lambda - \mu)(x, y) = 0$. Poichè $(\lambda - \mu) \neq 0$ allora $(x, y) = 0$.

$\square$

Proposizione 2.1.12.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore positivo e λ un autovalore di T. Allora $\lambda \geq 0$. Inoltre se T è strettamente positivo, $\lambda > 0$.

Dimostrazione.
Sia $x \in \mathcal{H}$ un autovettore relativo all'autovalore λ, e tale che $x \neq 0$, allora $\|x\| > 0$. Inoltre:

$$Tx = \lambda x,$$

e poiché T è positivo abbiamo che:

$$(Tx, x) \geq 0,$$

ma visto che x è un autovettore e $\|x\| > 0$ risulta che:

$$(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda\|x\|, \tag{2.6}$$

cioè $\lambda \geq 0$. Inoltre se T è strettamente positivo, dalla (2.6) deduciamo che:

$$\lambda > 0.$$

□

2.2 Spettro di un operatore compatto

Proposizione 2.2.1.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Sia λ un autovalore non nullo di T allora il sottospazio $\mathcal{M}_\lambda$ ha dimensione finita.

Dimostrazione.
Per la Proposizione 2.1.3 M_λ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$, perciò anche M_λ è uno spazio di Hilbert. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{M}_\lambda$ abbia dimensione infinita, allora per la Proposizione 1.1.15 esiste un sistema ortonormale massimale e numerabile $\{e_n\}$ di elementi di $\mathcal{M}_\lambda$. Abbiamo così una successione di elementi di $\mathcal{M}$ limitata poiché per ogni n risulta $\|e_n\| = 1$. Proveremo che dalle successione $\{e_n\}$ non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione $\{e_{n_k}\}$ tale che $\{Te_{n_k}\}$ sia di *Cauchy* quindi convergente, in contraddizione con il fatto che T è compatto. Infatti:

$$\begin{aligned}\|Te_n - Te_m\|^2 &= \|\lambda e_n - \lambda e_m\|^2 = |\lambda|^2\|e_n - e_m\|^2 \\ &= |\lambda|^2(\|e_n\|^2 + \|e_m\|^2) = 2|\lambda|.\end{aligned}$$

Perciò non posso estrarre alcuna sottosuccessione tale che $\{e_{n_k}\}$ tale che $\{Te_{n_k}\}$ sia convergente.

$\square$

Lemma 2.2.2.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Sia $\{\lambda_n\}$ una successione di autovalori a due a due distinti e sia $\{y_n\}$ una successione di autovettori corrispondenti agli autovalori $\{\lambda_n\}$. Allora i vettori $\{y_n\}$ sono linearmente indipendenti, cioè per ogni k i vettori $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che i vettori $\{y_n\}$ siano linearmente dipendenti. Sia k il più piccolo indice tale che i vettori $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ sono linearmente dipendenti. Ovviamente $k \geq 2$, pertanto ha senso dire che:

$$y_k = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i y_i$$

ove $\beta_i \in \mathbb{C}$.

Inoltre :

$$(T - \lambda_k \mathbb{I})y_k = (T - \lambda_k \mathbb{I}) \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i y_i = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i (\lambda_i - \lambda_k) y_i = 0.$$

Poiché I vettori $\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\}$ sono linearmente indipendenti allora possiamo dire che per ogni $i \in \{1, 2 \cdots, k-1\}$ risulta $\beta_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, ma poiché $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$ per ogni $i \in \{1, 2 \cdots, k-1\}$, allora $\beta_i = 0$ per ogni $i \in \{1, 2 \cdots, k-1\}$, cioè $y_k = 0$ in contraddizione con l'ipotesi che y_k sia autovalore.

$\square$

Proposizione 2.2.3.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora l'insieme $\sigma_p(T)$ degli autovalori non nulli di T è finito o numerabile. In quest'ultimo caso, 0 è l'unico punto di accumulazione di $\sigma_p(T)$ ed inoltre, detta $\{\lambda_n\}$ la successione di tutti gli autovalori non nulli, si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

Dimostrazione.
Se $\sigma_p(T)$ è finito, allora è costituito da punti isolati, pertanto non ammette punti di accumulazione.

Supponiamo che $\sigma_p(T)$ sia infinito. Poiché $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ il quale è limitato, allora $\sigma_p(T)$ è limitato. Per il Teorema di $Bolzano - Weierstrass$, sappiamo che ammette un punto di accumulazione. Proviamo che 0 è il suo unico punto di accumulazione. Se per assurdo esistesse $\lambda \neq 0$ e λ punto di accumulazione per $\sigma_p(T)$, allora esisterebbe una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori non nulli e una successione $\{y_n\}$ di autovettori tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Ty_n = \lambda_n y_n$, $\lambda_n \neq \lambda_m$ se $n \neq m$ ed inoltre $\lambda_n \to \lambda$.

Fissato n, definiamo $\mathcal{M}_n$ il sottospazio generato dagli autovettori $\{y_i\}$ con $i \in \{1, 2, \dots n\}$ i quali sono linearmente indipendenti per il Lemma 2.2.2. Inoltre per ogni n: $\mathcal{M}_{n-1}$ è un sottospazio proprio di $\mathcal{M}_n$, cioè vale la seguente catena di inclusioni strette:

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{M}_n \subset \cdots \subset \mathcal{M}$$

Per il Teorema 1.1.9 delle proiezioni ortogonali

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n-1} \oplus \mathcal{M}_{n-1}^{\perp \mathcal{M}_n}$$

e $\mathcal{M}_{n-1}^{\perp \mathcal{M}_n} := \{x \in \mathcal{M}_n : (x, y) = 0 \text{ per ogni } y \in \mathcal{M}_{n-1}\}$ è non banale,

Pertanto esiste $x_n \in \mathcal{M}_n$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $x_n \in \mathcal{M}_{n-1}^{\perp \mathcal{M}_n}$.

Sia $m < n$, allora aggiungendo e sottraendo x_n:

$$\lambda_n^{-1} T x_n - \lambda_m^{-1} T x_m = x_n - (\lambda_m^{-1} T x_m - \lambda_n^{-1}(T - \lambda_n) x_n). \tag{2.7}$$

Proviamo che $(\lambda_m^{-1} T x_m - \lambda_n^{-1}(T - \lambda_n) x_n \in \mathcal{M}_{n-1}$.

Per ogni n abbiamo che $\mathcal{M}_n$ è invariante per T, cioè se $x \in \mathcal{M}_n$, allora $Tx \in \mathcal{M}_n$. Infatti preso $x \in \mathcal{M}_n$ allora:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k.$$

Applicando T:

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} a_k T y_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k y_k,$$

quindi Tx è un elemento di M_n poiché combinazione lineare degli elementi di una sua base.

Pertanto possiamo dire che se $m < n$, allora $x_m \in \mathcal{M}_{n-1}$ e visto che $\mathcal{M}_{n-1}$ è invariante per T, allora $T x_m \in \mathcal{M}_{n-1}$. Inoltre poiché $x_n \in \mathcal{M}_n$, allora lo possiamo scrivere come combinazione lineare degli elementi di una sua base, cioè:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k,$$

e applicando $T - \lambda_n$ si ottiene:

$$(T - \lambda_n) x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (T - \lambda_n) y_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) y_k,$$

ovvero $(T - \lambda_n) x_n \in \mathcal{M}_{n-1}$. Quindi $(\lambda_m^{-1} T x_m - \lambda_n^{-1}(T - \lambda_n) x_n \in \mathcal{M}_{n-1}$, perciò dalla (2.7) e dal Teorema di Pitagora deduciamo che:

$$\|\lambda_n^{-1} T x_n - \lambda_m^{-1} T x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|\lambda_m^{-1} T x_m - \lambda_n^{-1}(T - \lambda_n) x_n\|^2 \geq 1$$

La successione $\{{\lambda_n}^{-1} x_n\}$ di vettori di $\mathcal{H}$ è limitata poichè $\lambda_n \to \lambda$ e $\lambda \neq 0$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$. Tuttavia da tale successione non si può estrarre alcuna sottosuccessione $\{{\lambda_{n_k}}^{-1} x_{n_k}\}$ tale che $\{{\lambda_{n_k}}^{-1} T x_{n_k}\}$ sia convergente in contraddizione con l'ipotesi di compattezza di T. Tale assurdo deriva dall'aver supposto l'esistenza di un punto di accumulazione di $\sigma_p(T)$ che non fosse 0. Pertanto nell'ipotesi che $\sigma(T)$ sia infinito, 0 è il suo unico punto di accumulazione.

Restando nell'ipotesi che $\sigma_p(T)$ è un insieme infinito, proviamo che esso è numerabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$\Lambda_n := \{\lambda \in \sigma_p(T) : \lambda > 1/n\}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, Λ_n è un insieme finito poiché altrimenti 0 non sarebbe un punto di accumulazione per $\sigma_p(T)$. Proviamo che

$$\sigma_p(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n,$$

da cui dedurremo che $\sigma_p(T)$ è un insieme numerabile, poiché unione numerabile di insiemi finiti.

Per costruzione possiamo dire che:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n \subset \sigma_p(T)$$

Proviamo che sussiste:

$$\sigma_p(T) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n.$$

Infatti preso $\lambda \in \sigma_p(T)$, allora $\lambda \neq 0$, cioè $|\lambda| > 0$. Pertanto possiamo sempre trovare $n \in \mathbb{N}$, tale che

$$0 < 1/n < \lambda,$$

ovvero $\lambda \in \Lambda_n$, cioè la tesi.

Avendo dimostrato che se $\sigma_p(T)$ è numerabile, consideriamo $\{\lambda_n\}$, la successione degli autovalori non nulli di T. Allora 0 è l'unico punto di accumulazione per $\sigma_p(T)$, ovvero:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

$\square$

Corollario 2.2.4.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora esiste $\lambda \in \sigma_p(T)$ tale che:

$$|\lambda| = r(T).$$

Dimostrazione.

Dalla Proposizione 2.2.3, abbiamo che $\sigma_p(T)$ è un insieme finito o numerabile. Nel caso in cui $\sigma_p(T)$ fosse finito possiamo sempre trovare $\lambda \in \sigma_p(T)$ che sia, in modulo, il più grande autovalore di T. Nel caso in cui $\sigma_p(T)$ fosse infinito, sempre per la Proposizione 2.2.3, abbiamo che $\sigma_p(T)$ è numerabile e si accumula in 0, pertanto fissato $\varepsilon > 0$ e $r(T) > \varepsilon$, esiste $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, una famiglia finita di elementi di $\sigma_p(T)$ tale che per ogni$i \in i = 0, 1, \dots, n$

$$|\lambda_i| > \varepsilon$$

Da cui deduciamo che:

$$r(T) = \max_{i=0,1,\dots,n} |\lambda_i|$$

□

Osservazione 4.

Nelle ipotesi del Corollario 2.2.4 non è detto che esista un unico $\lambda \in \sigma_p(T)$ tale che $|\lambda| = r(T)$. Si pensi all'operatore $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

T è compatto, poiché ha rango finito e per costruzione il suo raggio spettrale è 1, ma i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ che hanno stesso modulo.

Corollario 2.2.5.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto ed autoaggiunto. Allora almeno uno tra $\|T\|$ e $-\|T\|$ è un autovalore.

Dimostrazione.
Dalla Proposizione 2.1.10, sappiamo che $\|T\| = r(T)$. Per il Corollario 2.2.4, abbiamo che esiste $\lambda \in \sigma_p(T)$ tale che

$$|\lambda| = r(T) = \|T\|. \tag{2.8}$$

Poiché T è autoaggiunto, dal Teorema 2.1.11, abbiamo che $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, pertanto gli unici reali a soddisfare la (2.8) sono $\|T\|$ e $-\|T\|$, cioè la tesi. □

Lemma 2.2.6.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Sia $\mu \neq 0$ tale che μ non è un autovalore di T. Allora l'insieme $Im(T - \mu\mathbb{I})$ è chiuso.

Dimostrazione.
Dobbiamo provare che data una successione $\{x_n\}$ di elementi di $\mathcal{H}$ per cui $(T - \mu\mathbb{I})x_n \to y$ in $\mathcal{H}$, risulta $y \in Im(T - \mu\mathbb{I})$.

Proviamo innanzitutto che la successione $\{x_n\}$ è limitata. Altrimenti, a meno di considerare una sottosuccessione, possiamo supporre che $\|x_n\| \to \infty$. Sia

$$x'_n = x_n/\|x_n\|.$$

La successione $\{x'_n\}$ è limitata e $(T - \mu\mathbb{I})x'_n \to 0$, infatti:

$$\|(T - \mu\mathbb{I})x'_n\| = \frac{\|(T - \mu\mathbb{I})x_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{\|(T - \mu\mathbb{I})x_n - y\| + \|y\|}{\|x_n\|} \to 0$$

visto che il numeratore converge a $\|y\|$ e il denominatore diverge.

Poiché $\{x'_n\}$ è una successione limitata e T è compatto si può supporre, a meno del passaggio ad una estratta, che $Tx'_n \to w$ in $\mathcal{H}$. Dal momento che

$(T - \mu\mathbb{I})x'_n \to 0$ e $Tx'_n \to w$ allora $\mu x'_n \to w$ in $\mathcal{H}$ e quindi :

$$\begin{aligned}(T - \mu\mathbb{I})w &= \lim_{n\to\infty}(T - \mu\mathbb{I})(Tx'_n) = \lim_{n\to\infty} T(Tx'_n) - \mu(Tx'_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} T(Tx'_n) - T(\mu x'_n) = \lim_{n\to\infty} T(Tx'_n - \mu x'_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} T[(T - \mu\mathbb{I})x'_n] = 0.\end{aligned}$$

Per la continuità della norma:

$$\|w\| = \lim_{n\to\infty} \|\mu x'_n\| = |\mu| > 0$$

Quindi w è non nullo cioè μ è, contro le ipotesi, un autovalore. Tale assurdo deriva dall'aver supposto che la successione $\{x_n\}$ non sia limitata.

Essendo la successione $\{x_n\}$ limitata, per la compattezza di T, a meno del passaggio ad una estratta, si ha che $\{Tx_n\}$ è convergente, cioè esiste $v \in \mathcal{H}$ tale che $Tx_n \to v$ in $\mathcal{H}$. Allora

$$\mu x_n = Tx_n - (T - \mu\mathbb{I})x_n \to v - y.$$

Applicando T abbiamo che:

$$\mu Tx_n \to T(v - y),$$

e quindi:

$$\begin{aligned}y &= \lim_{n\to\infty}(T - \mu\mathbb{I})x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu}(\mu Tx_n) - \mu x_n \\ &= \frac{1}{\mu}T(v - y) - (v - y) = \frac{1}{\mu}\big(T(v - y) - \mu(v - y)\big) \\ &= \frac{1}{\mu}(T - \mu\mathbb{I})(v - y).\end{aligned}$$

Posto $z = (v - y)$, risulta che $y = \mu^{-1}(T - \mu\mathbb{I})z \in Im(T - \mu\mathbb{I})$ cioè la tesi.

$\square$

Lemma 2.2.7.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Sia $\mu \neq 0$ tale *che μ non è un autovalore di T. Allora esiste $c > 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{H}$ risulti:*

$$\|(T - \mu\mathbb{I})x\| \geq c\|x\|.$$

Dimostrazione.
Supponiamo per assurdo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esista $x_k \in \mathcal{H}$ tale che $\|x_k\| = 1$ e

$$\|(T - \mu\mathbb{I})x_k\| < \frac{1}{k} :$$

Pertanto:

$$(T - \mu\mathbb{I})x_k \to 0.$$

Poiché $\{x_k\}$ è limitata, per la compattezza di T esiste $y \in \mathcal{H}$, tale che, a meno di estrarre una sottosuccessione, risulti che :

$$Tx_k \to y.$$

Si ha allora:

$$x_k = \frac{1}{\mu}(Tx_k - (T - \mu\mathbb{I})x_k) \to \frac{y}{\mu}$$

Poiché $\|x_k\| = 1$ allora $y \neq 0$, e:

$$y = \lim_{n\to\infty} \mu x_n.$$

Applicando $T - \mu I$, si ha che:

$$(T - \mu\mathbb{I})y = \lim_{k\to\infty} \mu(T - \mu\mathbb{I})x_k = 0.$$

Poiché $y \neq 0$ allora μ è un autovalore contrariamente alle ipotesi.

$\square$

Corollario 2.2.8.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Sia $\mu \neq 0$ tale che μ non è autovalore di T e l'operatore $(T - \mu\mathbb{I})$ è invertibile. Allora $(T - \mu\mathbb{I})^{-1}$ è limitato, cioè $\mu \in \rho(T)$.

Dimostrazione.

Per il Lemma 2.2.7 esiste $c > 0$ tale che per ogni $y \in \mathcal{H}$:

$$\|(T - \mu\mathbb{I})y\| \geq c\|y\| \tag{2.9}$$

Supponiamo per assurdo che l'operatore $(T-\mu\mathbb{I})^{-1}$, non sia limitato ovvero che per ogni $k > 0$ esista $x_k \in \mathcal{H}$ tale che $\|(T - \mu\mathbb{I})^{-1}x_k\| > k\|x_k\|$.

Sia $k = 1/c$. Allora esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che:

$$\left\|(T - \mu\mathbb{I})^{-1}x\right\| > \frac{1}{c}\|x\|.$$

Poiché $(T - \mu\mathbb{I})$ è invertibile allora esiste $y \in \mathcal{H}$ tale che:

$$x = (T - \mu\mathbb{I})y.$$

Quindi:

$$\|y\| = \left\|(T - \mu\mathbb{I})^{-1}(T - \mu\mathbb{I})y\right\| > \frac{1}{c}\|(T - \mu\mathbb{I})y\|,$$

cioè:

$$\|(T - \mu\mathbb{I})y\| < c\|y\|$$

in contraddizione con (2.9) che è valida per ogni $y \in \mathcal{H}$.

□

Proposizione 2.2.9.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora:

$$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}. \tag{2.10}$$

Inoltre se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita risulta:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

Dimostrazione.

Proviamo che $\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ provando che $\complement\Big(\sigma_p(T) \cup \{0\}\Big) \subset \complement\Big(\sigma(T)\Big)$.

Sia $\mu \in \complement\Big(\sigma_p(T) \cup \{0\}\Big)$ cioè μ non è autovalore per T e $\mu \neq 0$. Se proviamo che $(T - \mu\mathbb{I})$ è invertibile allora $\mu \in \rho(T)$ per il Corollario 2.2.8.

Poiché μ non è autovalore per T, allora $\ker(T - \mu\mathbb{I}) = \{0\}$ cioè T è ingettivo. Proviamo che l'operatore $(T - \mu\mathbb{I})$ è anche surgettivo quindi è invertibile.

Se $\mathcal{H}$ ha dimensione finita, banalmente $(T - \mu\mathbb{I})$ è un operatore lineare ed invertibile poiché ha nucleo banale. Proveremo che ciò sussiste anche se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita.

Supponiamo che $\mathcal{H}$ abbia dimensione infinita e per assurdo che $T - \mu\mathbb{I}$ non sia invertibile ovvero. Definiamo:

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{H};$$
$$\mathcal{M}_1 = Im(T - \mu\mathbb{I});$$

Abbiamo che $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0$ ed è un sottospazio proprio e chiuso per il Lemma 2.2.6, inoltre $T|_{\mathcal{M}_1}$ è un operatore compatto per la Proposizione 1.2.28. Sia:

$$\mathcal{M}_2 := (T - \mu\mathbb{I})(\mathcal{M}_1).$$

Per costruzione $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ ed è un sottospazio chiuso di $\mathcal{M}_1$ per le stesse ragioni che ci hanno permesso di dire che $\mathcal{M}_1$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$. Per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo:

$$\mathcal{M}_n := (T - \mu\mathbb{I})^n(\mathcal{H}).$$

Analogamente a quanto detto per $\mathcal{M}_2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{M}_{n-1}$. Ovvero:

$$\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_n \supset \ldots$$

Proviamo, per induzione, che tutte queste inclusioni sono strette, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n \neq \mathcal{M}_{n-1}$.

Se $n = 1$, per ipotesi abbiamo che $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_0$.

Supponiamo ora la tesi vera per $\mathcal{M}_{n-1}$. Proviamo che $\mathcal{M}_n \neq \mathcal{M}_{n-1}$. Infatti, per ipotesi induttiva abbiamo che $\mathcal{M}_{n-1} \neq \mathcal{M}_{n-2}$ perciò possiamo sempre prendere $y \in \mathcal{M}_{n-2}$, tale che $y \notin \mathcal{M}_{n-1}$, da cui, definito :

$$x := (T - \mu\mathbb{I})y,$$

risulta che $x \in \mathcal{M}_{n-1}$. Tuttavia x non può essere immagine di alcun elemento di $\mathcal{M}_{n-1}$, cioè $x \notin \mathcal{M}_n$. Infatti, se per assurdo esistesse $y' \in \mathcal{M}_{n-1}$ tale che:

$$x = (T - \mu\mathbb{I})y',$$

allora avremmo che:

$$(T - \mu\mathbb{I})y = x = (T - \mu\mathbb{I})y'$$

e per l'ingettività di $(T - \mu\mathbb{I})$:

$$y = y'$$

cioè $y \in \mathcal{M}_{n-1}$ contrariamente alle ipotesi.

Ci troviamo ora nelle ipotesi del Lemma di Riesz 1.1.13, per cui possiamo dire che esiste una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in \mathcal{M}_n$, $\|x_n\| = 1$ e :

$$dist(x_n, \mathcal{M}_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Proviamo che dalla successione $\{x_n\}$ non si può estrarre alcuna sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{Tx_{n_k}\}$ sia convergente in contraddizione con l'ipotesi che T sia compatto. Infatti:

$$Tx_n - Tx_m = (T - \mu\mathbb{I})(x_n) - (T - \mu\mathbb{I})(x_m) - \mu(x_n - x_m).$$

Notiamo che supposto $n > m$, $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{m+1} \subset \mathcal{M}_m$, di conseguenza:

$$(T - \mu\mathbb{I})(x_n) - (T - \mu\mathbb{I})(x_m) - \mu x_n \in \mathcal{M}_{m+1}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx_m\| &\geq \|\mu x_m - \big((T-\mu\mathbb{I})(x_n) - (T-\mu\mathbb{I})(x_m) - \mu x_n\big)\| \\ &\geq |\mu| dist(x_m, M_{m+1}) \geq \frac{|\mu|}{2}.\end{aligned}$$

Cioè T non è compatto contrariamente alle ipotesi. Pertanto:

$$Im(T - \lambda\mathbb{I}) = \mathcal{H}$$

quindi $(T - \lambda\mathbb{I})$ è invertibile e per quanto detto abbiamo che $\mu \in \rho(T)$, quindi la (2.10) è provata.

Suopponiamo ora che $\mathcal{H}$ abbia dimensione infinita. Per ottenere la tesi, dal fatto che $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, è sufficiente dimostrare che:

$$0 \in \sigma(T)$$

Infatti poiché T è compatto, se fosse invertibile, allora T^{-1} non potrebbe essere limitato, altrimenti, per la (i) del teorema 1.2.30 e osservando che:

$$\mathbb{I} = TT^{-1}$$

avremmo che l'operatore $\mathbb{I}$ è compatto. Ma ciò è assurdo poiché in tal caso, $B_1 = \mathbb{I}(B_1)$ è relativamente compatto, cioè compatto visto che B_1 è chiuso, in contraddizione con il Lemma 1.1.17 in quanto $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita.

$\square$

Lemma 2.2.10.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora abbiamo che $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$, cioè :

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\},$$

Dimostrazione.
Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Se per assurdo $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$, allora l'operatore $(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})$ è

invertibile con inverso limitato. Inoltre abbiamo che:

$$(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})^* = (T - \lambda\mathbb{I}),$$

infatti presi $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\big((T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})x, y\big) = (T^*x, y) - (\overline{\lambda}x, y) = (x, Ty) - (x, \lambda y) = \big(x, (T - \lambda\mathbb{I})y\big).$$

Dunque per la (iv) del Teorema 1.2.20 $\big(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})\big)^* = (T - \lambda\mathbb{I})$ è invertibile ed ha inverso limitato, cioè $\lambda \in \rho(T)$ contro l'ipotesi che $\lambda \in \sigma(T)$ sia autovalore.

Abbiamo quindi provato che se $\lambda \in \sigma(T)$ allora $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Osserviamo che se $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$, allora $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda \in \sigma((T^*)^*) = \sigma(T)$.

□

Proposizione 2.2.11.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora λ è un autovalore non nullo di T se e solo se $\overline{\lambda}$ è un autovalore non nullo per T^*.

Dimostrazione.
Sia $\lambda \in \sigma_p(T)$. Essendo T compatto, per la (iv) del Teorema 1.2.30 allora T^* è compatto. Inoltre sappiamo che:

$$(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})^* = (T - \lambda\mathbb{I}),$$

Supponiamo per assurdo che $\overline{\lambda}$ non sia autovalore per T^*, cioè :

$$\overline{\lambda} \notin \sigma_p(T^*) \cup \{0\}$$

allora per la Proposizione 2.2.9:

$$\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*),$$

quindi, in base al Lemma 2.2.10:

$$\lambda \notin \sigma(T),$$

e poiché $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ allora risulta:

$$\lambda \notin \sigma_p(T),$$

contro l'ipotesi che λ sia autovalore. Analogamente si prova che se $\overline{\lambda}$ è un autovalore di T^* allora λ è un autovalore di T. □

Osservazione 5.
La precedente proposizione ci dice che le dimensioni degli autospazi relativi a λ e $\overline{\lambda}$ sono uguali cioè λ e $\overline{\lambda}$ hanno la stessa molteplicità.

Possiamo riassumere tutte le proprietà dimostrate con il seguente teorema:

Teorema 2.2.12 (di Riesz - Schauder)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora:

(i) $\sigma(T)$ è un insieme finito o numerabile che non ha punti di accumulazione diversi da 0;

(ii) Ogni elemento non nullo di $\sigma(T)$ è un autovalore di molteplicità finita;

(iii) Un numero $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ è un autovalore di T se e solo se $\overline{\lambda}$ è un autovalore di T^*.

Corollario 2.2.13.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto, sia $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Allora λ è un elemento di $\rho(T)$ oppure un autovalore di molteplicità finita.

Corollario 2.2.14 (Alternativa di Fredholm)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto e sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allora si verifica una ed una sola delle due possibilità:

- *o fissato $y \in \mathcal{H}$, l'equazione:*

$$(T - \lambda\mathbb{I})x = y \tag{2.11}$$

ammette una, ed una sola soluzione;

- *o l'equazione*

$$(T - \lambda\mathbb{I})x = 0$$

ammette soluzioni non nulle.

Dimostrazione.
Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq 0$. Per il precedente corollario abbiamo due alternative:

- $\lambda \in \rho(T)$, allora $x = (T - \lambda\mathbb{I})^{-1}y$ è l'unica soluzione della (2.11);
- λ è un autovalore, allora esiste $z \in \mathcal{H}$ un autovettore non nullo relativo a λ per cui :

$$Tz = \lambda z,$$

cioè z è soluzione non nulla dell'equazione $(T - \lambda\mathbb{I})z = 0$

□

Osservazione 6.
In tutte le proposizioni precedenti, lo scalare 0, che è sempre elemento di $\sigma(T)$ se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita, è stato lasciato da parte nelle nostre considerazioni. Il motivo è che 0 può non essere un autovalore e se lo è non è detto che sia di molteplicità finita. A tal proposito diamo il seguente esempio:

Esempio 2.1 (Dimensione dell'autospazio relativo a 0).
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e $\{e_n\}$ un sistema ortonormale massimale. Sia $\{a_n\}$ una successione di reali positivi tale che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sia $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, e_n)e_n.$$

La definizione di T è ben posta inoltre T è compatto poiché per ogni $x \in \mathcal{H}$, definito:

$$T_k x = \sum_{n=0}^{k} a_n (x, e_n) e_n,$$

allora $\{T_k\}$ è una successione di operatori di rango finito e

$$T_k \to T \quad \text{in } \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Infatti per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|(T - T_k)x\|^2 &= \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (x, e_n) e_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 |(x, e_n)|^2 \|e_n\|^2 \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 |(x, e_k)|^2. \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza sussiste per l'*identità di Bessel*, la terza perché $\{e_k\}$ è un sistema ortonormale perciò $\|e_k\| = 1$ per ogni k. Poiché $a_n \to 0$, fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente:

$$a_n < \varepsilon.$$

Dunque definitivamente:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n^2 |(x, e_k)|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{n=k+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2.$$

Ovvero, definitivamente si ha:

$$\|T - T_n\| \leq \varepsilon^2,$$

cioè $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Tuttavia:

- se $a_n = 1/n$ per ogni n, allora sicuramente 0 non è autovalore per T;
- se $a_n = 1/n$ per $n \geq 5$ e $a_n = 0$ per $n < 5$, allora 0 è un autovalore di molteplicità 4,

- se $a_n = 0$ per n pari e $a_n = 1/n$ per n dispari, allora 0 è un autovalore di T di molteplicità infinita.

Teorema 2.2.15 (della rappresentazione spettrale)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $T \neq 0$ un operatore compatto e autoaggiunto. Allora per ogni $\lambda \in \sigma_p(T)$, detto P_λ il proiettore sul relativo autospazio si ha che:

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda. \tag{2.12}$$

Se $\sigma_p(T)$ è infinito, tale serie converge rispetto alla norma di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Inoltre, è possibile riordinare tutti gli elementi di $\sigma_p(T)$ in modo tale che:

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq \ldots \tag{2.13}$$

e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

Dimostrazione.
Dal Teorema di Riesz - Shauder, abbiamo che $\sigma_p(T)$ è un insieme finito o numerabile, inoltre dalla (i) del Teorema 2.1.11, sappiamo che $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$. Sia $\lambda \in \sigma_p(T)$ un autovalore e sia $\mathcal{M}_\lambda$ il relativo autospazio che per la Proposizione 2.2.1 ha dimensione finita. Sia P_λ il proiettore su $\mathcal{M}_\lambda$ e sia Q_λ il proiettore relativo a $\mathcal{M}_\lambda^\perp$. Per il Teorema 1.1.9 si ha che:

$$\mathbb{I} = P_\lambda + Q_\lambda.$$

e per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$(P_\lambda x, Q_\lambda x) = 0.$$

Inoltre sia P_λ che Q_λ sono autoaggiunti, infatti presi $x, y \in \mathcal{H}$ abbiamo che:

$$\begin{aligned}(P_\lambda x, y) &= (P_\lambda x, P_\lambda y + Q_\lambda y) = (P_\lambda x, P_\lambda y) + P_\lambda x, Q_\lambda y) \\ &= (P_\lambda x, P_\lambda y) = (P_\lambda x + Q_\lambda x, P_\lambda y) - (Q_\lambda x, P_\lambda y) \\ &= (x, P_\lambda y),\end{aligned}$$

e analogamente per Q_λ.

Proviamo che:

$$TP_\lambda = P_\lambda T = \lambda P_\lambda. \tag{2.14}$$

Infatti per ogni $x \in \mathcal{H}$, abbiamo che $P_\lambda x \in \mathcal{M}_\lambda$, ovvero un autovettore di T, relativo all'autovalore λ, pertanto:

$$TP_\lambda = \lambda P_\lambda.$$

Passando all'aggiunto di entrambi i membri abbiamo:

$$(TP_\lambda)^* = (\lambda P_\lambda)^*,$$

ma, T e P_λ sono autoaggiunti, quindi dal Teorema 1.2.20:

$$(TP_\lambda)^* = P_\lambda^* T^* = P_\lambda T,$$
$$(\lambda P_\lambda)^* = \overline{\lambda} P_\lambda^* = \lambda P_\lambda.$$

perciò la (2.14) è provata.

Notiamo ora che essendo $\mathbb{I} = P_\lambda + Q_\lambda$, abbiamo che $T = P_\lambda T + Q_\lambda T$, ossia:

$$T = \lambda P_\lambda + Q_\lambda T. \tag{2.15}$$

Osserviamo che :

(i) $TQ_\lambda = Q_\lambda T$,

(ii) $Q_\lambda T$ è autoaggiunto;

(iii) $Q_\lambda T$ è compatto;

(iv) $P_\lambda(Q_\lambda T) = (Q_\lambda T)P_\lambda = 0$.

Per la (i), utilizzando la (2.14):

$$\begin{aligned} T &= T(P_\lambda + Q_\lambda) = TP_\lambda + TQ_\lambda \\ &= P_\lambda T + Q_\lambda T - Q_\lambda T + TQ_\lambda \\ &= (P_\lambda + Q_\lambda)T - Q_\lambda T + TQ_\lambda = T - Q_\lambda T + TQ_\lambda \end{aligned}$$

cioè:

$$TQ_\lambda = Q_\lambda T.$$

Per la (ii), basta osservare che:

$$(Q_\lambda T)^* = T^* Q_\lambda^* = TQ_\lambda = Q_\lambda T.$$

Per la (iii) dalla (2.15), si vede che

$$Q_\lambda T = T - \lambda P_\lambda,$$

cioè Q_λ è combinazione lineare di un operatore compatto e di un operatore di rango finito, perciò Q_λ è compatto.

La (iv) risulta ovvia se osserviamo che:

$$P_\lambda Q_\lambda = Q_\lambda P_\lambda = 0.$$

Da ora in poi, per semplificare le notazioni, scriveremo:

$$\begin{aligned} P_n &:= P_{\lambda_n} \\ Q_n &:= Q_{\lambda_n} \\ \mathcal{M}_n &:= \mathcal{M}_{\lambda_n} \end{aligned}$$

Per il Corollario 2.2.5 abbiamo che almeno uno tra $\|T\|$ e $-\|T\|$ è un autovalore per T. Poniamo $\lambda_0 = \|T\|$, se $\|T\|$ è un autovalore, altrimenti sia $\lambda_0 = -\|T\|$. Per il Teorema 2.1.11, λ_0 è in modulo il più grande autovalore di T essendo $|\lambda_0| = r(T)$.

Sia

$$T_1 := Q_0 T,$$

da cui:

$$T = \lambda_0 P_0 + T_1.$$

Se $T_1 = 0$, abbiamo concluso la dimostrazione, altrimenti osserviamo che T_1 verifica le proprietà $(i), (ii), (iii), (iv)$ suddette, ovvero T_1 è un operatore autoaggiunto e compatto, pertanto almeno uno tra $\|T_1\|$ e $-\|T_1\|$ è un autovalore per T_1. Poniamo $\lambda_1 = \|T_1\|$, se $\|T_1\|$ è un autovalore per T_1, altrimenti sia $\lambda_1 = -\|T_1\|$. Per costruzione $\lambda_1 \neq 0$, poiché $|\lambda_1| = \|T_1\| \neq 0$, poiché $T_1 \neq 0$.

Osserviamo inoltre che:

$$\sigma_p(T_1) = \sigma_p(T) \setminus \{\lambda_0\}. \tag{2.16}$$

$\lambda_0 \notin \sigma_p(T_1)$ poiché $Im(T_1) = Im(Q_0 T) \subset \mathcal{M}_0^{\perp}$. Inoltre preso $\lambda \in \sigma_p(T_1)$ e $x \in \mathcal{H}$, un autovettore non nullo di T_1 relativo all'autovalore λ, abbiamo che:

$$\begin{aligned} Tx &= \lambda_0 P_0 x + T_1 x = \lambda_0 P_0 T_1 \frac{1}{\lambda} x + \lambda x \\ &= \lambda_0 P_0 Q_0 T \frac{1}{\lambda} x + \lambda x = 0 + \lambda x \\ &= \lambda x. \end{aligned}$$

Pertanto $\sigma_p(T_1) \subset \sigma_p(T) \backslash \{\lambda_0\}$. Per dimostrare l'altra inclusione, sia $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $\lambda \neq \lambda_0$. Sia $x \in \mathcal{H}$ un autovettore non nullo di T relativo all'autovalore λ. Per la (ii) del Teorema 2.1.11 abbiamo che $P_0 x = 0$, poiché autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Quindi

$$T_1 x = T_x - \lambda_0 P_0 x = \lambda x + 0 = \lambda x,$$

e ciò prova la (2.16). In definitiva abbiamo provato che $\mathcal{M}_1' = \mathcal{M}_1$, ove $\mathcal{M}_1'$ è l'autospazio relativo a λ_1 rispetto a T_1 e $\mathcal{M}_1$ è l'autospazio relativo a λ_1

rispetto a T. Quindi P_1 oltre che per T, è il proiettore ortogonale in $\mathcal{H}$ su $\mathcal{M}_1$ anche per T_1. Inoltre dalla (2.16) deduciamo che:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_0|.$$

Sia ora $T_2 := Q_1 T_1$. Se $T_2 = 0$ allora la dimostrazione è finita, altrimenti analogamente a quanto detto per T_1, avremo che:

$$T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + T_2.$$

T_2 è un operatore compatto ed autoaggiunto. Se $\|T_2\|$ è un autovalore, definiamo $\lambda_2 := \|T_2\|$, altrimenti $\lambda_2 := -\|T_2\|$.

Analogamente a quanto detto per λ_1, si prova che:

$$|\lambda_2| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_0|.$$

Per induzione sia:

$$T_n := Q_{n-1} T_{n-1}$$

cioè

$$T_n = T - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k, \tag{2.17}$$

ove

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq \ldots$$

e per ogni k

$$\|T_k\| = |\lambda_k|.$$

La successione $\{\lambda_n\}$, esaurisce tutti gli autovalori non nulli di T. Infatti se per assurdo esistesse $\lambda \in \sigma_p(T)$ tale che per ogni $k < N$, ove N è il numero di autovalori di T, $\lambda_k \neq \lambda$, per la (ii) del Teorema 2.1.11, avremmo che per ogni $x \in \mathcal{H}$:

$$(P_\lambda x, P_k x) = 0,$$

ovvero

$$P_\lambda P_k = P_k P_\lambda = 0,$$

da cui per la (2.12) risulta:

$$TP_\lambda = \sum_{k=1}^{N} P_k P_\lambda = 0,$$

perciò se $x \in \mathcal{M}_\lambda$, allora:

$$\lambda x = Tx = TP_\lambda x = 0$$

cioè $\lambda = 0$, ovvero $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

Distinguiamo ora i due casi:

(i) $\sigma_p(T)$ è un insieme finito. Quindi, ad un certo punto, l'operatore T_n sarà l'operatore nullo pertanto la procedura si fermerà. Al termine della procedura avrò esaurito tutti gli elementi di $\sigma_p(T)$ che risulteranno disposti in ordine decrescente rispetto al valore assoluto. Inoltre, dalla (2.17), avremo che vale la (2.12), cioè la tesi.

(ii) $\sigma_p(T)$ è un insieme infinito. Dal Teorema di Riesz-Shauder, abbiamo che:

$$\|T_n\| = |\lambda_n| \to 0$$

che insieme a (2.17) implica che:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

nella norma di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, ossia la tesi.

□

Definizione 2.2.16.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto ed autoaggiunto. Fissato $\lambda \in \sigma_p(T)$, sappiamo che $\mathcal{M}_\lambda$ ha dimensione finita. Pertanto definiamo $\mathfrak{B}_\lambda \subset \mathcal{H}$ un sistema ortonormale massimale finito di $\mathcal{M}_\lambda$ e per costruzione, $\mathfrak{B}_\lambda$ è costituito da autovettori relativi a λ.

Teorema 2.2.17 (Decomposizione Spettrale di un Operatore compatto e autoaggiunto)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $T \neq 0$, un operatore compatto ed autoaggiunto. Allora :

$$\mathfrak{B}_p := \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} \mathfrak{B}_\lambda$$

è un sistema ortonormale massimale finito o numerabile per $\ker(T)^\perp$.

Dimostrazione.
Per costruzione, per ogni $u \in \mathfrak{B}_p$, $\|u\| = 1$. Inoltre, per ogni $u, v \in \mathfrak{B}_p$, tali che $u \neq v$, si presentano le seguenti alternative:

- esiste $\lambda \in \sigma_p(T)$, tale che $u, v \in \mathfrak{B}_\lambda$. Allora, per costruzione, abbiamo che:
$$(u, v) = 0.$$
- esistono $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ tali che $\lambda \neq \mu$, $u \in \mathfrak{B}_\lambda$ e $v \in \mathfrak{B}_\mu$. Allora, poiché T è un operatore autoaggiunto, dalla (ii) del Teorema 2.1.11 risulta che:
$$(u, v) = 0.$$

Proviamo ora che $\mathfrak{B}_p$ è massimale per $\ker(T)^\perp$. Sia $\mathcal{M}$ la chiusura del sottospazio generato da tutti i vettori di $\mathfrak{B}_p$. Proviamo che $\mathcal{M} = \ker(T)^\perp$, ovvero $\mathcal{M}^\perp = \overline{\ker(T)} = \ker(T)$, poiché $\ker(T)$ è un sottospazio chiuso. Sia $u \in \mathcal{M}^\perp$. Per ogni $\lambda \in \sigma_p(T)$: $u \in \mathcal{M}_\lambda^\perp$, ovvero $P_\lambda x = 0$. Da cui, applicando il Teorema 2.2.15, abbiamo che:

$$Tx = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda x = 0$$

ovvero $x \in \ker(T)$ che conclude la dimostrazione.

□

Osservazione 7.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uno spazio di Hilbert. Allora possiamo riordinare gli elementi di $\mathfrak{B}_p$ e gli elementi di $\sigma_p(T)$ in modo tale che posta $\mathfrak{B}_p = \{e_n\}$ e $\sigma_p(T) = \{\lambda_n\}$, per ogni $0 \leq n < dim(\ker(T)^{\perp})$, si ha che:

(i) $Te_n = \lambda_n e_n$

(ii) $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_k| \geq \dots$.

Infatti, dal Teorema 2.2.15, possiamo riordinare $\sigma_p(T)$ in modo tale che $\sigma_p(T) = \{\lambda'_k\}$ al variare di $k \in \mathcal{K}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ e:

$$|\lambda'_0| \geq |\lambda'_1| \geq \dots \geq |\lambda'_k| \geq \dots$$

Dal Teorema di Riesz - Shauder, abbiamo che $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$. Fissato $k \in \mathcal{K}$, definiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &:= \mathcal{M}_{\lambda'_k} \\ P_k &:= P_{\lambda'_k} \\ B_k &:= B_{\lambda'_k} \\ m_k &:= dim(\mathcal{M}_k) \end{aligned}$$

Per la Proposizione 2.2.1, risulta che per ogni $k \in \mathcal{K}$,

$$0 < m_k < \infty$$

Pertanto per ogni k, definiamo $\mathfrak{B}_k := \{e_{k,s}\}$ un sistema ortonormale massimale finito del sottospazio $\mathcal{M}_k$. Fissato k, s varia in $\{0, 1, \dots, m_k - 1\}$, e per ogni s:

$$Te_{k,s} = \lambda'_k e_{k,s}.$$

Abbiamo pertanto che $\mathfrak{B}_p = \{e_{k,s}\}$, al variare di $k \in \mathcal{K}$ e $s \in \{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$. Riscaliamo gli indici. Definiamo:

$$e_0 := e'_{0,0}$$
$$e_1 := e'_{0,1}$$
$$\ldots$$
$$e_{m_0-1} := e'_{0,m_0-1}$$

Analogamente:

$$e_{m_0} := e'_{1,0}$$
$$e_{m_0+1} := e'_{1,1}$$
$$\ldots$$
$$e_{(m_0+m_1-1)} := e'_{1,m_1-1}$$

in generale, fissato $k \in \mathcal{K}$:

$$e_{(m_0+m_1+\cdots+m_{k-1})} := e'_{k,0}$$
$$e_{(m_0+m_1+\cdots+m_{k-1}+1)} := e'_{k,1}$$
$$\ldots$$
$$e_{(m_0+m_1+\cdots+m_{k-1}+m_k-1)} := e'_{k,m_1-1}$$

abbiamo così definito la famiglia $\{e_n\}$, e $0 \leq n < dim(\ker(T)^{\perp})$. Fissato n, sappiamo che esiste $k \in \mathcal{K}$, tale che e_n è un autovettore relativo a λ'_k. Definiamo $\lambda_n := \lambda'_k$ Abbiamo così costruito $\{e_n\}$ e $\{\lambda_n\}$. Proviamo che tali famiglie verificano la tesi.

La (i) si ottiene per costruzione.

Proviamo la (ii). Fissato n, abbiamo che esiste k tale che:

- o vale

$$\lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda'_k$$

e in tal caso la (ii) è verificata;

- oppure

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda'_k \\ \lambda_{n+1} &= \lambda'_{k+1} \end{aligned} \tag{2.18}$$

allora:

$$|\lambda_n| = |\lambda'_k| \geq |\lambda'_{k+1}| = |\lambda_{n+1}|.$$

Teorema 2.2.18 (Spettrale per Operatori Compatti ed Autoaggiunti)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto ed autoaggiunto. Allora:

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{\lambda \in \sigma(T)} \mathfrak{B}_\lambda$$

è un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\mathcal{H}$ costituito da autovettori.

Dimostrazione.
Se $T = 0$, ogni sistema ortonormale massimale di $\mathcal{H}$ verifica la tesi.

Supponiamo $T \neq 0$. Dal Teorema 2.2.17 sappiamo che

$$\mathfrak{B}_p = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} \mathfrak{B}_\lambda$$

è un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\ker(T)^\perp$. Inoltre, $\ker(T)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$, perciò $\ker(T)$, nel caso in cui sia non banale, è uno spazio di Hilbert. Allora esiste $\mathfrak{B}_0$ un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\ker(T)$, con la convenzione che nel caso in cui $\ker(T) = \{0\}$, $\mathfrak{B}_0 = \emptyset$. Notiamo che: Dal Teorema di Riesz - Shauder abbiamo che:

$$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\},$$

e se $\mathcal{H}$ ha dimensione infinita, allora

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

pertanto

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\lambda \in \sigma(T)} \mathfrak{B}_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} \mathfrak{B}_\lambda \right) \cup \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_0.$$

Distinguiamo due casi:

- $\ker(T) \neq \{0\}$. In questo caso, sicuramente $0 \in \sigma(T)$, $\mathfrak{B}_0 \neq \emptyset$ ed è un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\ker(T)$. Inoltre dal Teorema 1.1.9 abbiamo che:

$$\mathcal{H} = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp.$$

  da cui deduciamo che $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_p \cup \mathfrak{B}_0$ è un sistema ortonormale massimale per $\mathcal{H}$.

- $\ker(T) = \{0\}$. Non sappiamo a priori se $0 \notin \sigma(T)$ o $0 \in \sigma(T)$. Tuttavia, se $\ker(T) = \{0\}$, allora $\mathfrak{B}_0 = \emptyset$, pertanto $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_p$ sia che $0 \in \sigma(T)$, sia che $0 \notin \sigma(T)$ ed inoltre, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_p$ è un sistema ortonormale massimale di $\ker(T)^\perp = \mathcal{H}$.

□

Osservazione 8.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uno spazio di Hilbert. Allora possiamo riordinare gli elementi di $\mathfrak{B}$ e gli elementi di $\sigma(T)$ in modo tale che posta $\mathfrak{B} = \{e_n\}$ e $\sigma(T) = \{\lambda_n\}$, per ogni $0 \leq n < dim(\mathcal{H})$, si ha che:

$$Te_n = \lambda_n e_n.$$

Infatti, se $T = 0$, non c'è bisogno di alcun riordinamento. Supponiamo $T \neq 0$.

Sia $N_1 := dim(\ker(T)^{\perp})$ e $N_0 := dim(\ker(T))$. Sappiamo che

$$0 \leq N_0 \leq \infty$$
$$0 < N_1 \leq \infty.$$

Dal Teorema 2.2.17, $\mathfrak{B}_p$ è un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\ker(T)^{\perp}$ composto da autovettori di T e per quanto detto nell'Osservazione 7 possiamo riordinare gli elementi di $\mathfrak{B}_p$ e gli elementi di $\sigma_p(T)$ in modo tale che posta $\{e_{p,k}\} = \mathfrak{B}_p$ e $\{\lambda_{p,k}\} = \sigma_p(T)$, ove $0 \leq k < N_1$, e per ogni k si ha che:

(i) $Te_{p,k} = \lambda_{p,k} e_{p,k}$

(ii) $|\lambda_{p,0}| \geq |\lambda_{p,1}| \geq \cdots \geq |\lambda_{p,k}| \geq \ldots$

Analogamente, possiamo riordinare gli elementi di $\mathfrak{B}_0$, in modo tale che $\mathfrak{B}_0 = \{e_{0,k}\}$, e $0 \leq k < N_0$.

Se $N_0 = 0$, allora $\{e_{p,k}\}$ è un sistema ortonormale Massimale per $\ker(T)^{\perp} = \mathcal{H}$. Quindi, per ogni $n < N_1$, posto $k := n$, definiamo:

$$e'_{p,k} := e_n$$
$$\lambda'_k := \lambda_n.$$

Se $N_0 > 0$, allora allora valgono le seguenti alternative:

- $N_1 < \infty$.

  Per ogni $n < N_1$, posto $k := n$ definiamo:

  $$e_n := e'_{1,k},$$

  mentre per ogni $N_1 \leq n \leq N_0 - 1$, posto $k := n - N_1$ definiamo:

  $$e_n := e'_{0,k}.$$

- $N_1 = \infty$ e $N_0 < \infty$,

  per ogni $n < N_0$, posto $k := n$ definiamo:

  $$e_n := e'_{0,k},$$

  mentre per ogni $n \geq N_0$, posto $k := n - N_0$

  $$e_n := e'_{1,k}.$$

- $N_0 = N_1 = \infty$,

  per ogni $n \in \mathbb{N}$ e n pari, posto $k := n/2$ definiamo:

  $$e_n = e'_{0,k},$$

  mentre se n è dispari, allora posto $k := (n-1)/2$, definiamo:

  $$e_n = e'_{1,k}.$$

Abbiamo riordinato gli elementi di $\mathfrak{B}$ in modo tale che $\mathfrak{B} = \{e_n\}$ e $0 \leq n < dim(\mathcal{H})$, allora fissato n;

- Se $Te_n = 0$, poniamo

  $$\lambda_n := 0.$$

- Se $Te_n \neq 0$, allora esiste $k \in \mathcal{K}$ tale che:

  $$Te_n = \lambda'_k e_n.$$

  Pertanto definiamo:

  $$\lambda_n := \lambda'_k$$

Pertanto, abbiamo che per ogni $n < dim(\mathcal{H})$, abbiamo che:

$$Te_n = \lambda_n e_n.$$

Possiamo riassumere il Teorema 2.2.18 e l'Osservazione 8 dando la formulazione classica del Teorema Spettrale per Operatori Compatti o Teorema di Hilbert-Schmidt:

Teorema 2.2.19 (Teorema di Hilbert - Schmidt)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto ed autoaggiunto. Allora esiste $\{e_n\}$, un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\mathcal{H}$ e $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che per ogni $n < dim(\mathcal{H})$ risulti:

$$Te_n = \lambda_n e_n.$$

Inoltre tutti e soli gli autovalori di T, appartengono alla famiglia $\{\lambda_n\}$.

Osservazione 9.
La formulazione del teorema di $Hilbert - Schimdt$ è ottimale, cioè se si rimuovesse anche solo una delle ipotesi, non è detto che la tesi sussista. Diamo i seguenti controesempi per provare quanto appena detto.

Esempio 2.2 (**Necessità di compattezza per il teorema di Hilbert - Schmidt**).
Sia $T : L^2([1, 2]) \to L^2([1, 2])$ definito in modo che per ogni $f \in L^2([0, 1])$ e ogni $t \in [1, 2]$:

$$T(f)(t) = tf(t)$$

Proveremo che per ogni f, $T(f) \in L^2([1, 2])$ e che $T \in \mathcal{L}(L^2([1, 2]))$, $T = T^*$ ma T non è compatto e non ammette autovalori.

T è un operatore lineare per costruzione. Proviamo che T è ben posto, infatti sia $f \in L^2([1, 2])$:

$$\|T(f)\|_{L^2}^2 = \int_1^2 |tf(t)|^2 dt \leq 4 \int_1^2 |f(t)|^2 dt = 4\|f\|_{L^2}^2 < \infty$$

inoltre per quanto detto è limitato poiché:

$$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2\|f\|_{L^2} \Rightarrow \frac{\|T(f)\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \leq 2.$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad f :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^2([1,2]))} \leq 2.$$

Proviamo che $T = T^*$:

$$\begin{aligned}\big(T(f), g\big) &= \int_1^2 T(f)(t)\overline{g(t)}dt = \int_1^2 tf(t)\overline{g(t)}dt \\ &= \int_1^2 f(t)\overline{tg(t)}dt = \int_1^2 f(t)\overline{T(g)(t)}dt \\ &= \big(f, T(g)\big).\end{aligned}$$

Proviamo che T non è compatto. Proveremo che T è invertibile e ha inverso limitato. Cioè $0 \in \rho(T)$. Per questo motivo T non è compatto, infatti se per assurdo lo fosse, per il Teorema di $Riesz-Shauder$, $0 \in \sigma(T)$ ovvero $0 \notin \rho(T)$.

Definiamo $\widetilde{T} : L^2([1,2]) \to L^2([1,2])$ tale che per ogni $f \in L^2([1,2])$ e $t \in [1,2]$:

$$\widetilde{T}(f)(t) = \frac{1}{t}f(t).$$

$\widetilde{T}$ è lineare per costruzione. Proviamo che è ben posto, cioè per ogni $f \in L^2([1,2])$, $\widetilde{T}(f) \in L^2([1,2])$, infatti:

$$\|\widetilde{T}(f)\|^2_{L^2([1,2])} = \int_1^2 \left|\frac{1}{t}f(t)\right|^2 dt \leq \int_1^2 |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2([1,2])}.$$

Inoltre:

$$\|\widetilde{T}(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \Rightarrow \frac{\|\widetilde{T}(f)\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \leq 1.$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad f :

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(L^2([1,2]))} \leq 1.$$

Cioè $\widetilde{T}$ è limitato.

Proviamo che $\widetilde{T} = T^{-1}$. Sia $f \in L^2([1,2])$ e $t \in [1,2]$:

$$(\widetilde{T}T)(f)(T) = \widetilde{T}(T(f(t))) = \frac{1}{t}T(f)(t) = \frac{1}{t}tf(t) = f(t).$$

Analogamente si vede che $T\widetilde{T} = \mathbb{I}$. Perciò T è invertibile e ha inverso limitato, perciò T non è compatto.

Proviamo ora che T non ammette autovalori.

Supponiamo che $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq 0$ sia un autovalore e sia $f \in L^2\big([1,2]\big)$ e $f \neq 0$ un autovettore relativo a λ, allora per ogni $t \in [1,2]$:

$$T(f)(t) = \lambda f(t) \Rightarrow tf(t) = \lambda f(t)$$

Poiché f è una funzione quasi ovunque non nulla, possiamo dividere per $f(t)$, pertanto:

$$t = \lambda$$

che è assurdo visto che λ è un valore fissato, mentre t varia in $[0,1]$.

Abbiamo appena visto che l'ipotesi di compattezza è essenziale per l'esistenza di autovalori. Proviamo ora che affinché sussista il teorema di $Hilbert - Schmidt$ anche l'ipotesi che l'operatore sia autoaggiunto è essenziale.

Esempio 2.3 (**Necessità di autoaggiunzione per il teorema di Hilbert - Schmidt**).
Tramite questo esempio faremo vedere che l'ipotesi di autoaggiunzione è essenziale. Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ così costruita:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore lineare la cui matrice associata è A, cioè tale che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Per costruzione T è compatto, poiché ha rango finito, ma non è autoaggiunto poiché la matrice A non è simmetrica.

Proviamo che T non ammette autovalori. Sappiamo dall'algebra lineare gli autovalori di T sono tutti e soli gli autovalori di A. Pertanto T ammette autovalori se e solo se A ammette autovalori.

Sia $A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A' = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0 \\ 1 & (1-\lambda) \end{bmatrix}.$$

Sappiamo che gli autovalori di A sono le soluzioni di $det(A') = 0$, quindi:

$$(1-\lambda)^2 = 0.$$

quindi 1 è eventualmente l'unico autovalore di A.

Tuttavia se A ammettesse autovalori, allora sarebbe simile alla matrice diagonale che ha sulla diagonale principali i suoi autovalori. Ovvero A è simile alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cioè A è simile alla matrice Identità, la quale è simile solo a se stessa. Pertanto T non ammette autovalori quindi il teorema di $Hilbert - Schmidt$ non è verificato.

Abbiamo provato che nel caso in cui non valessero le ipotesi del teorema di $Hilbert - Schmidt$ allora non è detto che esistano autovalori. Tuttavia possiamo provare che nel caso in cui l'operatore che stiamo considerando sia solo compatto (e non autoaggiunto) allora valgono proprietà analoghe a quella dimostrata. Non parleremo più di autovalori ma di *valori singolari*.

Definizione 2.2.20.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Sia $\lambda > 0$, diremo che λ è un valore singolare di T se e solo se λ^2 è un autovalore non nullo di T^*T.

Indicheremo con $SV(T)$ l'insieme dei valori singolari di T.

Proposizione 2.2.21.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora sono equivalenti:

(i) *μ è un autovalore non nullo di T^*T.*

(ii) *esiste $\lambda > 0$, un valore singolare di T tale che $\lambda^2 = \mu$.*

Dimostrazione.
Da (ii) segue (i) per definizione di valore singolare.

Proviamo l'altra implicazione. Poiché $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e T compatto, per il Teorema 1.2.30, abbiamo che T^* è compatto, quindi T^*T è compatto. Dalla Proposizione 1.2.25, deduciamo che T^*T è un operatore autoaggiunto e positivo per cui abbiamo che , preso $\mu \in \sigma_p(T^*T)$, allora $\mu > 0$. Sia $\lambda := \sqrt{\mu}$. λ è ben definito poiché μ è postivio ed inoltre per costruzione λ è un valore singolare di T.

□

Corollario 2.2.22.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora $SV(T)$ è un insieme finito o numerabile e :

$$SV(T) \subset (0, \|T\|]$$

Dimostrazione.
Dalla Proposizione 2.2.21, abbiamo che $SV(T)$ e $\sigma_p(T^*T)$ hanno la stessa cardinalità. Essendo T un operatore compatto, T^*T è un operatore compatto, e dal Teorema di Riesz - Shauder, abbiamo che $\sigma_p(T^*T)$ è un insieme finito o numerabile. Inoltre essendo T^*T un operatore positivo e autoaggiunto risulta che:

$$\sigma_p(T) \subset (0, \|T^*T\|].$$

Poiché $\|T^*T\| \leq \|T^2\|$, dalla Proposizione 2.2.21 deduciamo che:

$$SV(T) \subset (0, \|T\|].$$

□

Lemma 2.2.23.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora possiamo riordinare gli elementi di $SV(T)$ in modo tale che posto $SV(T) = \{\lambda_n\}$, risulti che:

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq \ldots$$

Dimostrazione.
La dimostrazione è ovvia se si combina il Lemma 8 e la Proposizione 2.2.21.

□

Teorema 2.2.24 (Forma canonica di un operatore compatto)**.**
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operatore compatto. Allora esistono due sistemi ortonormali $\{e_n\}$ e $\{v_n\}$ finiti o numerabili, non necessariamente massimali e una famiglia di numeri positivi $\{\lambda_n\}$, e $0 \leq n < dim(\ker(T)^{\perp}) = N_1$ e tali che

$$T = \sum_{n=0}^{N_1-1} \lambda_n(\cdot, e_n)v_n \tag{2.19}$$

con la convenzione che se $dim(\ker(T)^{\perp}) = \infty$, la serie converge rispetto alla norma di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Inoltre $\{\lambda_n\}$ è costituita da tutti e soli i valori singolari di T.

Dimostrazione.
Poichè $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora per la (i) del Teorema 1.2.20 $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, inoltre per

la (i) del Teorema 1.2.30 l'operatore T^*T è compatto, e per la Proposizione 1.2.25 è simmetrico e positivo. Dalla Proposizione 1.2.25, sappiamo che

$$\ker(T^*T) = \ker(T).$$

quindi $dim(\ker(T^*T)^\perp) = dim(\ker(T)^\perp) = N_1$.

Per il Teorema 2.2.17, esiste $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$ ed una famigla $\{\mu_n\}$ di numeri reali, tali che:

(i) $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale massimale finito o numerabile di $\ker(T)^\perp$;

(ii) per ogni $n < N_1$, $T^*Te_n = \mu_n e_n$;

(iii) per ogni $n < N_1$, $|\mu_n| \geq |\mu_{n-1}|$,

Inoltre, visto il Teorema 2.2.15, per ogni $x \in \mathcal{H}$ si ha che:

$$T^*Tx = \sum_{n=0}^{N_1-1} \mu_n(x, e_n)e_n$$

con la convenzione che se $N_1 = \infty$, la serie converge rispetto alla norma di $\mathcal{H}$ e:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0.$$

Poiché T^*T è positivo, per la Proposizione 2.1.12 sia ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n > 0.$$

Osserviamo che se $\ker(T) \neq \{0\}$ allora $\{e_n\}$ non è un sistema ortonormale massimale per $\mathcal{H}$. Tuttavia detto $\mathcal{M}$ la chiusura dello spazio generato dai vettori $\{e_n\}$, abbiamo che $T^*T = 0$ su $\mathcal{M}^\perp$.

Per ogni $n < N_1$, definiamo $\lambda_n := \sqrt{\mu_n}$ e $v_n := Te_n/\lambda_n$. Allora abbiamo che per il Corollario 2.2.22, tutti e soli i valori singolari di T, costituiscono la famiglia $\{\lambda_n\}$ poiché tutti e soli gli autovalori di T^*T, costituiscono la famiglia $\{\mu_n\}$. Inoltre:

$$\begin{aligned}(v_n, v_m) &= \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}(Te_n, Te_m) = \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}(T^*Te_n, e_m) = \frac{{\lambda_n}^2}{\lambda_n\lambda_m}(e_n, e_m)\\ &= \frac{{\lambda_n}^2}{\lambda_n\lambda_m}\delta_{nm}.\end{aligned}$$

Cioè i $\{v_n\}$ costituiscono un sistema ortonormale.

Sia $x \in \mathcal{H}$, e P il proiettore di $\mathcal{H}$ su $\ker(T)$. Evidentemente, per ogni $n < N_1$, $(Px, e_n) = 0$ perciò :

$$x - P(x) = \sum_{n=0}^{N_1-1}(x - P(x), e_n)e_n = \sum_{n=0}^{N_1-1}(x, e_n)e_n,$$

da cui, applicando T, rispetto alla norma di $\mathcal{H}$, risulta che:

$$T(x - Px) = \sum_{n=0}^{N_1-1}(x, e_n)Te_n, \tag{2.20}$$

e poiché $T(Px) = 0$, allora:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{N_1-1}(x, e_n)Te_n.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}Tx &= \sum_{n=0}^{N_1-1}(x, e_n)Te_n = \sum_{n=0}^{N_1-1}\lambda_n(x, e_n)\frac{Te_n}{\lambda_n}\\ &= \sum_{n=0}^{N_1-1}\lambda_n(x, e_n)v_n.\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $N_1 = \infty$. Per costruzione $\lambda_n \to 0$. Definiamo T_n l'operatore che ad ogni $x \in \mathcal{H}$ associa:

$$T_nx = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x, e_k)v_k.$$

Proviamo che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, da cui ho la (2.19). Sia $x \in \mathcal{H}$, allora :

$$\begin{aligned}
\|(T - T_n)x\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) v_k \right\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\lambda_k (x, e_k) v_k\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |(x, e_k)|^2 \|v_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |(x, e_k)|^2 \\
&\leq \sup_{k\ n+1} |\lambda_k|^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Dividendo per $\|x\|$ e passando all'estremo superiore rispetto a x:

$$\|T - T_n\| \leq \sup_{k>n+1} |\lambda_k| \to 0 \quad \text{se } n \to \infty$$

□

Capitolo 3

Applicazioni ai problemi differenziali

In questo si applicano i risultati dei precedenti capitoli allo studio dei problemi differenziali. Esso si suddivide in tre sezioni: nella prima richiamo alcuni risultati relativi alla teoria delle distribuzioni di L. Schwarz e agli spazi di Sobolev. Nella seconda sezione utilizziamo il Teorema di Hilbert - Schmidt per trovare soluzioni del Problema di Dirichlet omogeneo; nella terza sezione, infine, applichiamo tutti i risultati ottenuti nella ricerca di soluzioni deboli dell'equazione del calore.

3.1 Distribuzioni e Spazi di Sobolev

Definizione 3.1.1.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e sia $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice, ovvero $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$. Si definisce *modulo di* α e si scrive

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Definizione 3.1.2.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Si definisce supporto di φ l'insieme:

$$supp(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Definizione 3.1.3.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m, k \in \mathbb{N}$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^k$. Diremo che $\varphi \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^k)$ se e solo se per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tale che $|a| \leq m$ è definita ed è continua la funzione:

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Se $k = 1$ scriveremo:

$$C^m(\Omega) = C^m(\Omega, \mathbb{R})$$

Definiamo inoltre:

$$C^0(\Omega) := C(\Omega),$$
$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

e per ogni $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$$C_0^m(\Omega) := \{\varphi \in C^m(\Omega) : supp(\varphi) \text{ è compatto}\},$$
$$C_b^m(\Omega) := \{\varphi \in C^m(\Omega) : D^\alpha \varphi \text{ è limitata per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^N\},$$
$$C^m(\overline{\Omega}) := \{\varphi \in C_b^m(\Omega) : D^\alpha \varphi \text{ è uniformemente continua per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^N\}.$$

Notazione 1.
Diamo le seguenti notazioni:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N | x = (x', x_N) : |x'| < 1, |x_N| < 1\};$$
$$Q_+ = \{x \in \mathbb{R}^N | x = (x', x_N) : |x'| < 1, 0 < |x_N| < 1\};$$
$$Q_0 = \{x \in \mathbb{R}^N | x = (x', x_N) : |x'| < 1, x_N = 0\}.$$

Definizione 3.1.4.
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Diremo che Ω *è di classe* C^k se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto V di x ed esiste una bigezione $T : Q \to V$ tale che:

- $T \in C^k(\overline{Q})$;
- $T^{-1} \in C^k(\overline{V})$;
- $T(Q_+) = V \cap \Omega$;
- $T(Q_0) = V \cap \partial\Omega$.

Mentre diremo che Ω è *un dominio Lipschitziano* se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto V di x ed esiste una bigezione $T : Q \to V$ tale che:

- T, T^{-1} sono Lipschitziane;
- $T(Q_+) = V \cap \Omega$;
- $T(Q_0) = V \cap \partial\Omega$.

Osservazione 10.
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Se Ω è un dominio regolare di classe almeno C^1, allora è un dominio Lipschitziano ed in generale non vale il viceversa.

Notazione 2.
Da ora in poi se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ è regolare se e solo se è regolare di classe C^∞.

Definizione 3.1.5.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\{\varphi_n\}$ una successione di C_0^∞ e $\varphi \in C_0^\infty$. Diremo che φ_n converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$ e scriveremo:

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{in } \mathcal{D}(\Omega),$$

se e solo se esiste $K \subset \Omega$, compatto tale che:

(i) $supp(\varphi_n) \subset K$, per ogni n;

(ii) $supp(\varphi) \subset K$;

(iii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Si definisce $\mathcal{D}(\Omega)$, l'insieme delle funzioni test, ovvero $C_0^\infty(\Omega)$, munito della convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definizione 3.1.6.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$. T si dice *distribuzione* su Ω, se e solo se $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ed è un funzionale lineare.

Denoteremo con $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'insieme delle distribuzioni su Ω e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ scriveremo:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle.$$

Definizione 3.1.7.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Si dice che u è localmente sommabile, e si scrive $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se e solo se per ogni $K \subset \Omega$ compatto:

$$\int_K |u(x)| dx < \infty.$$

Proposizione 3.1.8.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sia $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulti:

$$\langle T_u, \varphi \rangle := \int_\Omega u(x)\varphi(x) dx.$$

Allora $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e si dice indotta da u.

Per la dimostrazione si veda [7], §1.57.

Osservazione 11.

Abbiamo visto nella Proposizione 3.1.8 che ogni $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ induce una distribuzione. Tuttavia non vale il fatto che ogni distribuzione è indotta da una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Infatti sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tale che $0 \in \Omega$. Consideriamo la distribuzione δ, *delta di Dirac* tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

In [7], §1.59 si prova che $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e che non esiste alcuna $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tale che $T_u = \delta$.

Notazione 3.

La Proposizione 3.1.8 ci dice che ogni $u \in L^1_{loc}$ induce una distribuzione T_u. Da ora in poi identificheremo con u la distribuzione indotta, cioè per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotiamo:

$$\langle u, \varphi \rangle := \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

Definizione 3.1.9.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si definisce *derivata α-esima distribuzionale di T* il funzionale $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Proposizione 3.1.10.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^N$ abbiamo che $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Per la dimostrazione si veda [7], §1.60.

Definizione 3.1.11.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,$\alpha \in \mathbb{N}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si definisce *derivata α-esima debole di u* la derivata α-esima distribuzionale della distribuzione T_u, indotta da u, cioè la distribuzione:

$$D^\alpha u = D^\alpha T_u.$$

In generale non è detto che $D^\alpha u$ sia deducibile da un'altra funzione di $L^1_{loc}(\Omega)$. Diamo ora il seguente risultato per la cui dimostrazione si può vedere [7], §1.62:

Proposizione 3.1.12.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ e $u \in C^m(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tale che $|\alpha| \leq m$:

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u},$$

cioè la derivata in senso debole e la derivata in senso classico coincidono.

Lemma 3.1.13.
Sia $\Omega \in \mathbb{R}^N$, e $1 \leq p \leq \infty$. Sia $u \in L^p(\Omega)$. Allora $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione.
Sia $u \in L^p(\Omega)$. Vogliamo provare che per ogni $K \subset \Omega$ compatto risulti:

$$\int_K |u(x)| dx < \infty,$$

Sia $K \subset \Omega$ compatto

Supponiamo $p < \infty$. Poiché $u \in L^p(\Omega)$ per le proprietà della misura di Lebesgue abbiamo che:

$$\int_K |u(x)|^p dx \leq \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,$$

cioè $u \in L^p(K)$. Poiché K ha misura finita essendo compatto pertanto chiuso e limitato:

$$L^p(K) \subset L^1(K),$$

cioè:

$$u \in L^1(K).$$

Data l'arbitrarietà di K possiamo dire che:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega)\,.$$

Se invece $p = \infty$, indicando con $m(K)$ la misura di K, che abbiamo già detto essere finita, osserviamo che:

$$\int_K |u(x)|dx \leq \|u\|_\infty m(K) < \infty,$$

ovvero:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega)\,.$$

□

Corollario 3.1.14.
Sia $\Omega \in \mathbb{R}^N$, e $1 \leq p \leq \infty$. Sia $u \in L^p(\Omega)$. Allora u induce una distribuzione e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

Definizione 3.1.15.
Sia $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Si chiama *Spazio di Sobolev su Ω di ordine m ed esponente p*, lo spazio funzionale:

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

ove $D^\alpha u$ denota la derivata debole di u.

Proposizione 3.1.16.
Sia $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definiamo $\|\cdot\|_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $u \in W^{m,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{m,p} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Allora il funzionale $\|\cdot\|_{m,p}$ è una norma su $W^{m,p}(\Omega)$, cioè $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ è uno spazio normato.

Per la dimostrazione si veda [7], §3.3

Proposizione 3.1.17. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Allora:*

(i) $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ *è uno spazio di Banach;*

(ii) per ogni $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *è separabile;*

(iii) per ogni $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *è riflessivo.*

In particolare se $p = 2$, *denotato:*

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega),$$

abbiamo che $H^m(\Omega)$ *è uno spazio di Hilbert e la norma* $\|\cdot\|_{m,2}$ *è dedotta dal prodotto scalare tale che per ogni* $u, v \in H^m(\Omega)$*:*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u \overline{D^\alpha v}.$$

Per la dimostazione si veda [7], §3.6

Definizione 3.1.18.
Siano X e Y due spazi di Banach, tali che $X \subset Y$.

Si dice che X è *immerso con continuità* in Y oppure che *l'immersione di X in Y è continua* e scriveremo $X \hookrightarrow Y$ se e solo se esiste $C > 0$ tale che per ogni $x \in X$:

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$$

o equivalentemente se e solo se l'ingezione canonica $i : X \to Y$ tale che:

$$\text{per ogni } x \in X \mapsto i(x) = x \in Y$$

è un'applicazione continua da X in Y.

Mentre diremo che X è *immerso con compattezza* in Y oppure che *l'immersione di X in Y è compatta* e scriveremo $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ se e solo se $X \hookrightarrow Y$ e l'ingezione canonica $i : X \to Y$ tale che:

$$\text{per ogni } x \in X \mapsto i(x) = x \in Y$$

è un'applicazione compatta da X in Y, cioè per ogni successione limitata $\{x_n\}$ di elementi di X esiste una sottosuccessione estratta $\{x_{n_k}\}$ tale che essa converga in Y.

Definizione 3.1.19.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $p > N$. Si definisce *esponente critico*:

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Teorema 3.1.20 (Teorema delle Immersioni continue di Sobolev)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e regolare. Sia $1 \le p \le \infty$. Si ha che:

- *se $p < N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, p^*]$;*
- *se $p = N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, \infty)$;*
- *se $p > N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Per la dimostrazione si veda [7], §4.12.

Teorema 3.1.21 (Teorema delle Immersioni compatte o di Rellich - Kondrachov)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto regolare e limitato e sia $1 \le p \le \infty$. Si ha che:*

- *se $p < N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, p^*[$;*
- *se $p = N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, \infty)$;*
- *se $p > N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Per la dimostrazione si veda [7], §6.3.

Definizione 3.1.22.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dato $k \in \mathbb{N}$ e dato $1 < p \le \infty$, e q l'esponente coniugato di p, definiamo:

$$W^{-m,p}(\Omega) := (W^{m,q}(\Omega))',$$

ovvero il duale nel senso degli spazi di Banach.

Se $p = 2$, dato $k \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$H^{-m}(\Omega) := (H^m(\Omega))'.$$

Definizione 3.1.23.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Dalla Proposizione 3.1.12 sappiamo che $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. Si definisce $W_0^{m,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$, quindi:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)\,.$$

In particolare se $p = 2$ definiamo:

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{2,m}(\Omega)$$

Proposizione 3.1.24.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Allora lo spazio $W_0^{m,p}(\Omega)$ con la norma indotta da $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach.

In particolare se $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare di $H^m(\Omega)$

Dimostrazione.

Per costruzione, $W_0^{m,p}(\Omega)$ con la norma indotta da $W^{m,p}(\Omega)$, è un sottospazio chiuso di $W^{m,p}(\Omega)$. Pertanto è uno spazio di Banach. In particolare, se $p = 2$, $H_0^m(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $H^m(\Omega)$ pertanto è uno spazio di Hilbert per la Proposizione 1.1.7. □

Corollario 3.1.25.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e regolare e $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Allora:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)\,.$$

Utilizzando il Corollario 3.1.25, possiamo dimostrare i teoremi di immersione per $W_0^{1,p}$:

Teorema 3.1.26 (Teorema di immersione continua per $W_0^{1,p}(\Omega)$).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e regolare e sia $1 < p < \infty$. Allora si ha che:

- *se $p < N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, p^*]$;*
- *se $p = N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, \infty)$;*
- *se $p > N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Teorema 3.1.27 (Teorema di immersione compatta per $W_0^{1,p}(\Omega)$).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e regolare. Sia $1 < p < \infty$. Allora:

- *se $p < N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, p^*[$;*
- *se $p = N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, \infty)$;*
- *se $p > N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Osservazione 12.
Per in nostri scorpi, utilizzeremo spesso l'immersione compatta di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, la quale sussiste anche nel caso in cui Ω sia un dominio aperto limitato e Lipschitziano

Osservazione 13.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Abbiamo definito $W_0^{m,p}(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Sappiamo che le funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$ si annullano al sul bordo di Ω. Si può provare che tale proprietà sussiste "per densità" anche per le funzioni di $W_0^{m,p}(\Omega)$. A tal proposito diamo il seguente teorema:

Teorema 3.1.28.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto regolare e $1 \leq p < \infty$. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) $u = 0$ *su* $\partial\Omega$;

(ii) $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Per la dimostrazione si veda [5] $\S IX.17$.

Nel caso $m \geq 1$, con opportune ipotesi su $\partial\Omega$, si prova che devono annullarsi al bordo sia le funzioni sia le derivate fino all'ordine $m-1$.

Osservazione 14.
Sia $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq 1\}$ e $1 \leq p < \infty$. Per costruzione Ω è un aperto regolare. Sappiamo che $\partial\Omega$ ha misura nulla. Poiché gli elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ sono classi di equivalenza di funzioni definite quasi ovunque, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ non ha alcun rappresentante continuo, allora la scrittura $u|_{\partial\Omega}$ è priva di senso. Tuttavia se Ω è regolare si può dare senso a $u|_{\partial\Omega}$ e si può dimostrare che $u|_{\partial\Omega} \in L^p(\partial\Omega)$.

A tale scopo si fa riferimento alla *teoria delle tracce*, di cui non tratteremo poichè, altrimenti, ci allontaneremmo troppo dagli scopi di questa tesi. Si può provare che se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto regolare di classe C^∞, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ risulta che: $H_0^m(\Omega)$ è costituito da tutte e sole le funzioni di $H^m(\Omega)$ che, nel senso della traccia, si annullano al bordo con tutte le derivate di ordine minore di m .

Per maggiori chiarimenti, si può consultare la sezione *"Boundary Traces"* di [8], pag. 163.

Definizione 3.1.29.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dato $k \in \mathbb{N}$ e dato $1 < p \leq \infty$, e q l'esponente coniugato di p, definiamo:

$$W_0^{-m,p}(\Omega) := (W_0^{m,q}(\Omega))',$$

ovvero il duale nel senso degli spazi di Banach.

Se $p = 2$, dato $k \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$H_0^{-m}(\Omega) := (H_0^m(\Omega))'.$$

Diamo ora alcune definizioni e alcune proprietà che utilizzeremo nello studio dei problemi differenziali. Non daremo la dimostrazione poiché non è utile ai fini di questa tesi.

Definizione 3.1.30.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e regolare. Sia . Si chiama *divergenza* l'operatore $div : C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \to C(\Omega)$tale che per ogni funzione $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $x \in \Omega$ associa $div(F) \in C(\Omega)$ definito da:

$$div(F) = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_N}$$

Proposizione 3.1.31 (Teorema della divergenza)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e regolare. Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, allora abbiamo che:

$$\int_\Omega div(F)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma.$$

essendo $d\sigma$ la misura su $\partial\Omega$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N)$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$.

Definizione 3.1.32.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Si definisce *gradiente*, l'operatore ∇ : $C^1(\Omega) \to C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tale che per ogni $u \in C^1(\Omega)$:

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Definizione 3.1.33.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Si definisce *laplaciano* l'operatore Δ : $C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ tale che per ogni $u \in C^2(\Omega)$ risulti:

$$\Delta u = div\big(\nabla u\big) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$$

Proposizione 3.1.34 (Formula di Green)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ allora

abbiamo che:

$$\int_\Omega v \cdot \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \nabla u \cdot \nu \, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

essendo $d\sigma$ *la misura su* $\partial\Omega$ *e* $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)$ *il versore normale esterno a* $\partial\Omega$.

Per la dimostrazione si veda [9] $\S, 1.7$.

Teorema 3.1.35 (Disuguaglianza di Poincaré)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Allora esiste* $C_P > 0$ *che chiamreremo costante di Poincaré tale che per ogni* $u \in H_0^1(\Omega)$*:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si veda [5] $\S, IX.19$ per la dimostrazione.

Definizione 3.1.36.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$, definiamo:

$$\|u\|_{1,0} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)};$$
$$(u, v)_{1,0} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

Corollario 3.1.37.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Allora il funzionale* $\|\cdot\|_{1,0} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *è una norma su* $H^1(\Omega)$ *ed è equivalente alla norma di* $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Inoltre $(\cdot,\cdot)_{1,0}$ *è un prodotto scalare su* $H_0^1(\Omega)$ *dal quale si deduce* $\|\cdot\|_{1,0}$.

Lemma 3.1.38 (Fondamentale del Calcolo delle variazioni)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *un sottoinsieme aperto e sia* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *tale che per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*:*

$$\int_\Omega u \cdot \varphi \, dx = 0$$

Allora $u = 0$ *quasi ovunque in* Ω.

Per la dimostrazione si veda [5], $\S IV.24$.

3.2 Il Problema di Dirichlet omogeneo

Definizione 3.2.1.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e limitato. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Chiameremo *Problema di Dirichlet omogeneo*:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{PD}$$

Il problema di Dirichlet è di grandissimo utilizzo nello studio dei campi conservativi dove il vettore campo è gradiente di un potenziale. Per esempio se E è un campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, allora $divE = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$, ove ρ è la densità di carica ed ε è la costante dielettrica del mezzo. Quando esiste un potenziale u tale che $u = 0$ sul bordo del dominio e $\nabla u = -E$, allora $\Delta u = div\nabla u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$, cioè otteniamo il Problema di Dirichlet.

Definizione 3.2.2.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sia $f \in C(\Omega)$. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è una *soluzione classica* di (PD) se e solo se u risolve (PD) e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Definizione 3.2.3.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sia $f \in L^2(\Omega)$. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è una *soluzione debole* di (PD) se e solo $u \in H_0^1(\Omega)$ e per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ risulta che:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx. \tag{3.1}$$

Osservazione 15.

Abbiamo visto che $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert e che per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

e che tale norma è dedotta dal prodotto scalare definito in maniera che per ogni $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

Nel Corollario 3.1.37 abbiamo munito $H_0^1(\Omega)$ di un altro prodotto scalare da cui è possibile dedurre la norma $\|\cdot\|_{1,0}$ che è equivalente a quella citata. Utilizzeremo tale norma per dedurre alcuni importanti risultati.

Prima di tornare allo studio del Problema di Dirichlet, diamo i seguenti risultati per la cui dimostrazione si consulti [11] §6.4:

Teorema 3.2.4 (Principio di Massimo Debole)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Allora abbiamo che:

- *Se $-\Delta u \leq 0$ su Ω:*
$$\max_{\overline{\Omega}} -\Delta u = \max_{\partial\Omega} -\Delta u;$$
- *Se $-\Delta u \geq 0$ su Ω:*
$$\min_{\overline{\Omega}} -\Delta u = \min_{\partial\Omega} -\Delta u.$$

Teorema 3.2.5 (Principio di Massimo Forte)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto, limitato e connesso e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Allora abbiamo che:

- *Se $-\Delta u \leq 0$ su Ω e u raggiunge il suo massimo sull'interno di $\overline{\Omega}$, allora u è costante su Ω;*
- *Se $-\Delta u \geq 0$ su Ω e u raggiunge il suo minimo sull'interno di $\overline{\Omega}$, allora u è costante su Ω.*

Torniamo allo studio del Problema di Dirichlet. Abbiamo visto cosa significa trovare una soluzione classica o una soluzione debole per tale problema. Vogliamo ora mostrare che tipo di relazione c'è tra le due soluzioni. Mostreremo che una soluzione classica è sempre una soluzione debole e che è più facile trattare queste ultime. Mostreremo che data $f \in L^2(\Omega)$, esiste una sola $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di (PD).

Proposizione 3.2.6.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Se u è una soluzione classica di (PD)*, allora u è una soluzione debole di* (PD).

Dimostrazione.
Sia u soluzione classica di (PD). Cioè u risolve (PD) e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. In particolare u è derivabile una volta ed essendo l'insieme Ω limitato, risulta compatta la sua chiusura, quindi per il Teorema di Weierstrass, $u, \nabla u \in L^\infty(\Omega)$. Sempre per la limitatezza di Ω, si ha che la misura di Ω è finita. Quindi detta $m(\Omega)$ tale misura si ha che:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq m(\Omega)^{1/2} \|u\|_\infty < \infty$$

e analogamente $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} < \infty$. In definitiva $u \in H^1(\Omega)$. Poiché u risolve (PD), si ha che $u|_{\partial\Omega} = 0$. Avendo già dimostrato che $u \in H^1(\Omega)$ dal Teorema 3.1.28, abbiamo che $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proviamo che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ sussiste (3.1).

Sappiamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $H_0^1(\Omega)$. Proviamo innanzitutto che (3.1) sussiste per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \, dx = \int_\Omega -\Delta u \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \nabla u \cdot \nu \, d\sigma - \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio sussiste per la Proposizione 3.1.34. Tuttavia $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, quindi $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$, quindi abbiamo che:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx,$$

cioè per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sussiste (3.1).

Sia ora $v \in H_0^1(\Omega)$, allora per densità esiste $\{\varphi_n\}$ una successione di $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\varphi_n \to v$ rispetto alla norma di $H_0^1(\Omega)$, cioè: $\varphi_n \to v$ in $L^2(\Omega)$ e $\nabla \varphi_n \to \nabla v$ in $L^2(\Omega)$.

Per quanto detto prima abbiamo detto che:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi_n \, dx.$$

Se proviamo che:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx \to \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega f \cdot \varphi_n \, dx \to \int_\Omega f \cdot v \, dx. \tag{3.3}$$

per unicità del limite avremo la tesi.

Proviamo che sussiste (3.2). Dalla disuguaglianza di Holder si ha:

$$\int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla \varphi_n \; - \nabla u \nabla v \, | dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi_n - \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

Analogamente si prova la (3.3).

Perciò abbiamo provato che una soluzione classica è sempre una soluzione debole.

□

Proposizione 3.2.7.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Sia $f \in C(\overline{\Omega})$ e u è una soluzione debole di (PD) tale che $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Allora u è una soluzione classica di (PD).

Dimostrazione.
Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Utilizzando la formula di Gauss - Green si ha che:

$$\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla u \, dx = -\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$
$$= -\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx.$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che φ ha supporto compatto. Quindi:

$$\int_\Omega (-f - \Delta u) \varphi \, dx = 0$$

Per il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, $(-f - \Delta u) = 0$ quasi ovunque su Ω, ma poiché u, f sono continue, tale uguaglianza vale su tutto Ω. Inoltre essendo $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, per il Teorema 3.1.28 risulta: $u|_{\partial\Omega} = 0$ cioè la tesi.

$\square$

In definitiva, per risolvere il problema di Dirichlet, si cerca una soluzione debole e si prova di dimostrare che è regolare. A tal proposito, diamo ora il seguente Teorema sulla regolarità delle soluzioni deboli di (PD). Ometteremo la dimostrazione, per la quale si può consultare [5] $\S IX.6$.

Teorema 3.2.8 (Regolarità per il Problema di Dirichlet)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto limitato e regolare. Sia $f \in L^2(\Omega)$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole di (PD)*. Allora $u \in H^2(\Omega)$ ed esiste $C > 0$ che dipende solo da Ω tale che:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inoltre se $f \in H^m(\Omega)$, allora $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e:

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

in particolare se $m > \dfrac{N}{2}$, allora $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Infine, se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, allora $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.2.9.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Allora per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste una ed una sola $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che u è soluzione debole di (PD)*.*

Dimostrazione.
Sia $f \in L^2(\Omega)$. Si consideri l'applicazione lineare tale che:

$$v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega f \cdot v \, dx \in \mathbb{R}.$$

L'operatore appena definito è limitato infatti combinando la disguaglianza di Holder e la disuguaglianza di Poincaré abbiamo che:

$$\left| \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,0}.$$

Per il Teorema di Riesz 1.2.3, abbiamo che esiste un unico elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha che:

$$\int_{\Omega} f \cdot v \, dx = (u, v)_{1,0} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

cioè esiste una ed una sola $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di (PD).

$\square$

Corollario 3.2.10.
Sia $f \in C(\Omega)$ ed $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una soluzione classica di (PD)*. Allora u è unica.*

Dimostrazione.
Sia $\widetilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ una ulteriore soluzione classica di (PD). Allora, vista la linearità del problema di Dirichlet, abbiamo che $u - \widetilde{u}$ è soluzione classica di:

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Per la Proposizione 3.2.6, abbiamo che $u - \widetilde{u}$ è soluzione debole di (3.4) e ovviamente anche 0, la funzione nulla, è soluzione di (3.4). Poichè $0 \in L^2(\Omega)$, per il Teorema 3.2.9 abbiamo che (3.4) ammette una sola soluzione debole, ovvero, quasi ovunque su Ω abbiamo che:

$$u - \widetilde{u} = 0. \tag{3.5}$$

Tuttavia sia u che $\widetilde{u}$ sono soluzioni classiche di (PD), dunque sono entrambe funzioni continue. Pertanto la (3.5) è vera su tutto Ω.

$\square$

Osservazione 16.

Il Teorema 3.2.9 è un risultato molto importante in quanto per ogni $f \in L^2(\Omega)$ ci garantisce l'esistenza di un'unica soluzione debole per (PD). Tuttavia la dimostrazione non è costruttiva, cioè non possiamo utilizzare il Teorema 3.2.9 per trovare $u \in H_0^1(\Omega)$, l'unica soluzione debole di (PD). Vedremo che in questo senso trova la sua utilità il Teorema di Hilbert - Schmidt.

Definizione 3.2.11.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Definisco $T_D : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ risulti:

$$T_D f = u \in H_0^1(\Omega)$$

ove u è l'unica soluzione debole di (PD).

Osservazione 17.

L'operatore T_D è ben posto per il Teorema 3.2.9.

Proposizione 3.2.12.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Allora T_D è un operatore lineare e limitato da $L^2(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$. Inoltre:

$$\|T_D\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))} \leq C_P$$

Dimostrazione.

La linearità di T_D è ovvia poiché deriva dalla linearità del Problema di Dirichlet.

Proviamo che T_D è un operatore limitato. Sia $f \in L^2(\Omega)$, e sia:

$$u = T_D f$$

Poiché u è soluzione debole di (PD), allora per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha che:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx.$$

In particolare se $u = v$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder e la disuguaglianza di Poincarè abbiamo che:

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,0}^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx &= \int_\Omega f \cdot u \, dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{1,0}.\end{aligned}$$

Cioè.

$$\|u\|_{1,0} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Da cui deduciamo che T_D è limitato, infatti risulta che:

$$\|T_D f\|_{1,0} = \|u\|_{1,0} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ovvero $T_D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ e vale:

$$\|T_D\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))} \leq C_P.$$

□

Osservazione 18.
Poichè $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, allora possiamo considerare T_D come un operatore da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Ovvero:

Definizione 3.2.13.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme limitato. Sia $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, l'ingezione canonica. Definiamo:

$$T_D' := i \circ T_D : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

Teorema 3.2.14.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Allora $T_D' \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, e vale.

$$\|T_D'\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq {C_P}^2. \tag{3.6}$$

Inoltre esso è un operatore compatto autoaggiunto e strettamente positivo.

Dimostrazione.
$T'_D \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ poiché composizione di operatori lineari e limitati. Inoltre dalla Proposizione 3.2.12 e dalla disuguaglianza di Poincaré, presa $f \in L^2(\Omega)$, abbiamo che :

$$\|T'_D f\|_{L^2(\Omega)} = \|(i \circ T_D)f\|_{L^2(\Omega)} = \|i(T_D f)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|T_D f\|_{1,0} \leq {C_P}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

da cui, si deduce la (3.6).

Proviamo che T'_D è compatto. Dalla Proposizione 3.2.12 sappiamo che T_D è un operatore lineare e limitato da $L^2(\Omega)$ in $H^1_0(\Omega)$, inoltre dal Teorema 3.1.27 sappiamo che $H^1_0(\Omega)$ si immerge con compattezza in $L^2(\Omega)$, ovvero l'ingezione canonica $i : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è un operatore compatto.

Dal momento che:

$$T'_D = i \circ T_D : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

dalla (i) del Teorema 1.2.30 abbiamo che T'_D è compatto.

Proviamo che T'_D è autoaggiunto. Siano $f, g \in L^2(\Omega)$. Posti $u = T_D f \in H^1_0(\Omega)$ e $v = T_D g \in H^1_0(\Omega)$, utilizzando la relazione (3.1), abbiamo che:

$$(T'_D f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u \cdot g \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx;$$
$$(f, T'_D g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f \cdot v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

cioè:

$$(T'_D f, g)_{L^2(\Omega)} = (f, T'_D g)_{L^2(\Omega)}.$$

Infine proviamo che T'_D è strettamente positivo. Presa $f \in L^2(\Omega)$, posto $u = T'_D f$, utilizzando la relazione (3.1), abbiamo che:

$$(T'_D f, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u \cdot f \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \|u\|^2_{1,0} \geq 0.$$

Quidni, T'_D è positivo. Se $(T'_D f, f) = 0$, allora risulta $\|u\|_{1,0} = 0$ e per la disuguaglianza di Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|u\|_{1,0} = 0$$

ovvero $u = 0$ è la soluzione debole di (PD). Tuttavia $u = 0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, pertanto per la Proposizione 3.2.7, $u = 0$ è anche una soluzione classica di (PD) e pertanto, necessariamente, $f = 0$.

□

Notazione 4.
Da ora in poi, nel caso in cui non vi siano ambiguità, indicheremo con T_D, sia l'operatore da $L^2(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ che l'operatore da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

Teorema 3.2.15.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Allora esiste $\{e_n\}$ un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ ed una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori strettamente positivi di T_D, di molteplicità finita tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, e_n è un autovettore relativo a λ_n. Inoltre $\lambda_n \to 0$ e vale:

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \ldots$$

Infine, per ogni $f \in L^2(\Omega)$, sia $u \in L^2(\Omega)$ definita come:

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n, f)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

essa è l'unica soluzione debole di (PD).

Dimostrazione.
Sia $f \in L^2(\Omega)$. Per il Teorema 3.2.14 l'operatore T_D è compatto, autoaggiunto e strettamente positivo su $L^2(\Omega)$. Per il Teorema di Hilbert - Schmidt 2.2.19 esiste un sistema ortonormale massimale $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ e una successione $\{\lambda_n\}$ di numeri reali tali che $\lambda_n \to 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$T_D e_n = \lambda_n e_n.$$

Poiché T_D è strettamente positivo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $\lambda_n > 0$, e per la Proposizione 2.1.12 $\ker(T_D) = \{0\}$. Quindi, in assenza di autovalori nulli, per il Teorema 2.2.17, possiamo ordinare la successione di autovalori in modo tale che $\lambda_n \to 0$ e valga:

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \ldots$$

ove per ogni n, λ_n ha molteplicità finita.

Fissata $f \in L^2(\Omega)$, per il Teorema 1.1.15 abbiamo che:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (e_n, f)_{L^2(\Omega)} e_n$$

da cui applicando T_D abbiamo che:

$$T_D f = \sum_{k=1}^{\infty} (e_n, f)_{L^2(\Omega)} T_D e_n = \sum_{k=1}^{\infty} (e_n, f)_{L^2(\Omega)} \lambda_n e_n.$$

Peranto, ponendo $u = T_D f$, rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$ abbiamo che :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (e_n, f)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

è l'unica soluzione debole di (PD).

$\square$

Osservazione 19.
Nel Teorema 3.2.15, abbiamo costruito $u \in H_0^1(\Omega)$, l'unica soluzione debole di (PD), sfruttando un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$, costituito da autovalori. Tuttavia, non abbiamo ancora fornito una costruzione di tale base. Cerchiamo di migliorare i risultati ottenuti:

Proposizione 3.2.16.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\{e_n\}$ il sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ e $\{\lambda_n\}$ la successione di autovalori strettamente positivi di T_D di molteplicità finita, costruiti nel Teorema 3.2.15. Allora $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ è un sistema ortonormale massimale di $H_0^1(\Omega)$, rispetto al suo prodotto scalare.

Dimostrazione.

Per ogni n, abbiamo che $T_D e_n \in H^1_0(\Omega)$, per definizione di soluzione debole, inoltre :

$$T_D e_n = \lambda_n e_n$$

e poiché $\lambda_n \neq 0$, ottengo che:

$$e_n = \frac{Te_n}{\lambda_n}$$

che per quanto detto prova che $e_n \in H^1_0(\Omega)$.

Proviamo che $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ è un sistema ortonormale massimale di $H^1_0(\Omega)$. Infatti siano $m, n \in \mathbb{N}$, per la (3.1) abbiamo che:

$$\begin{aligned}\left(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \frac{e_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m \, dx = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \int_\Omega e_n \cdot e_m \, dx \\ &= \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}} \delta_{n,m}.\end{aligned}$$

Proviamo che $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ è massimale. Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}, u\right)_{1,0} = 0.$$

allora per la (3.1) e poiché $T_D e_n = \lambda_n e_n$:

$$0 = \int_\Omega \nabla\left(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \cdot \nabla u \, dx = \sqrt{\lambda_n} \int_\Omega \nabla\left(\frac{e_n}{\lambda_n}\right) \cdot \nabla u \, dx = \sqrt{\lambda_n} \int_\Omega e_n \cdot u \, dx$$

e poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{\lambda_n} \neq 0$, allora:

$$(e_n, u)_{L^2(\Omega)} = 0$$

da cui, essendo $\{e_n\}$ un sistema ortonormale massimale rispetto al prodotto scalare di $L^2(\Omega)$, deduciamo che $u = 0$ in $L^2(\Omega)$ e quindi in $H^1_0(\Omega)$, ovvero $\{e_n/\sqrt{\lambda_n}\}$ è un sistema ortonormale massimale di $H^1_0(\Omega)$.

□

Cerchiamo di dare un metodo costruttivo della base $\{e_n\}$ di autovettori. A tal proposito valutiamo:

Definizione 3.2.17.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto limitato. Chiameremo autovalore dell'operatore $-\Delta$ in Ω con condizioni di Dirichlet al bordo, un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$-\Delta, \lambda, D$}$$

ammette una soluzione debole non nulla, ovvero esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ e $u \neq 0$ tale che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha che:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u \cdot v \, dx \tag{3.7}$$

Tale u, si dice *autovettore o autofunzione relativa a* λ *di* $-\Delta$.

Chiameremo inoltre *autospazio relativo a* λ il sottospazio di $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{M}_\lambda : \{u \in H_0^1(\Omega) : u \text{ verifica la } (3.7)\ \}$$

Proposizione 3.2.18.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un sottoinsieme aperto limitato e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *un autovalore dell'operatore* $-\Delta$*, allora* $\lambda > 0$*.*

Dimostrazione.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore dell'operatore $-\Delta$. Possiamo subito escludere il caso $\lambda = 0$, poiché l'unica soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

è $u = 0$.

Sia $u \neq 0$, allora $\|u\|_{1,0} > 0$ e $\|u\|_{L^2(\Omega)} > 0$. Inoltre se u è un autovettore relativo a λ, abbiamo che:

$$0 < \|u\|_{1,0} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx = \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

ovvero $0 < \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}$ e poiché $0 < \|u\|_{L^2(\Omega)}$, allora $\lambda > 0$.

$\square$

Teorema 3.2.19.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e limitato e $\lambda > 0$. Allora sono equivalenti:

(i) λ è un autovalore per $-\Delta$;

(ii) λ^{-1} è un autovalore per T_D.

Inoltre preso $u \in H_0^1(\Omega)$, u è un autovettore relativo a λ per $-\Delta$ se e solo se u è un autovettore relativo a λ^{-1} per T_D.

Dimostrazione.
Sia $\lambda > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. λ è un autovalore per $-\Delta$ e u è un autovettore relativo a λ per $-\Delta$, se e solo se per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u \cdot v \, dx$$

da cui, essendo $\lambda \neq 0$ e per la linearità dell'operatore ∇:

$$\int_\Omega u \cdot v \, dx = \lambda^{-1} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla(\lambda^{-1} u) \cdot \nabla v \, dx$$

il che è equivalente a dire che $T_D u = \lambda^{-1} u$, cioè λ^{-1} è un autovalore per T_D e u è un autovettore relativo a λ^{-1} per T_D.

Osserviamo che tutti i passaggi della dimostrazione sono equivalenze logiche, pertanto la tesi è provata.

$\square$

Corollario 3.2.20.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto limitato. Autovettori associati ad autovalori distinti di $-\Delta$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di $H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione.
Siano $\lambda, \mu > 0$ autovalori distinti dell'operatore $-\Delta$ e siano $u, v \in H_0^1(\Omega)$ autovettori relativi rispettivamente agli autovalori λ e μ.

Proviamo che $(u, v)_{1,0} = 0$. Dal Teorema 3.2.19, abbiamo che λ^{-1}, μ^{-1} sono autovalori dell'operatore T_D e u, v sono autovettori relativi rispettivamente a λ^{-1} e a μ^{-1} per l'operatore T_D. Dal Teorema 2.1.11, essendo T_D un operatore autoaggiunto, allora autovettori relativi ad autovettori distinti sono ortogonali, ovvero:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = 0$$

Dalla definizione di autovalore di $-\Delta$, risulta che:

$$(u, v)_{1,0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u \cdot v \, dx = \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)} = 0$$

cioè la tesi.

□

Teorema 3.2.21 (Esistenza Autovalori del Laplaciano)**.**
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Allora esiste un sistema ortonormale massimale $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ ed esiste una successione $\{\mu_n\}$ di autovalori strettamente positivi di molteplicità finita tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(i) $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$;

(ii) $-\Delta e_n = \mu_n e_n$.

Inoltre $\mu_n \to \infty$ e vale:

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \dots$$

Infine la successione $\{\mu_n\}$ è costituita da tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$.

Dimostrazione.

Dal Teorema (3.2.15), esiste $\{e_n\}$ un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ ed una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori strettamente positivi di T_D, di molteplicità finita tale che per ogni n:

$$T_D e_n = \lambda_n e_n$$

Abbiamo provato nella proposizione 3.2.16 che $\{e_n\} \subset H_0^1(\Omega)$. Dal Teorema 3.2.8 abbiamo che per ogni $f \in L^2(\Omega)$, posto $u = T_D f$, allora $u \in H^2(\Omega)$. Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$, $T_D e_n = \lambda_n e_n$ e $\lambda_n \neq 0$, allora

$$e_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

Sempre dal Teorema 3.2.8, sappiamo che presa $f \in L^2(\Omega) \cap H^m(\Omega)$, allora $T_D f \in H^{m+2}(\Omega)$, da cui deduciamo che $e_n \in H^4(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, pertanto $e_n \in H^6(\Omega) \cap H^5(\Omega)$ e così via. In definitiva abbiamo provato che

$$e_n \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega),$$

ovvero, per le inclusioni di Sobolev, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Inoltre, sappiamo che $\lambda_n \to 0$ e vale:

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \ldots$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$\mu_n := \lambda_n^{-1}.$$

Poiché $\lambda_n > 0$ per ogni n e $\mu_n = \lambda_n^{-1}$ risulta:

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = \infty.$$

ed inoltre vale:

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \ldots$$

Dal Teorema 3.2.19 abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, μ_n è un autovalore per $-\Delta$ e poiché e_n è un autovettore relativo a λ_n per l'operatore T_D, allora e_n è un autovettore relativo a μ_n per l'operatore $-\Delta$. Inoltre dai risultati di regolarità che abbiamo appena provato, abbiamo che e_n è una soluzione classica di $(-\Delta, \lambda, D)$, ovvero:

$$-\Delta e_n = \mu_n e_n.$$

In più μ_n ha molteplicità finita poiché λ_n ha molteplicità finita.

Infine, proviamo che la successione $\{\mu_n\}$ è formata da tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$.

Supponiamo per assurdo che esista $\mu > 0$ un autovalore di $-\Delta$ tale che per ogni n risulti $\mu \neq \mu_n$. Allora esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ e $u \neq 0$, un autovettore relativo a μ. Poiché per ogni n, $\mu \neq \mu_n$, per il Corollario 3.2.20 abbiamo che:

$$(u, e_n)_{1,0} = 0.$$

Ovvero, per la definizione di autovalore di $-\Delta$:

$$(u, e_n)_{1,0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla e_n \ = \mu \int_\Omega u \cdot e_n \, dx = \mu(u, e_n)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Cioè, contrariamente alle ipotesi, $u = 0$ poiché $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$. Perciò gli elementi della successione $\{\mu_n\}$ sono tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$.

$\square$

Osservazione 20.
Abbiamo provato che risolvere il problema di Dirichlet è equivalente a risolvere il problema agli autovalori del Laplaciano. Cerchiamo ora un metodo con cui si possano costruire tutti le soluzioni del problema agli autovalori del Laplaciano. Diamo prima il seguente risultato:

Proposizione 3.2.22.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Definiamo:

$$\mu := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}. \tag{3.8}$$

Allora:

- $\mu > 0$;
- μ *è un minimo, ovvero esiste* $u \in H_0^1(\Omega)$ *e* $u \neq 0$, *tale che*
$$\mu \int_\Omega |u|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
- $\mu = \mu_0$, *ossia* μ *è il più piccolo autovalore di* $-\Delta$.

Chiameremo μ *autovalore principale dell'operatore* $-\Delta$.

Dimostrazione.
Proviamo innanzitutto che μ è un minimo.

Sia $\{u_n\}$ una successione minimizzante per μ, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta: $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx = \mu.$$

da cui deduciamo

$$\|u_n\|_{1,0} \leq \mu$$

ovvero $\{u_n\}$ è una successione limitata di $H_0^1(\Omega)$. Pertanto, dalla Proposizione 1.2.11, abbiamo che esiste $\{u_{n_k}\}$ una successione estratta e $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u,$$

ed inoltre :

$$\|u\|_{1,0} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{1,0} = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{1,0} \leq \mu. \tag{3.9}$$

Utilizziamo il Teorema di Rellich, con $p = q = 2$.

- Se $N = 1$, allora $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C_0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$;
- Se $N \geq 2$, allora $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Pertanto, esiste una ulteriore sottosuccessione $\{u_j'\}$ che converge ad u rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$. Per la continuità della norma, abbiamo che:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

da cui deduciamo che:

$$\mu \leq \|u\|_{1,0}^2.$$

ma, vista la (3.9), abbiamo che:

$$\mu = \|u\|_{1,0}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx,$$

cioè μ è un minimo, non sono un estremo inferiore. Inoltre $\|u\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$ quindi $\|u\|_{1,0} \neq 0$ ovvero $\mu > 0$

Proviamo ora che la funzione u appena costruita è un autofunzione relativa a μ. Fissato $v \in H_0^1(\Omega)$, definiamo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \int_\Omega |\nabla(u + tv)|^2 dx - \mu \int_\Omega |(u + tv)|^2 dx.$$

Scriviamo esplicitamente g:

$$\begin{aligned} g(t) = \; & \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2t \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ & - \mu \int_\Omega |u|^2 dx - 2\mu t \int_\Omega u \cdot v \, dx - \mu t^2 \int_\Omega |v|^2 dx. \end{aligned}$$

da cui abbiamo che g è derivabile, e:

$$g'(t) = 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + 2t \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - 2\mu \int_\Omega u \cdot v \, dx - 2\mu t \int_\Omega |v|^2 dx.$$

Inoltre si ha che per ogni $t \in \mathbb{R}$: $g(t) \geq 0$, ma anche $g(0) = 0$. Dunque $t = 0$ è un minimo di g. Essendo $t = 0$, un punto interno all'insieme di definizione:

$$g'(0) = 0.$$

Ma la condizione $g'(0) = 0$, equivale a :

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \mu \int_\Omega u \cdot v \, dx$$

ovvero u è un autovettore relativo a μ per l'operatore $-\Delta$. Ci resta da provare che μ_0 è il più piccolo autovalore di $-\Delta$.

Sia $\lambda > 0$ un autovalore per $-\Delta$ e Sia $w \in H^1(\Omega)$ e $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$, un autovettore relativo a λ per $-\Delta$. Per la (3.8) e dalla definizione di autovalore, abbiamo che:

$$\mu \leq \int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \lambda \int_\Omega |w|^2 dx = \lambda$$

□

Lemma 3.2.23.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e limitato, $u \in H_0^1(\Omega)$. Allora $|u| \in H_0^1(\Omega)$ ed inoltre per quasi ogni $x \in \Omega$:

$$\nabla |u|(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)}{|u(x)|} \nabla u(x) & \textit{se } u(x) \neq 0; \\ 0 & \textit{se } u(x) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Dimostrazione.

Proveremo la tesi per $\varphi \in D(\Omega)$ e la estenderemo per densità su $H_0^1(\Omega)$. Sia $\varphi \in D(\Omega)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$\varphi_n := \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}.$$

Per costruzione abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n \in C^\infty(\Omega)$ ed inoltre preso $x \in \Omega$ abbiamo che $\varphi_n(x) = 0$ se e solo se $\varphi(x) = 0$, cioè $supp(\varphi_n) = supp(\varphi)$. Dunque per ogni $n \in \mathbb{N}, \varphi_n \in D(\Omega)$ ed inoltre:

$$\nabla \varphi_n = \frac{\varphi \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1/n^2}}.$$

Per costruzione, $\varphi_n \to |\varphi|$ puntualmente. Proviamo che esiste $f \in L^2(\Omega)$, tale che $\nabla\varphi_n \to f$ in $L^2(\Omega)$. Infatti, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \Omega$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}\nabla\varphi(x) & \text{se } \varphi(x) \neq 0; \\ 0 & \text{se } \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Per costruzione abbiamo che $\nabla\varphi_n \to f$ puntualmente su Ω ed inoltre:

$$|\nabla\varphi_n| = \frac{|\varphi| \cdot |\nabla\varphi|}{\sqrt{\varphi^2 + 1/n^2}} \leq |\nabla\varphi|.$$

Dunque, dal teorema della convergenza dominata, abbiamo che $\nabla\varphi_n \to f$ in $L^2(\Omega)$.

Quindi $\{\nabla\varphi_n\}$ è una successione di Cauchy in $L^2(\Omega)$, per la disuguaglianza di Poincaré, $\{\varphi_n\}$ è una successione di Cauchy in $H_0^1(\Omega)$. Per la completezza di $H_0^1(\Omega)$, esiste $g \in H_0^1(\Omega)$ tale che $\varphi_n \to g$ in $H_0^1(\Omega)$, cioè $\nabla\varphi_n \to \nabla g$ in $L^2(\Omega)$. Per unicità del limite $\nabla g = f$ quasi ovunque su Ω. A meno di considerare una estratta, possiamo sempre supporre che $\varphi_n \to g$ puntualmente quasi ovunque su Ω. Allora per quasi ogni $x \in \Omega$ abbiamo che

$$g(x) = |\varphi|(x)$$

cioè $|\varphi| \in H_0^1(\Omega)$ e per quasi ogni $x \in \Omega$ risulta

$$\nabla|\varphi|(x) = f(x).$$

Sia ora $u \in H_0^1(\Omega)$. Allora esiste $\{\psi_n\} \subset D(\Omega)$ tale che

$$\begin{aligned} \psi_n \to u \quad & \text{in } L^2(\Omega), \\ \nabla\psi_n \to \nabla u \quad & \text{in } L^2(\Omega). \\ \psi_n \to u \quad & \text{puntualmente}, \\ \nabla\psi_n \to \nabla u \quad & \text{puntualmente}, \\ |\psi_n| \to |u| \quad & \text{puntualmente}, \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che:

$$||\psi_n| - |u|| \leq |\psi_n - u|,$$

da cui deduciamo che $|\psi_n| \to |u|$ in $L^2(\Omega)$. Per quanto detto precedentemente abbiamo che $\{|\psi_n|\} \subset H_0^1(\Omega)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per quasi ogni $x \in \Omega$:

$$\nabla|\psi_n|(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi_n(x)}{|\psi_n(x)|}\nabla\psi_n(x) & \text{se } \psi_n(x) \neq 0; \\ 0 & \text{se } \psi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Cerchiamo $h \in L^2(\Omega)$ tale che $\nabla|\psi_n| \to h$ in $L^2(\Omega)$. Definiamo $h : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)}{|u(x)|}\nabla u(x) & \text{se } u(x) \neq 0; \\ 0 & \text{se } u(x) = 0. \end{cases}$$

Per costruzione $h \in L^2(\Omega)$. Proviamo che $\nabla|\psi_n| \to h$ in $L^2(\Omega)$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ risulti:

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n(x)}{|\varphi_n(x)|}\nabla u(x) & \text{se } \varphi_n(x) \neq 0; \\ 0 & \text{se } \varphi_n(x) = 0. \end{cases}$$

Per costruzione abbiamo che $\{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ ed inoltre $v_n \to h$ puntualmente. Osserviamo che:

$$\|\nabla|\psi_n| - h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla|\psi_n| - v_n\|_{L^2(\Omega)} + \|v_n - h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Stimiamo i due termini separatamente, per il primo osserviamo che :

$$\begin{aligned} \|\nabla|\psi_n| - v_n\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left| \frac{\psi_n}{|\psi_n|}\Big(\nabla\psi_n - \nabla u\Big)\right|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\psi_n - \nabla u| \, dx \to 0. \end{aligned}$$

Per il secondo, sappiamo che $v_n \to h$ puntualmente ed inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n| \leq |\nabla u| \in L^2(\Omega),$$

dunque per il teorema della convergenza dominata, abbiamo che

$$\|v_n - h\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Pertanto abbiamo che $\nabla|\psi_n| \to h$ in $L^2(\Omega)$. Dunque $\{|\psi_n|\}$ è una successione di Cauchy in $H_0^1(\Omega)$ il quale è uno spazio completo. Poiché $|\psi_n| \to |u|$ in $L^2(\Omega)$, allora $|\psi_n| \to |u|$ in $H_0^1(\Omega)$, cioè $|u| \in H_0^1(\Omega)$.

Infine, possiamo sempre supporre che $\nabla|\psi_n| \to \nabla|u|$ puntualmente che per quanto detto prova la (3.10).

$\square$

Teorema 3.2.24.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e connesso. Allora μ_0, il più piccolo autovalore dell'operatore $-\Delta$, è un autovalore semplice. Inoltre, se $u \in H_0^1(\Omega)$ è un autovettore relativo a μ_0, allora u ha segno costante su Ω.

Dimostrazione.
Prima di tutto osserviamo che un'autofunzione relativa a μ_0, non può cambiare segno. Sia infatti $u \in H_0^1$ un'autofunzione relativa a μ_0. Dal Lemma 3.2.23, abbiamo che $|u| \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |\nabla|u||^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 = \mu_0$$

e poiché:

$$\| \, |u| \, \|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

allora, per come abbiamo costruito μ_0, $|u|$ è un'autofunzione relativa a μ_0, ovvero:

$$\begin{cases} -\Delta|u| = \mu_0|u| \geq 0 & \text{su } \Omega \\ |u| = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pertanto $-\Delta|u| \geq 0$, quindi $|u|$ raggiunge il suo minimo su $\partial\Omega$, ovvero $|u| \neq 0$ su Ω, ovvero $u \neq 0$ su Ω. E ciò ci dice che u ha segno costante, poiché altrimenti dovrebbe annullarsi in qualche punto all'interno di Ω e ciò non è possibile.

Dimostriamo che μ_0 è semplice. Siano $u, v \in H_0^1(\Omega)$ due autofunzioni relative a μ_0. Per la definizione di autovalore abbiamo che:

$$(u, v)_{1,0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \mu_0 \int_\Omega u \cdot v \, dx \neq 0.$$

in quanto u e v hanno segno costante su Ω, poiché autofunzioni relative a μ_0. Pertanto non è possibile trovare due autofunzioni relative a μ_0 che siano tra loro ortogonali ovvero non possiamo mai trovare due autofunzioni che siano tra loro linearmente indipendenti, cioè μ_0 ha molteplicità 1.

$\square$

3.2.1 Il Problema di Dirichlet omogeneo sul segmento

Studiamo il Problema di Dirichlet Omogeneo nel caso in cui $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Sia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, cerchiamo le soluzioni di

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{su } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Teorema 3.2.25.
Sia $f \in L^2(0, 1)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definite $e_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$, di modo che per ogni $t \in (0, 1)$ risulti:

$$e_n(t) := \sqrt{2} \sin(n^2 \pi^2 t)$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$, definita:

$$\mu_n := n^2 \pi^2$$

abbiamo che $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(0, 1)$ composto da autovettori dell'operatore $-\Delta$ e $\{\mu_n\}$ è la successione degli autovalori.

Inoltre, rispetto alla norma di $L^2(0, 1)$, posto:

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (f, e_n)_{L^2(0,1)} e_n,$$

abbiamo che u è soluzione debole del Problema di Dirichlet omogeneo su $(0,1)$.

Dimostrazione.
Dal Teorema 3.2.15, sappiamo che se $f \in L^2(0,1)$, allora esiste $\{e_n\}$ un sistema ortonormale massimale di $L^2(0,1)$ ed una successione $\{\lambda_n\}$ di autovalori dell'operatore T_D strettamente positivi tale che per ogni $f \in L^2(0,1)$ rispetto alla norma di $L^2(0,1)$:

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n, f)_{L^2(0,1)} e_n,$$

essa è l'unica soluzione debole di (PD).

Nel teorema 3.2.21 abbiamo visto la ricerca di autovalori per l'operatore T_D è equivalente a ricercare autovalori dell'operatore $-\Delta$, poiché $\lambda > 0$ è autovalore per $-\Delta$ se e solo se λ^{-1} è un autovalore per T_D. Pertanto, risolviamo il problema:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{su } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che gli autovalori di $-\Delta$ sono sempre positivi pertanto preso $\lambda > 0$, u è soluzione del problema differenziale se e solo se:

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} t),$$

ove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Imponendo $u(0) = 0$, si ottiene $c_1 = 0$, imponendo $u(1) = 0$, otteniamo che:

$$0 = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

e poiché $c_2 \neq 0$, altrimenti u non è un'autofunzione, abbiamo che $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ e questo è vero se e solo se $\sqrt{\lambda} = n\pi$ per $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, ovvero tutti e soli gli autovalori sono della forma:

$$\lambda = \pi^2 n^2,$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osserviamo che tutti gli autovalori di $-\Delta$ in $(0,1)$ sono semplici. Inoltre dal Teorema 3.2.19 abbiamo che tutti e soli gli autovalori dell'operatore T_D, sono del tipo $\frac{1}{n^2\pi^2}$, al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Posto $e_n(t) := \sin(n^2\pi^2 t)$ dal Teorema 3.2.21 abbiamo che, a meno di una costante moltiplicativa che si vede essere $\sqrt{2}$, $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(0,1)$ ed inoltre $\{e_n\}$ è proprio il sistema ortonormale massimale che cercavamo per la costruzione delle soluzione debole. Allora per ogni $f \in L^2(0,1)$, rispetto alla norma di $L^2(0,1)$, posto:

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}(f, e_n)_{L^2(0,1)} e_n,$$

abbiamo che u è soluzione debole del Problema di Dirichlet omogeneo su $(0,1)$.

□

3.2.2 Il Problema di Dirichlet omogeneo sul quadrato

Da ora, per non creare ambiguità, chiameremo T_D^1 l'operatore T_D nel caso 1-dimensionale e T_D^2 l'operatore T_D nel caso bidimensionale.

Sia $\Omega := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Valutiamo il Problema di Dirichlet omogeneo su Ω, ovvero data $f : \Omega \to \mathbb{R}$, cerchiamo le soluzioni di

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Osserviamo che $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ non è un dominio regolare, tuttavia e Lipschitziano pertanto $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Teorema 3.2.26.
Sia $f \in L^2(\Omega)$. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, definite $e_{n,m} : (\Omega) \to \mathbb{R}$, di modo che per ogni $(x,y) \in \Omega$ risulti:

$$e_{n,m}(x,y) := \sqrt{2}\sin(n^2\pi^2 x) \cdot \sqrt{2}\sin(m^2\pi^2 y)$$

e per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, definita:

$$\mu_{n,m} := (n^2 + m^2)\pi^2$$

abbiamo che $\{e_{n,m}\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ composto da autovettori dell'operatore $-\Delta$ e $\{\mu_{n,m}\}$ è la successione degli autovalori.

Inoltre, rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$, posto:

$$u := \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + m^2)\pi^2} (f, e_{n,m})_{L^2(\Omega)} e_{n,m},$$

abbiamo che u è soluzione debole del Problema di Dirichlet omogeneo su Ω.

Dimostrazione.
Sappiamo dal Teorema 3.2.21 che esiste $\{e_k\}$ un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ ed una successione $\{\lambda_k\}$ di autovalori strettamente positivi per l'operatore T_D^2 tale che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$:

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e_k, f)_{L^2(\Omega)} e_k,$$

essa è l'unica soluzione debole di (PD). Ricerchiamo tali autovalori risolvendo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \lambda\omega & \text{su } \Omega \\ \omega = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Stiamo cercando una funzione $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che per ogni$(x, y) \in \Omega$:

$$\begin{cases} -\omega_{xx}(x, y) - \omega_{yy}(x, y) = \lambda\omega(x, y) & \text{su } \Omega \\ \omega(0, y) = \omega(1, y) = \omega(x, 0) = \omega(x, 1) = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Cerchiamo soluzioni della forma:

$$\omega(x, y) = v(x)w(y)$$

ove $v, w : (0, 1) \to \mathbb{R}$. Innanzitutto notiamo che:

$$\omega_{xx}(x, y) = v''(x)w(y)$$
$$\omega_{yy}(x, y) = v(x)w''(y)$$

pertanto affinché (3.11) sia verificata deve valere che :

$$\begin{cases} -v''(x)w(y) - v(x)w''(y) = \lambda v(x)w(y) & \text{per ogni } (x, y) \in \Omega \\ v(0) = v(1) = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

poiché per ogni $(x, y) \in \Omega$ abbiamo che $u(x) \neq 0$ e $v(y) \neq 0$, poichè altrimenti otterremmo la soluzione nulla, dalla prima identità abbiamo che :

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} + \lambda. \tag{3.12}$$

La (3.12) è vera per ogni $(x, y) \in \Omega$. Essendo il primo membro funzione solo della variabile x ed il secondo funzione solo della variabile y, l'identità è possibile unicamente nel caso in cui entrambi i membri siano uguali ad una costante comune, ovvero nel caso in cui esista μ tale che:

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \mu = \frac{w''(y)}{w(y)} + \lambda$$

Abbiamo dunque il problema:

$$\begin{cases} -v'' = \mu v & \text{su } (0, 1) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

e il problema

$$\begin{cases} -w'' = (\lambda - \mu)w & \text{su } (0, 1) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Risolviamo (3.13). Per quanto visto nell'esempio precedente sappiamo che tutti e soli gli scalari μ che verificano (3.13), sono del tipo $\mu = n^2\pi^2$, al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e a meno di una costante moltiplicativa che si vede essere $\sqrt{2}$, $v_n(x) = \sin(n^2\pi^2 x)$ è l'unica soluzione di (3.13) relativo a $\mu = n^2\pi^2$. Inoltre, $\{\sqrt{2}v_n\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(0,1)$, costituito da autovettori di T_D^1.

Procedendo in maniera analoga a quanto detto per (3.13), risolviamo (3.14). Sappiamo che tutti e soli gli scalari che verificano (3.14), sono del tipo

$$(\lambda - \mu) = m^2\pi^2$$

al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e a meno di una costante moltiplicativa che si vede essere $\sqrt{2}$, $w_n(x) = \sin(m^2\pi^2 x)$ è l'unica soluzione di (3.14) relativo a $(\lambda - \mu) = m^2\pi^2$. Inoltre $\{\sqrt{2}w_n\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(0,1)$, costituito da autovettori di T_D^1.

Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_n = w_n$. Inoltre, combinando i risultati ottenuti, otteniamo che tutti e soli gli scalari che verificano (3.12) sono del tipo :

$$\lambda = \pi^2(n^2 + m^2).$$

al variare di $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proviamo che, al variare di $n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\{\sqrt{2}v_n(x)\cdot\sqrt{2}v_m(y)\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$. Per costruzione è un sistema ortonormale. Proviamo che è massimale. Sia $f \in L^2(\Omega)$, tale che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ risulti:

$$\int_\Omega f(x,y)v_n(x)v_m(y)\,dx\,dy = 0 \tag{3.15}$$

Definiamo $\psi : (0,1) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $y \in (0,1)$:

$$\psi(y) = \int_0^1 f(x,y)v_n(x)\,dx$$

Proviamo che $\psi \in L^2(0,1)$, infatti:

$$\int_0^1 |\psi(y)|^2 dy \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x,y)v_n(x)|dx\right)^2 dy \le \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\|v_n\|^2_{L^2(0,1)}.$$

ove l'ultimo passaggio sussiste per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la (3.15) è equivalente alla:

$$\int_0^1 \psi(y) v_m(y)\, dy = 0$$

e poiché $\{v_m\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(0,1)$, allora esiste $Y \subset (0,1)$ di misura 1, tale che $\psi = 0$ su Y, cioè per ogni $y \in Y$ abbiamo che:

$$0 = \psi(y) = \int_0^1 f(x,y) v_m(x)\, dx.$$

Poiché $f \in L^2(\Omega)$, fissato $y \in Y$ abbiamo dal Teorema di Fubini - Tonelli che $f(\cdot, y) \in L^2(0,1)$. Dunque per ogni $y \in Y$ abbiamo che :

$$\int_0^1 f(x,y) v_n(x) = 0$$

e poiché $\{v_n\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(0,1)$, allora esiste X_y un insieme di misura 1 tale che $f(x,y) = 0$ per ogni $x \in X_y$. Sia

$$B = \bigcup_{y \in Y} X_y \times \{y\} \subset \Omega.$$

Dal Teorema di Fubini - Tonelli, B ha misura 1, inoltre per ogni $x, y \in B$ abbiamo che $f(x,y) = 0$, ovvero f è nulla quasi ovunque su Ω, cioè la famiglia $\{\sqrt{2} v_n(x) \cdot \sqrt{2} v_m(y)\}$ è un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$.

Da ciò deduciamo che tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$ nel caso in cui $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ sono del tipo

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 (n^2 + m^2)$$

al variare di $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e tutte e sole le autofunzioni relative all'autovalore $\lambda_{n,m}$ di $-\Delta$ nel caso in cui $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, sono del tipo

$$e_{n,m}(x,y) = \sqrt{2} \sin(n^2 \pi^2 x) \cdot \sqrt{2} \sin(m^2 \pi^2 y).$$

Pertanto, presa $f \in L^2(\Omega)$, la soluzione debole del problema di Dirichlet omogeneo è:

$$u := \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+m^2)\pi^2}(f, e_{n,m})_{L^2(\Omega)} e_{n,m}.$$

□

Osservazione 21.

Dal Teorema 3.2.21 sappiamo che possiamo riordinare tutti gli autovalori in una catena decrescente. Osserviamo che μ_0, il più piccolo autovalore, si ha nel caso in cui $n = m = 1$, ovvero $\mu_0 = 2\pi^2$, è semplice. Inoltre, ogni autofuzione ad esso associata ha segno costante su tutto Ω. Sia μ_1 il più piccolo autovalore dopo μ_0. Esso si ha nel caso in cui $n = 2$ e $m = 1$ o viceversa, ovvero: $\mu_1 = 5\pi^2$. Esso ha molteplicità 2, in quanto $\big(\sin(4\pi^2 x)\sin(\pi^2 y)\big)$ e $\big(\sin(\pi^2 x)\sin(4\pi^2 y)\big)$ sono due autofunzioni relative a μ_1 ma sono tra loro ortogonali. Osserviamo inoltre che tali autofunzioni non hanno segno costante su Ω. Infatti presi $x, y > 0$, otteniamo:

$$\sin(4\pi^2 x)\sin(\pi^2 y) > 0,$$

mentre se $x > 0$ e $y < 0$, sia ha che:

$$\sin(4\pi^2 x)\sin(\pi^2 y) < 0.$$

Ed inoltre nel caso in cui

$$\mu_k := 325\pi^2$$

esso ha molteplicità 6, poiché ci sono tre coppie di interi positivi n, m, ovvero $(1, 18), (6, 17), (10, 15)$, che verificano:

$$n^2 + m^2 = 325.$$

3.3 L'Equazione del calore

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare di classe C^∞ e $T > 0$. Chiameremo *Equazione omogena del Calore* :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{su } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{su } \Omega \end{cases} \tag{3.16}$$

ove $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione assegnata, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ è detta variabile spaziale, $t \in [0,T]$ è detta variabile temporale, Δ indica l'operatore Laplaciano relativo alle variabili spaziali e u_t la derivata parziale di u rispetto alla variabile temporale.

Definizione 3.3.1.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare di classe C^∞. Una funzione $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ è una *soluzione classica dell'equazione omogenea del calore* se e solo se u verifica la (3.16) e:

$$u \in C^{2,1}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big).$$

ovvero u è C^2 rispetto alla variabile spaziale e C^1 rispetto alla variabile temporale.

Cerchiamo una formulazione "più debole" di soluzione. Diamo prima una definizione che ci servirà nel corso della trattazione

Definizione 3.3.2.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $u : [0,T] \to \mathcal{H}$.

se $1 \le p < \infty$, definiamo:

$$\|u\|_{L^p(0,T,\mathcal{H})} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^p dt \right)^{1/p}.$$

se $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{H})} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{\mathcal{H}}$$

ove con "sup" indichiamo l'estremo superiore essenziale. Infine, per ogni $p \in [1, +\infty]$ definiamo

$$L^p(0, T, \mathcal{H}) := \{u : [0, T] \to \mathcal{H} : \|u\|_{L^p(0,T,\mathcal{H})} < \infty\}.$$

Proposizione 3.3.3.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $p \in [1, +\infty]$, abbiamo che $\|\cdot\|_{L^p(0,T,\mathcal{H})}$ è una norma su $L^p(0, T, \mathcal{H})$, il quale risulta essere completo rispetto a tale norma. In particolare, $L^2(0, T, \mathcal{H})$ è uno spazio di Hilbert la cui norma si deduce dal prodotto scalare $[\cdot, \cdot] : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $u, v \in L^2(0, T, \mathcal{H})$:

$$[u, v] := \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)_{\mathcal{H}} dt.$$

Inoltre $L^p(0, T, \mathcal{H})$ è separabile per ogni $p \in [1, +\infty)$.

La dimostrazione è analoga all'equivalente degli spazi $L^p(\Omega)$ e utilizza il fatto che $\mathcal{H}$ sia uno spazio di Hilbert. Comunque, per maggiore chiarezza, si può consultare [9] §7.9.

Osservazione 22.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. $L^2(0, T, \mathcal{H})$ ammette un sistema ortonormale massimale.

Definizione 3.3.4.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $u : [0, T] \to \mathcal{H}$. Diremo che u è localmente sommabile e scriveremo $u \in L^1_{loc}(0, T, \mathcal{H})$ se e solo se per ogni $K \subset [0, T]$ compatto:

$$\int_K \|u(t)\|_{\mathcal{H}} dt < \infty.$$

Definizione 3.3.5.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $u \in L^1_{loc}(0, T, \mathcal{H})$. $u' \in L^1_{loc}(0, T, \mathcal{H})$ è la derivata nel senso delle distribuzioni o derivata debole di u se e solo se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ e per ogni $v \in \mathcal{H}$:

$$\int_0^T \varphi(t) \cdot \big(u'(t), v\big)_{\mathcal{H}} \, dt = -\int_0^T \varphi'(t) \cdot \big(u(t), v\big)_{\mathcal{H}} \, dt.$$

Lemma 3.3.6.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $1 \leq p \leq \infty$. Sia $u \in L^p(0, T, \mathcal{H})$. Allora $u \in L^1_{loc}(0, T, \mathcal{H})$.

Per la dimostrazione si procede in maniera analoga alla dimostrazione del Lemma 3.1.13.

Definizione 3.3.7.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Definiamo:

$$H^1(0, T, \mathcal{H}) := \{u \in L^2(0, T, \mathcal{H}) : u' \in L^2(0, T, \mathcal{H})\}$$

Proposizione 3.3.8.
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $u \in H^1(0, T, \mathcal{H})$. Allora u ammette rappresentante continuo, cioè esiste $\widetilde{u} \in C\big([0, T], \mathcal{H}\big)$ tale che $u = \widetilde{u}$ quasi ovunque su Ω.

Inoltre vale il teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè per ogni $s, t \in [0, T]$ e $s \leq t$ abbiamo che:

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u'(r) \, dr$$

Per la dimostrazione si veda [9], §7.9.

Notazione 5.
Da ora in poi, converrà scrivere $u = u(x, t)$ come una funzione che associa ad

ogni $t \in [0,T]$, una funzione di x, vista come elemento di un opportuno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, ovvero $u : [0,T] \to \mathcal{H}$ tale che per ogni $t \in [0,T]$:

$$u(t) = u(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Analogamente, chiameremo $u' : [0,T] \to \mathcal{H}$, tale che per ogni $t \in [0,T]$:

$$u'(t) = u_t(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Definizione 3.3.9.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Una funzione $u \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$, è una *soluzione debole per l'equazione omogenea del calore* se e solo se $u(0) = u_0$, $u' \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$ e per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ e per ogni $t \in [0,T]$ risulta:

$$\int_\Omega u'(t) \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = 0 \tag{3.17}$$

Osservazione 23.
Osserviamo che se u è soluzione debole dell'equazione omogenea del calore, allora $u \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$, cioè u è una funzione definita quasi ovunque su $[0,T]$, pertanto, fissato $t \in [0,T]$, u potrebbe non essere definita in t. Tuttavia, sappiamo che:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

quindi $u \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$, $u' \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$ cioè $u \in H^1\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$. Pertanto, dalla Proposizione 3.3.8, sappiamo che $u \in C\big([0,T], L^2(\Omega)\big)$, cioè u è definita in ogni $t \in [0,T]$.

Proposizione 3.3.10.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Se u è una soluzione classica dell'equazione omogenea del calore, allora u è una soluzione debole.

Dimostrazione.
Sia u una soluzione classica dell'equazione omogenea del calore. Cioè

$$u \in C^{2,1}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big).$$

e u verifica la (3.16).

Fissiamo $t \in [0,T]$.

Proviamo che $u \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$. Abbiamo che $u(t) \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora, analogamente a quanto detto per la dimostrazione della Proposizione 3.2.6 abbiamo che $u(t) \in H^1(\Omega)$ ed inoltre, poiché u risolve (3.16) $u(t)|_{\partial\Omega} = 0$. Pertanto, dal Teorema 3.1.28 abbiamo che $u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Consideriamo ora l'applicazione $g : [0,T] \to [0,T]$ tale che per ogni $t \in [0,T]$ risulti:

$$g(t) = \|u(t)\|_{1,0}.$$

g è continua poiché composizione di funzioni continue, dunque, vista la compattezza di $[0,T]$, g è limitata da un'opportuna costante $M > 0$. Pertanto

$$\|u\|_{L^\infty\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{1,0} = \sup_{t\in[0,1]} g(t) \le M,$$

e dalla disuguaglianza di Hölder, abbiamo che:

$$\int_0^T \|u(t)\|_{1,0}^2 \, dt \le \|u\|^2_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))} T \le M^2 T,$$

ovvero $u \in L^2\big(0,T,H_0^1(\Omega)\big)$. In maniera del tutto analoga, si prova che $u' \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$.

Inoltre $u(0) = u_0$ poiché u è una soluzione classica dell'equazione omogenea del calore.

Proviamo infine che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, sussiste la (3.17). Proviamo innanzitutto che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ è verificata (3.17), infatti :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (u'(t) - \Delta u(t))\varphi \, dx = \int_\Omega u'(t) \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega \Delta u(t) \cdot \varphi \, dx \\
&= \int_\Omega u'(t) \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla\varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \nabla u \cdot \nu \, d\sigma \\
&= \int_\Omega u'(t) \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla\varphi \, dx
\end{aligned}$$

Analogamente alla dimostrazione della Proposizione 3.2.6, poiché $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $H_0^1(\Omega)$, si può estendere per densità la relazione (3.17) in $H_0^1(\Omega)$.

□

Proposizione 3.3.11.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto. Sia $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ e u è una soluzione debole dell'equazione omogenea del calore, tale che $u \in C^{2,1}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big)$. Allora u è una soluzione classica dell'equazione omogenea del calore.

La dimostrazione è analoga alla dimostrazione della Proposizione 3.3.11.

Vista la limitatezza di Ω, possiamo risolvere (3.16) per decomposizione su un sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ costituito da autofunzioni dell'operatore $-\Delta$ con condizioni di Dirichlet al bordo.

Lemma 3.3.12.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e limitato e sia $T > 0$. Sia $v \in H_0^1(\Omega)$ e $z \in H^1([0,T])$. Definiamo $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$, tale che per quasi ogni $t \in [0,T]$, risulti:

$$u(t) := z(t) \cdot v.$$

Allora $u \in L^2\big(0,T,H_0^1(\Omega)\big)$, $u' \in L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$ e per quasi ogni $t \in [0,T]$ risulta:

$$u'(t) = z'(t) \cdot v$$

Dimostrazione.
Innanzitutto osserviamo che visto che $z \in H_0^1([0,T])$, allora z è continua quindi è limitata, pertanto u è ben posta, infatti abbiamo che per quasi ogni $t \in [0,T]$:

$$\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx = \int_\Omega |z(t) \cdot \nabla v|^2 dx = |z(t)|^2 \|v\|_{1,0}^2 < \infty$$

cioè, per quasi ogni $t \in [0,T]$, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Inoltre $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, infatti:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(t)\|_{1,0}^2 dt &= \int_0^T \int_\Omega |\nabla\big(z(t) \cdot v\big)|^2 dx\, dt \\
&= \int_0^T |z(t)|^2 \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx\, dt \\
&= \int_0^T |z(t)|^2 \|v\|_{1,0}^2\, dt \\
&= \|z\|_{L^2(0,T)}^2 \|v\|_{1,0}^2\, dt \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora: $\widetilde{u} : [0, T] \to L^2(\Omega)$ tale che per ogni $t \in [0, T]$ risulti:

$$\widetilde{u}(t) = z'(t) \cdot v.$$

In maniera del tutto analoga al caso precedente, si prova che $\widetilde{u}$ è ben posta e $\widetilde{u} \in L^2\big(0, T, L^2(\Omega)\big)$.

Proviamo che $u' = \widetilde{u}$. Infatti, per ogni $w \in L^2(\Omega)$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(t) \cdot \big(\widetilde{u}(t), w\big)_{L^2(\Omega)}\, dt &= \int_0^T \int_\Omega \varphi(t) \cdot \widetilde{u}(t) \cdot w\, dx\, dt \\
&= \int_0^T \varphi(t) \cdot z'(t) \int_\Omega v \cdot w\, dx\, dt \\
&= (v, w)_{L^2(\Omega)} \int_0^T \varphi(t) \cdot z'(t)\, dt \\
&= -(v, w)_{L^2(\Omega)} \int_0^T \varphi'(t) \cdot z(t)\, dt \\
&= -\int_0^T \varphi'(t) \cdot z(t) \int_\Omega v \cdot w\, dx\, dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \varphi'(t) \cdot u(t) \cdot w\, dx\, dt \\
&= -\int_0^T \varphi'(t) \cdot \big(u(t), w\big)_{L^2(\Omega)}\, dt
\end{aligned}$$

cioè, $\widetilde{u} = u'$.

□

Teorema 3.3.13.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un sistema ortonormale massimale $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ composto da autovettori dell'operatore $-\Delta$ ed esiste una successione $\{\mu_n\}$ di autovalori strettamente positivi tali che $\mu_n \to \infty$ e vale

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \ldots$$

Inoltre, definiamo $u : [0,T] \to H^1_0(\Omega)$ tale che per quasi ogni $t \in [0,T]$, rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$, risulti:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\mu_n t} \cdot e_n. \tag{3.18}$$

Allora, per quasi ogni $t \in [0,T]$ e rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$, abbiamo che:

$$u'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -\mu_n e^{-\mu_n t} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} \cdot e_n \tag{3.19}$$

e u è una soluzione debole dell'equazione omogenea del calore.

Dimostrazione.
Cerchiamo una soluzione che sia del tipo:

$$\omega(t) = z(t) \cdot v$$

ove $v \in H^1_0(\Omega)$ e $z \in H^1([0,T])$. Dal Lemma 3.3.12 abbiamo che per quasi ogni $t \in [0,T]$

$$\omega'(t) = z'(t) \cdot v$$

ed inoltre $\omega \in L^2\big(0,T,H^1_0(\Omega)\big)$ e $\omega' \in L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$, che per quanto detto in precedenza significa che $\omega \in H^1\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$ pertanto, dalla Proposizione 3.3.8, abbiamo che $\omega \in C\big([0,T],L^2(\Omega)\big)$.

Notiamo ora che affinché ω sia soluzione debole, per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $w \in H_0^1(\Omega)$, deve valere che:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \omega'(t) \cdot w \, dx + \int_\Omega \nabla \omega(t) \cdot \nabla w \, dx \\ &= \int_\Omega z'(t) \cdot v \cdot w \, dx + \int_\Omega z(t) \nabla v \cdot \nabla w \, dx \\ &= z'(t) \int_\Omega v \cdot w \, dx + z(t) \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx \end{aligned}$$

e ciò è possibile se e solo se esiste una costante λ tale che per ogni per quasi ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $w \in H_0^1(\Omega)$ risulti:

$$-\frac{z'(t)}{z(t)} = \lambda = \frac{\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx}{\int_\Omega w \cdot v \, dx}$$

che, è equivalente alla risoluzione del problema:

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega w \cdot v \, dx \tag{3.20}$$

e del problema

$$-z'(t) = \lambda z(t). \tag{3.21}$$

Per quanto riguarda (3.20), si tratta della ricerca delle soluzioni deboli del problema agli autovalori del Laplaciano che abbiamo già discusso. Infatti, dal Teorema 3.2.21, abbiamo che esiste un sistema ortonormale massimale $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ ed esiste una successione $\{\mu_n\}$ di autovalori strettamente positivi di molteplicità finita tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$,:

(i) $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$;

(ii) $-\Delta e_n = \mu_n e_n$.

Inoltre $\mu_n \to \infty$ e vale:

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \ldots$$

Infine la successione $\{\mu_n\}$ è costituita da tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$. Pertanto (3.20) è vera se $\lambda = \mu_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Risolviamo la (3.21). Abbiamo che tutte e sole le soluzioni del problema differenziale sono del tipo:

$$z(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$$

ma per quanto detto relativamente allo studio della (3.20) deve esistere $n \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda = \mu_n$, ovvero

$$z(t) = c \cdot e^{-\mu_n t}$$

è un integrale generale del problema differenziale (3.21).

Osserviamo che :

$$u(0) = c \cdot z(0) \cdot v = c \cdot v = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot (v, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$$

inoltre, essendo $u_0 \in L^2(\Omega)$ allora risulta:

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n.$$

da cui, imponendo la condizione $u(0) = u_0$ si ha che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot (v, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n = u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$$

che per l'unicità dei coefficienti di Fourier, ci dice che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$c \cdot (v, e_n) = (u_0, e_n).$$

Pertanto se $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $t \in [0, T]$, risulti:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\mu_n t} \cdot e_n,$$

allora u è una soluzione debole dell'equazione non omogenea del calore. Innanzitutto, proviamo che u è ben posta e che $u \in L^2\big(0, T, H_0^1(\Omega)\big)$.

Proviamo che u è ben posta, cioè fissato $t \in [0,T]$, proviamo che (3.18) è convergente rispetto alla norma di $H_0^1(\Omega)$. Sappiamo dalla Proposizione 3.2.16, che per ogni $n \in \mathbb{N}$: $\|e_n\|_{1,0} = 1/\mu_n$, pertanto si ha che:

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{1,0}^2 &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\mu_n t} \cdot e_n \right\|_{1,0}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\mu_n t} \cdot e_n\|_{1,0}^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-\mu_0 t}|^2 \big\|(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} \cdot e_n\big\|_{1,0}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \big\|(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} \cdot e_n\big\|_{1,0} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)}}{\mu_n} \right|^2 \leq \frac{1}{{\mu_0}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \big|(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)}\big|^2 \\
&= \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{{\mu_0}^2}.
\end{aligned}
$$

Proviamo che $u \in L^2\big(0, T, H_0^1(\Omega)\big)$. Integrando il primo ed ultimo membro della relazione precedente, abbiamo che:

$$
\int_0^T \|u(t)\|_{1,0}^2 dt \leq T \frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{{\mu_0}^2},
$$

da cui deduciamo che $u \in L^2\big(0, T, H_0^1(\Omega)\big)$.

Proviamo ora che u' verifica (3.19). Infatti, preso $N \in \mathbb{N}$, possiamo definire $u_N : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $t \in [0,T]$ risulti:

$$
u_N(t) := \sum_{n=0}^{N} e^{-\mu_n t} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} \cdot e_n.
$$

Per quanto detto precedentemente abbiamo che

$$
u_N \to u \quad \text{in } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)),
$$

quindi dal Lemma 3.2.23, abbiamo che per ogni $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [0,T]$:

$$
u_N'(t) = \sum_{n=0}^{N} -\mu_n e^{-\mu_n t} (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} \cdot e_n.
$$

Proviamo che $\{u'_N\}$ è converge ad u' rispetto alla norma di $L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$. Infatti in maniera del tutto analoga alla dimostrazione del fatto che $u_N \to u$, si prova che esiste $\widetilde{u} \in L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$ tale che:

$$u'_N \to \widetilde{u} \quad \text{in } L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$$

e in maniera del tutto analoga alla dimostrazione del Lemma 3.3.12 si prova che $u' = \widetilde{u}$, pertanto $u' \in L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$ e verifica la (3.19).

Possiamo dire ora che u è una soluzione debole per l'equazione omogenea del calore. Infatti abbiamo provato che $u \in L^2\big(0,T,H_0^1(\Omega)\big)$, $u' \in L^2\big(0,T,L^2(\Omega)\big)$ e per costruzione $u(0) = u_0$ ed è soddisfatta la (3.17).

□

Osservazione 24.
Si può provare che nelle ipotesi del Teorema precedente, la u che abbiamo costruito è l'unica soluzione debole dell'Equazione debole del calore (cfr. [9] §9.2.5).

Osservazione 25.
Notiamo, che abbiamo costruito la soluzione di (3.16), partendo dalla ricerca degli autovalori del Laplaciano, problema che abbiamo risolto grazie al Teorema di Hilbert - Schmidt. Notiamo inoltre che nei casi in cui $\Omega = (0,1)$ oppure $\Omega = (0,1)\times(0,1)$, conosciamo esplicitamente $\{e_n\}$, sistema ortonormale massimale di $L^2(\Omega)$ costituito da autovettori dell'operatore $-\Delta$ e $\{\mu_n\}$, la successione degli autovalori di $-\Delta$.

Definizione 3.3.14.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare di classe C^∞ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Chiameremo *Equazione non omogena del Calore*:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{su } \Omega \times [0,T] \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{su } \Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

con le stesse notazioni del caso omogeneo.

Definizione 3.3.15.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare e $f \in C\big(\overline{\Omega}\big)$. Una funzione $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ è una *soluzione classica dell'equazione non omogenea del calore* se e solo se

$$u \in C^{2,1}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big).$$

e u verifica la (3.16).

Definizione 3.3.16.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e $f \in L^2(\Omega)$. Una funzione $u \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ è una *soluzione debole per l'equazione non omogenea del calore* se e solo se $u(0) = u_0$, $u' \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$ e per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ e per ogni $t \in [0,T]$ risulta:

$$\int_\Omega u'(t) \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \tag{3.23}$$

Osservazione 26.
La Definizione appena data è ben posta, per quanto già detto nell'Osservazione 23.

Teorema 3.3.17.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme aperto, $f \in L^2(\Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Allora esiste u soluzione debole dell'equazione non omogenea del calore. Inoltre esiste un sistema ortonormale massimale $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ composto da autovettori dell'operatore $-\Delta$ ed esiste una successione $\{\mu_n\}$ di autovalori strettamente positivi tali che $\mu_n \to \infty$ e vale

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$$

tale che per ogni $t \in [0,T]$ e rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$ risulta:

$$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} \big(e^{-\mu_n t} + 1\big) \Big] e_n.$$

Dimostrazione.

Proviamo innanzitutto l'esistenza di una soluzione debole.

Studiamo dapprima il caso stazionario, ovvero cerchiamo $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u_\infty \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \tag{3.24}$$

cioè stiamo cercando soluzioni deboli del problema di Dirichlet. Sappiamo dal Teorema 3.2.9 che esiste $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$ l'unica soluzione di (3.24).

Definiamo $w_0 := u_0 - u_\infty$. Per costruzione $w_0 \in L^2(\Omega)$. Pertanto, per il Teorema 3.3.13 esiste $w \in L^2\big(0, T, H_0^1(\Omega)\big)$, tale che $w' \in L^2\big(0, T, L^2(\Omega)\big)$, $w(0) = w_0$ e per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ e per ogni $t \in [0, T]$ risulti:

$$\int_\Omega w'(t) \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla w(t) \cdot \nabla v \, dx = 0 \tag{3.25}$$

Definiamo $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ in modo che per ogni $t \in [0, T]$, risulti:

$$u(t) = w(t) + u_\infty.$$

Per costruzione $u \in L^2\big(0, T, H_0^1(\Omega)\big)$ e $u' \in L^2\big(0, T, L^2(\Omega)\big)$ pertanto possiamo dire che $u \in H^1\big(0, T, L^2(\Omega)\big)$. Dalla Proposizione 3.3.8, $u \in C\big([0, T], \mathcal{H}\big)$ quindi:

$$u(0) = w(0) - u_\infty = w_0 - u_\infty = u_0.$$

Proviamo che per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ sussiste la (3.23). Infatti:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u'(t) \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx &= \int_\Omega w'(t) \cdot v \, dx + \int_\Omega \big(\nabla w(t) - \nabla u_\infty\big) \cdot \nabla v \, dx \\
&= \int_\Omega w'(t) \cdot v \, dx + \int_\Omega \nabla w(t) \cdot \nabla v \, dx \\
&\quad + \int_\Omega \nabla u_\infty \cdot \nabla v \, dx \\
&= \int_\Omega f \cdot v \, dx
\end{aligned}$$

Pertanto u è la soluzione debole dell'equazione non omogenea del calore.

Dal Teorema 3.3.13, abbiamo che esiste un sistema ortonormale massimale $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ composto da autovettori di $-\Delta$ ed esiste una successione $\{\mu_n\}$ di autovalori tale che $\mu_n \to \infty$ e definita $w : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ di modo che per ogni $t \in [0,T]$ risulti:

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (w_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\mu_n t} e_n,$$

w è soluzione di (3.25) e dal Teorema 3.2.15, risulta che definita

$$u_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

essa è l'unica soluzione dell'equazione stazionaria (3.24).

Poiché per ogni $t \in [0,T]$ risulta $u(t) = w(t) - u_\infty$, abbiamo che:

$$u(t) = w(t) - u_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(w_0, e_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\mu_n t} - \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} \Big] e_n,$$

ed inoltre, visto che $u_0 = w_0 - u_\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(w_0, e_n)_{L^2(\Omega)} &= (u_0 - u_\infty, e_n)_{L^2(\Omega)} = (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} - (u_\infty, e_n)_{L^2(\Omega)} \\ &= (u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}u(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Big((u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} \Big) e^{-\mu_n t} - \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} \right] e_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(u_0, e_n)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\mu_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} \big(e^{-\mu_n t} + 1 \big) \Big] e_n.\end{aligned}$$

□

Il seguente risultato, ha proprietà fisiche molto rilevanti:

Corollario 3.3.18.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ regolare di classe C^∞ e siano $f, u_0 \in L^2(\Omega)$, e u_∞ la soluzione del caso stazionario ovvero u_∞ risolve (3.24). Allora, detto μ_0 il più piccolo autovalore dell'operatore $-\Delta$, per ogni $t \in [0,T]$ risulta:

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\mu_0 t}({C_P}^2\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Dimostrazione.
Con le stesse notazioni dei precedenti Teoremi, osserviamo che detta w la soluzione di (3.25), abbiamo che per ogni $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\|u(t) - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} = \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(w_0, e_n)_{L^2(\Omega)}e^{-\mu_n t}e_n\right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|(w_0, e_n)_{L^2(\Omega)}|^2 e^{-2\mu_n t}.\end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è valida per l'indentità di Bessel, e poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0 < \mu_n$:

$$\|u(t) - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2\mu_0 t}\|w_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

In particolare dal Teorema 3.2.14 risulta $\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq {C_P}^2\|f\|_{L^2(\Omega)}$, quindi la tesi segue dal fatto che:

$$\|w_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + {C_P}^2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Bibliografia

[1] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[2] Walter Rudin, *Principi di analisi matematica*, McGraw-Hill, 1991.

[3] Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics vol. I*, Academic Press, 1972.

[4] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real Analysis*, Princeton University Press, 2005.

[5] Haïm Brezis, *Analisi Funzionale: teoria e applicazioni*, Liguori, 1986.

[6] Valter Moretti, *Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica*, Springer, 2010.

[7] Lokenath Debnath, Piotr Mikusinski , *Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Third Edition*, Elsevier Academic Press, 2005.

[8] Robert A. Adams, John J.F. Fournier, *Sobolev Spaces, Second Edition*, Academic Press, 2003.

[9] Sandro Salsa, *Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli, applicazioni*, Springer, 2004.

[10] Sandro Salsa, Gianmaria Verzini : *Equazioni a derivate parziali: Complementi ed esercizi*, Springer, 2005.

[11] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations, Second Edition*, American Mathematical Society, 2010.

[12] Michael Renardy, Robert C. Rogers *An Introduction to Partial Differential Equations, Second Edition*, Springer, 2004.