

Capítulo 6

Modulación Angular

Introducción

Recuérdese que el proceso de modulación consiste en variar algunos de los parámetros de una portadora, generalmente senoidal, de acuerdo a una señal de información o señal moduladora. En el caso de modulación angular, se hace variar la frecuencia o la fase de la portadora. Así la modulación angular tiene dos variantes: modulación de frecuencia (FM) y modulación de fase (PM). En ambos casos, la amplitud de la portadora se mantiene constante. Por esta razón a estos tipos de modulación se les designa también como de *envolvente constante*, en tanto que a la modulación de amplitud se le designa como de *envolvente variable*. A veces a la modulación angular se le designa también como *modulación exponencial*. Las versiones digitales de la modulación angular son las diversas variantes de FSK¹ y PSK².

6.1 Conceptos generales

La expresión general para una portadora sin modulación puede escribirse como:

$$v(t) = V_c \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (6.1)$$

Donde:

$v(t)$ = Valor instantáneo del voltaje.

V_c = Amplitud máxima.

ω = Frecuencia angular en rad/s.

ϕ = Angulo de fase en radianes.

La frecuencia angular ω se interpreta aquí como *frecuencia angular instantánea* y la fase como *fase instantánea*. Es decir, la frecuencia y la fase pueden variar instantáneamente de acuerdo con la señal moduladora. De acuerdo a esto, puede definirse la frecuencia de la portadora como:

$$\omega(t) = \omega_c + k_1 f(t) \quad (6.2)$$

Ahora bien, se presentan algunas dificultades si a partir de la expresión (6.1) tratamos de expresar matemáticamente la señal resultante de la modulación en frecuen-

¹ *Frequency Shift Keying.*

² *Phase Shift Keying.*

cia ya que, en general se habla de la frecuencia de una señal senoidal cuando la frecuencia es constante y la señal persiste todo el tiempo. Por esta razón es más conveniente definir una función senoidal generalizada de forma:

$$f_c(t) = A \cos \phi(t) \quad (6.3)$$

La elección de la función coseno en lugar de seno es puramente arbitraria y la única razón es que el manejo de aquella es más cómodo, aún cuando en ambos casos se llega a los mismos resultados.

En (6.3), $\phi(t)$ es el ángulo instantáneo de fase de la señal. Ahora bien, la fase instantánea y la frecuencia instantánea están relacionadas mediante:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (6.4)$$

e, inversamente,

$$\phi(t) = \int \omega(t) dt \quad (6.5)$$

y, para una señal de frecuencia constante $\omega_c = 2\pi f_c$ se tiene:

$$\phi(t) = \int \omega_c(t) dt = \omega_c t + \phi_0 \quad (6.6)$$

Donde ϕ_0 es la constante de integración y representa la fase inicial de la señal de frecuencia angular ω_c . Si la integral se hace definida en el intervalo $(0, t)$, entonces $\phi_0 = 0$, de modo que podemos omitirla sin pérdida de generalidad.

6.2 Modulación de fase

Si ahora se hace variar la fase instantánea $\phi(t)$ de acuerdo a una señal de información $f(t)$, se tendrá:

$$\phi(t) = \omega_c t + k_2 f(t) \quad (6.7)$$

Substituyendo (7) en la ecuación general (3) se tiene, para la *modulación de fase*:

$$f_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + k_2 f(t)] \quad (6.8)$$

6.3 Modulación de frecuencia

También puede hacerse variar la frecuencia de la portadora en la forma definida por la expresión (6.2). Para obtener una expresión similar a (6.8), es necesario obtener $\phi(t)$ utilizando (6.5):

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t [\omega_c + k_1 f(t)] dt \\ &= \omega_c t + k_1 \int_0^t f(t) dt\end{aligned}\quad (6.9)$$

Substituyendo ahora esta expresión en (6.3), se tiene la siguiente expresión para la modulación en frecuencia:

$$f_{FM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_1 \int_0^t f(t) dt \right] \quad (6.10)$$

Las ecuaciones (6.8) y (6.10) son muy parecidas, excepto que en la expresión para la señal modulada en frecuencia aparece la integral de $f(t)$, la señal moduladora, en lugar de la función sola. Esto conduce a pensar que es posible generar una señal modulada en frecuencia a partir de una señal modulada en fase, si previamente se integra la señal de información $f(t)$. En otras palabras, la diferencia entre la modulación de frecuencia y la de fase es únicamente un integrador en el circuito de modulación. Este procedimiento se conoce como *método indirecto* de generación de FM.

Las ecuaciones (6.8) y (6.10) proporcionan la base para analizar los dos tipos de modulación angular desde un punto de vista general. Para simplificar el análisis supondremos que la señal de información $f(t)$ es de forma:

$$f(t) = a \cos \omega_m t \quad (6.11)$$

Substituyendo (6.11) en (6.8) y (6.10) se tiene, para la modulación de fase,

$$f_{PM}(t) = A \cos [\omega_c t + k_2 a \cos(\omega_m t)] \quad (6.12)$$

y, para la modulación en frecuencia,

$$f_{FM}(t) = A \cos [\omega_c t + k_1 a \text{sen}(\omega_m t)] \quad (6.13)$$

Donde, en las expresiones anteriores:

A es la amplitud de la portadora. Obsérvese que, a diferencia de AM, la amplitud de la portadora es constante en la modulación angular.

k_1 y k_2 son constantes y a es, en ambos casos, la amplitud de la señal moduladora.

$\omega_c = 2 \pi f_c$ es la frecuencia angular de la portadora *sin modulación*. En FM y PM a la frecuencia de la portadora sin modulación se le designa como *frecuencia central*.

En la práctica es muy difícil, por no decir que no es posible, distinguir en un osciloscopio entre una señal modulada en fase y una modulada en frecuencia, a diferencia de las señales moduladas en amplitud que pueden distinguirse claramente. En la figura 6.1 se ilustra la diferencia entre una señal modulada en amplitud y una modulada en frecuencia.

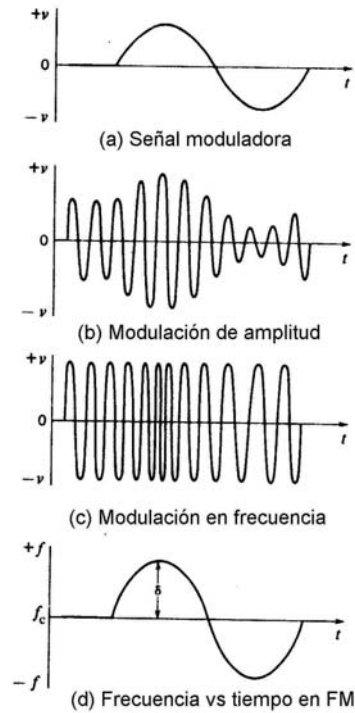


Fig. 6.1. Formas de onda en AM y FM.

Es importante notar que la modulación de fase siempre lleva implícita la modulación de frecuencia y viceversa. Es decir, los dos tipos de modulación ocurren simultáneamente.

De (6.12) se ve que:

$$\phi(t) = \omega_c t + k_2 a \cos(\omega_m t) \quad (6.14)$$

de modo que la frecuencia instantánea estará dada por:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_c + k_2 a \omega_m \cos(\omega_m t) \quad (6.15)$$

Y si ahora se define $m = k_2 a$:

$$\omega(t) = \omega_c + m\omega_m \cos(\omega_m t) \quad (6.16)$$

Con lo que la ecuación para la modulación de fase (6.12) queda ahora como:

$$f_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + m \cos(\omega_m t)] \quad (6.17)$$

Y m se define ahora como *índice de modulación de fase* o amplitud de la desviación de fase.

De (6.16) se ve que la magnitud de la desviación de frecuencia de la portadora (frecuencia central), correspondiente a la desviación de fase m es:

$$\Delta\omega = m\omega_m \quad (6.18)$$

Integrando (6.16) y substituyendo en (6.3) se obtiene una expresión equivalente a la (6.14), ahora en términos de la desviación de frecuencia:

$$f_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] \quad (6.19)$$

Donde:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \quad (6.20)$$

se define como *índice de modulación de frecuencia*.

Del análisis anterior se desprenden varias conclusiones muy importantes para la modulación angular:

- a) La amplitud de una señal modulada en frecuencia o en fase, es constante. Por consecuencia, a diferencia de AM, la potencia de salida de un transmisor de FM o PM es constante, independientemente del índice de modulación. Por esta razón, la modulación angular se designa también como de *envolvente constante*.
- b) La *frecuencia* de la señal modulada varía proporcionalmente a la *amplitud* de la señal moduladora y *no de su frecuencia*.
- c) La *rapidez* de la desviación de frecuencia depende de la frecuencia de la señal moduladora. En otras palabras, cuanto ma-

por sea la frecuencia de la señal moduladora, más rápidamente se desviará la frecuencia de su valor central.

- d) Para PM, si el índice de modulación m se mantiene constante, la magnitud de la desviación de frecuencia, $\Delta\omega$, es proporcional a la frecuencia de la señal moduladora, ω_m .
- e) Para FM, si la desviación de frecuencia, $\Delta\omega$, se mantiene constante, el índice de modulación, β , es proporcional a la frecuencia de la señal moduladora, ω_m .

La situación anterior se ilustra en la figura 6.2.

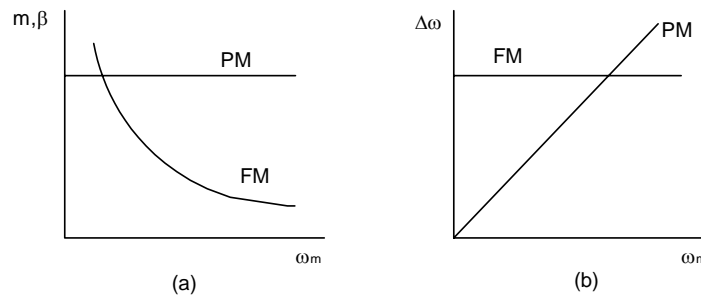


Fig.6.2. Índice de modulación y desviación de frecuencia en función de la frecuencia de la señal moduladora.

6.4 Espectro de frecuencias en modulación angular

El espectro de frecuencias en la modulación de frecuencia es completamente diferente al que resulta de la modulación de amplitud y se puede obtener a partir de la expresión (6.19). El análisis es similar para la modulación de fase.

$$f_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)] \quad (6.21)$$

que puede expandirse como:

$$f_{FM}(t) = A \cos \omega_c t \times \cos(\beta \sin \omega_m t) - A \sin \omega_c t \times \sin(\beta \sin \omega_m t) \quad (6.22)$$

En el caso de AM es fácil ver que el espectro de la señal modulada contiene dos bandas laterales. En el caso de FM la situación es más compleja desde el punto de vista matemático, ya que la expresión (6.22) contiene funciones del tipo $\sin(\sin x)$ y $\cos(\cos x)$ y la solución puede darse sólo en términos de una serie infinita de *funciones de Bessel*. En realidad, aquí no es importante entrar en el tratamiento de

estas funciones, basta decir que el desarrollo de la expresión (6.22) puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 f_{FM}(t) = A \{ & J_0(\beta) \text{sen } \omega_c t + J_1(\beta) [\text{sen}(\omega_c + \omega_m)t - \text{sen}(\omega_c - \omega_m)t] \\
 & + J_2(\beta) [\text{sen}(\omega_c + 2\omega_m)t - \text{sen}(\omega_c - 2\omega_m)t] \\
 & + J_3(\beta) [\text{sen } \omega_c + 3\omega_m)t - \text{sen}(\omega_c - 3\omega_m)t] \\
 & + \dots \}
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

Las funciones $J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$, $J_2(\beta)$... $J_n(\beta)$ son funciones de Bessel³ de primera clase, orden n y argumento β .

De (6.23) se ve que la señal modulada en frecuencia (o fase) contiene un número teóricamente infinito de bandas laterales de amplitudes $AJ_n(\beta)$, separadas de la frecuencia central $n\omega_m$, de modo que para evaluar la amplitud de una banda lateral determinada, es necesario conocer el valor de la función de Bessel correspondiente. En la Tabla 1 se dan los valores de las funciones Bessel de orden 0 a 16, para valores del argumento β de 0 a 15 y, en la figura 6.3, se muestra la gráfica de las funciones de Bessel de orden 1 a 8, que corresponden a las amplitudes de las primeras ocho bandas laterales para diferentes índices de modulación.

Tabla 1. Funciones de Bessel de primera clase y orden 0 a 8.

β	Orden																
	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}	J_{16}
0.00	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.25	0.98	0.12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.5	0.94	0.24	0.03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.5	0.05	0.50	0.45	0.22	0.07	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3.0	0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.0	0.40	0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5.0	0.18	0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-
6.0	0.15	0.28	0.24	0.11	0.36	0.36	0.25	0.13	0.06	0.02	-	-	-	-	-	-	-
7.0	0.30	0.00	0.30	0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02	-	-	-	-	-	-
8.0	0.17	0.23	0.11	0.29	0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03	-	-	-	-	-

³ Para un tratamiento más amplio de estas funciones, consúltese por ejemplo, *Introduction to Bessel Functions*. Frank Bowman. Dover Publications, Inc. N. York, 1958 o *Handbook of Mathematical Functions*. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Dover Publications, 1965.

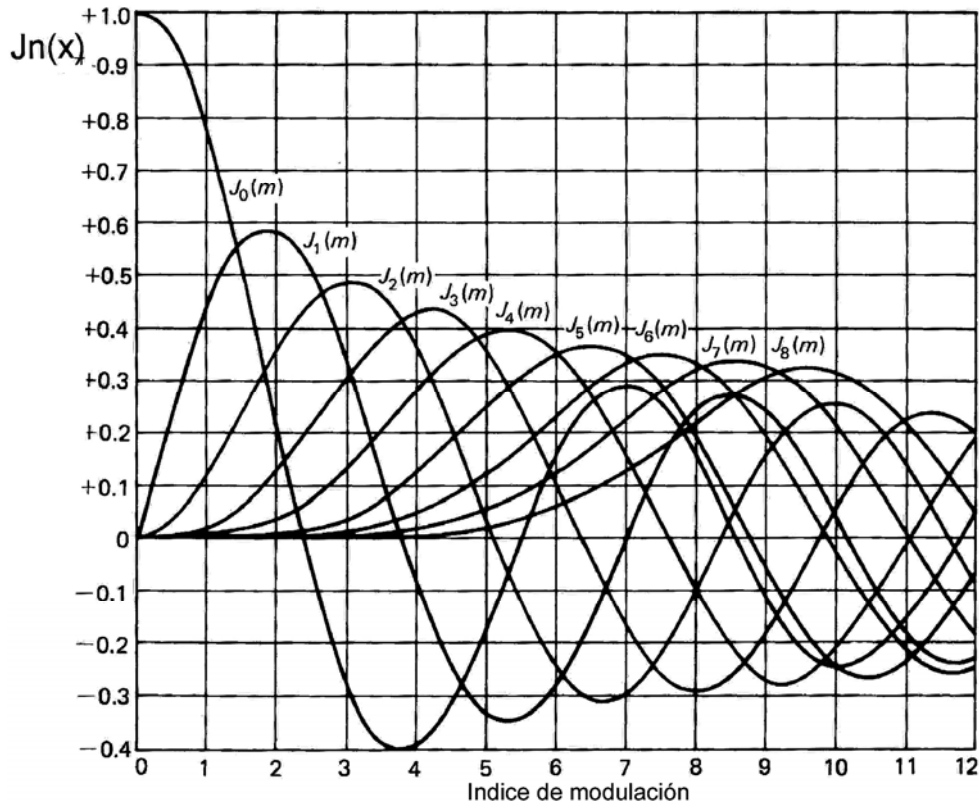


Fig. 6.3. Amplitudes de la portadora y de las primeras ocho bandas laterales para índices de modulación de 0 a 12.

De lo anterior se pueden extraer varias conclusiones importantes.

1. Los coeficientes J_n decrecen al aumentar el índice de modulación y toman valores positivos y negativos. La forma de decrecimiento no es simple. Cada coeficiente representa la amplitud de un par de bandas laterales particulares. Debido al decrecimiento de los coeficientes, la amplitud de las bandas laterales disminuye al aumentar el índice de modulación.
2. Las bandas laterales separadas la misma distancia de la frecuencia central f_c tienen amplitudes iguales. El espectro es simétrico alrededor de la frecuencia central.
3. Los valores negativos de los coeficientes significan que, para ese par de bandas particulares, hay un cambio de fase de 180° .

4. El coeficiente J_0 representa la amplitud de la portadora. En la gráfica de la figura 2 se ve que hay ciertos valores del índice de modulación para los cuales la portadora vale cero, en otras palabras, desaparece y sólo se tienen bandas laterales. A diferencia de AM, en FM la amplitud de la portadora no es constante. Los valores a los que la portadora desaparece completamente se designan como *eigenvalores*
5. Observando los valores de la Tabla 1, se ve que, según aumenta el índice de modulación, también aumenta el coeficiente particular ($n > 0$). Teniendo en cuenta que el índice de modulación es inversamente proporcional a la frecuencia de la señal moduladora, se ve que la amplitud relativa de las bandas laterales distantes aumenta cuando disminuye la frecuencia de la señal moduladora (esto, en el caso de que el voltaje de modulación se mantenga constante).
6. En AM, al aumentar el índice o profundidad de modulación, aumenta la potencia en las bandas laterales y, por consecuencia la potencia total transmitida. En FM, la potencia total transmitida se mantiene siempre constante, pero si aumenta el índice modulación, aumenta el número de bandas laterales y, por consecuencia, el ancho de banda necesario para mantener una transmisión sin distorsión.
7. En teoría, el ancho de banda necesario para la transmisión en FM es infinito. En la práctica, el ancho de banda utilizado es en el que está contenido del orden del 99% de la energía de la señal modulada.

Un aspecto que se debe tener en cuenta, es que el hecho de que la componente espectral correspondiente a la portadora, es decir la componente a la frecuencia central, varíe su amplitud en función del índice de modulación, no significa que la portadora está modulada en amplitud. De hecho, en FM no puede hablarse de portadora, ya que estrictamente, la portadora en FM es la suma de todas las componentes espectrales. Dicha suma da como resultado una señal de amplitud constante. En otras palabras, la portadora en FM puede considerarse como la señal compleja total y, por tanto no es senoidal. El hecho de que la amplitud de la componente a la frecuencia central tome valores de cero a determinados índices de modulación, permite hacer énfasis en que es la componente senoidal a la frecuencia central la que desaparece, *pero no la señal modulada*.

6.5 Potencia promedio en FM

Los voltajes raíz cuadrático medios de las componentes espectrales de una señal modulada en frecuencia pueden expresarse como:

$$V_n = J_n(\beta)V_c \quad (6.24)$$

Donde V_c es el voltaje de la portadora (frecuencia central) sin modulación.

Si se supone que el voltaje de la señal modulada se aplica a una resistencia de valor R , la potencia efectiva o promedio de una componente espectral es:

$$P_n = \frac{V_n^2}{R} \quad (6.25)$$

Teniendo en cuenta que sólo hay una componente espectral a la frecuencia central y dos conjuntos de componentes simétricas a cada una de las demás frecuencias, la potencia promedio total de la señal modulada será:

$$P_{FM} = P_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (6.26)$$

Con lo que, utilizando las relaciones (6.25) y (6.26) se tiene que:

$$P_{FM} = P_c \left\{ [J_0(\beta)]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(\beta)]^2 \right\} \quad (6.27)$$

Una propiedad importante de las funciones de Bessel es que:

$$[J_0(\beta)]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(\beta)]^2 = 1 \quad (6.28)$$

De modo que la potencia efectiva total de la señal modulada es igual a la potencia efectiva de la portadora sin modulación. Este resultado se intuye en cierta forma, si se tiene en cuenta que la amplitud de la señal es la misma ya sea que esté modulada o no. Esto se puede interpretar de otra forma: cuando se modula en frecuencia a una portadora, la potencia total de la portadora sin modulación se redistribuye entre todas las componentes del espectro, de ahí que la amplitud de la portadora original disminuya según varíe el índice de modulación.

En las expresiones (6.26) y (6.27), el límite superior de la suma es infinito, ya que también en teoría, el número de bandas laterales en FM es infinito. En la práctica, el límite superior de la suma es igual al número de bandas significativas que con-

tribuyen a que la potencia de la potencia de la señal modulada sea del orden del 99% de la potencia total, con lo que se garantiza una transmisión prácticamente sin distorsión.

6.6 Ancho de banda en FM

Según se mencionó, en teoría, el número de bandas laterales en FM es infinito, lo que haría impensable un sistema de comunicaciones que requiriese un ancho de banda de esa naturaleza. Esta fue una de las principales razones por las que la modulación en frecuencia tardó bastante más en emplearse que la modulación de amplitud, aunque sus principios teóricos eran ya conocidos en la segunda década del siglo XX. Sin embargo, la experiencia indica que el ancho de banda requerido, en el caso de señales tanto senoidales como no senoidales, está determinado por la máxima desviación de frecuencia y la máxima frecuencia de la señal moduladora. Esta *relación de desviación* está dada por (6.20). El ancho de banda de la señal modulada, en estas condiciones, está dado por:

$$\begin{aligned} B_{FM} &= 2(\beta + 1)B_m \\ &= 2(\Delta f + B_m) \end{aligned} \quad (6.29)$$

En la fórmula anterior, B_m es el ancho de banda máximo de la señal moduladora y no estrictamente la frecuencia máxima de ésta. Esta definición, que utiliza B_m en lugar de f_m , obedece hay que hay casos, como en telefonía multicanal o múltiplex, la señal moduladora ocupa un ancho de banda entre 60 KHz y 4 MHz, por lo que el ancho de banda es menor que si la banda ocupara desde cero a la frecuencia máxima.

La expresión anterior se conoce como *regla de Carson*. Esta regla proporciona el ancho de banda de la señal modulada en frecuencia con razonable exactitud cuando β es mucho mayor que 1, pero falla cuando β es cercano a 1 o menor. Por ejemplo, la regla de Carson no es válida en el caso de FM de banda estrecha.

En FM de banda estrecha, en que $\Delta f \ll B_m$, el ancho de banda de la señal modulada es, aproximadamente $B_{FM} \approx 2B_m$. Por otra parte, en FM de banda ancha, $\Delta f \gg B_m$ y $B_{FM} \approx 2\Delta f$. Es importante recalcar que, en teoría, el ancho de banda de una señal modulada en frecuencia es infinito y que los anchos de banda anteriores corresponden a un contenido de energía de 98 a 99% de la energía total de la señal.

Ejemplo

Estimar el ancho de banda requerido por un sistema de radiodifusión sonora de FM, que transmite señales de audio en la banda de 20 Hz a 15 KHz, con una desviación máxima de frecuencia de 75 KHz, de modo que se transmita aproximadamente el 99% de la potencia de la señal modulada cuando la frecuencia de la señal moduladora es de 15 KHz.

Solución

Si se supone que la modulación es por una señal senoidal, la forma de la señal modulada está dada por (6.19):

$$f_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + \beta \text{sen}(\omega_m t)]$$

Donde β es el índice de modulación dado por:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

En este caso, $\Delta f = 75$ KHz y $f_m = 15$ KHz, con lo que $\beta = 75/15 = 5$.

De la expresión (6.23), para la señal modulada en frecuencia, en términos de las funciones de Bessel, y utilizando los valores de dichas funciones para $\beta = 5$, dados en la Tabla 1, se tiene que las amplitudes relativas del voltaje y potencia para las diversas componentes espectrales son:

Portadora:	$J_0(5) = -0.18$	$[J_0(5)]^2 = 0.0324$
$f_c \pm f_1$	$J_1(5) = -0.33$	$2 \times [J_1(5)]^2 = 0.218$
$f_c \pm f_2$	$J_2(5) = 0.05$	$2 \times [J_2(5)]^2 = 0.005$
$f_c \pm f_3$	$J_3(5) = 0.36$	$2 \times [J_3(5)]^2 = 0.2592$
$f_c \pm f_4$	$J_4(5) = 0.39$	$2 \times [J_4(5)]^2 = 0.3042$
$f_c \pm f_5$	$J_5(5) = 0.26$	$2 \times [J_5(5)]^2 = 0.1352$
$f_c \pm f_6$	$J_6(5) = 0.13$	$2 \times [J_6(5)]^2 = 0.0338$

La fracción de la potencia total contenida en estos seis pares de bandas laterales y la portadora es:

$$P_{FM} = [J_0(5)]^2 + \sum_{n=1}^6 2[J_n(5)]^2 = 0.9878$$

El resultado anterior puede considerarse suficientemente bueno, ya que como se observa de la Tabla 1, la contribución de las bandas laterales superiores a la 6ª es muy poco significativo. De acuerdo a esto, el 98.78% de la potencia está contenido en las primeras seis bandas laterales. Por consecuencia, el ancho de banda necesario es:

$$B_T = 2 \times 6 \times 15 \text{ KHz} = 180 \text{ KHz.}$$

De lo anterior se pueden resumir algunas ideas relativas a la modulación de frecuencia:

1. El espectro de una señal modulada en frecuencia contiene un componente de la portadora y un número infinito de bandas laterales localizadas simétricamente respecto a la portadora, a frecuencias f_m , $\pm 2f_m$, $\pm 3f_m$, ...etc. En este aspecto, la modulación de frecuencia es completamente diferente a la de amplitud en que, como máximo, solo se tienen dos bandas laterales.
2. Para el caso especial de β mucho menor que la unidad, sólo los coeficientes de Bessel $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$ tienen valores significativos, de modo que la señal modulada en frecuencia está compuesta por la portadora y únicamente dos bandas laterales a $f_c \pm f_m$. Esta situación corresponde a un caso especial de FM, designado como *FM de banda estrecha* y no debe confundirse con la modulación de amplitud.
3. En FM, la envolvente de la señal modulada es constante, en tanto que en AM la envolvente es variable. En FM la información está contenida en la desviación de frecuencia, que depende de la *amplitud* de la señal moduladora y en la rapidez de dicha desviación, que a su vez, depende de la *frecuencia* de la señal moduladora.
4. La amplitud de la portadora varía de acuerdo a $J_0(\beta)$ y, a diferencia de AM, la amplitud de la portadora en FM depende del índice de modulación β . La explicación física de esta propiedad estriba en el hecho de que la amplitud de la señal modulada en frecuencia es constante, de modo que la potencia promedio de una señal de FM también es constante. Cuando se modula en frecuencia a la portadora, la potencia de las bandas laterales se obtiene a expensas de la potencia original de la portadora, haciendo, por consecuencia, que la amplitud de la portadora varíe en función de β y pudiendo, incluso ser cero para ciertos valores de β . La potencia promedio de una señal modulada en frecuencia está dada por la relación:

$$P = \frac{1}{2} V_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) \quad (6.30)$$

En que V_c es el voltaje pico de la portadora sin modulación y:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (6.31)$$

La potencia total en FM se reduce a:

$$P = \frac{1}{2} V_c^2 \quad (6.32)$$

En la figura 6.4 se muestra el espectro discreto de amplitud, de una señal modulada en frecuencia, normalizada con respecto a la amplitud de la portadora, para el caso de una señal moduladora de frecuencia fija y amplitud variable. Como se puede apreciar, la desviación de frecuencia y, por consecuencia, el ancho de banda de la señal modulada, aumenta con la amplitud de la señal moduladora, es decir, con el índice de modulación β .

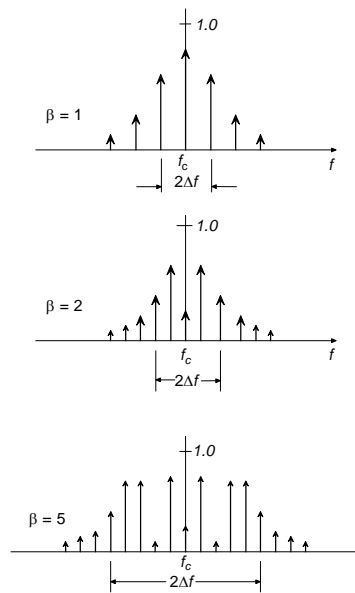


Fig. 6.4. Espectro de una señal de FM, para una señal moduladora de frecuencia constante y amplitud variable.

Análogamente, en la figura 6.5 se muestra el espectro de una señal modulada en frecuencia, en que ahora, la señal moduladora tiene amplitud constante y frecuencia variable. En este caso, la desviación de frecuencia, Δf , es constante y por consecuencia, también el ancho de banda significativo, $2\Delta f$.

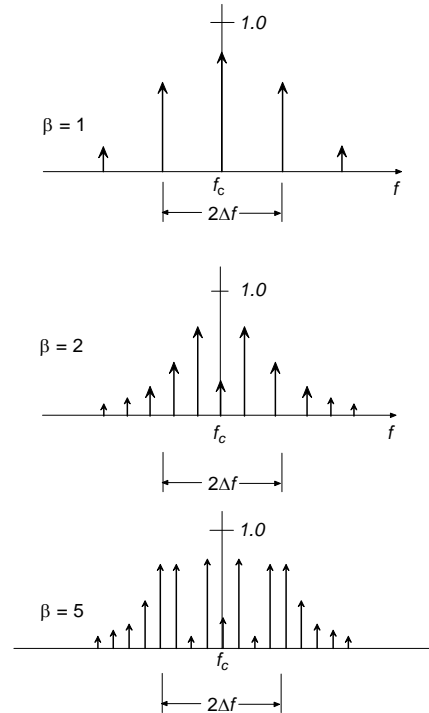


Fig. 6.5. Espectro de una señal modulada en FM, para una señal moduladora de amplitud constante y frecuencia variable.

6.7. FM de Banda Estrecha

Cuando el índice de modulación es pequeño, es decir, $\beta \ll 1$, la expresión en serie puede aproximarse por:

$$\begin{aligned} \cos[\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)] &\approx 1 \\ \operatorname{sen}[\beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)] &\approx \beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (6.33)$$

que puede reescribirse como:

$$v_c(t) = A \left\{ \cos(2\pi f_c t) - \frac{\beta}{2} \cos[2\pi(f_c - f_m)t] + \frac{\beta}{2} \cos[2\pi(f_c + f_m)t] \right\} \quad (6.34)$$

Que equivale a una señal de AM completa, con un defasamiento de 180° en la banda lateral inferior. El ancho de banda es, en este caso, el mismo que en AM completa, es decir, el doble del ancho de banda de la señal moduladora. Este esquema de modulación se designa como FM de banda estrecha.

Según aumenta el valor del índice de modulación, β , aumenta también el número de bandas laterales, lo que es resultado de que la modulación en frecuencia no es un proceso lineal, es decir, no hay una relación lineal entre el dominio del tiempo y el de frecuencia.

Las amplitudes de la portadora (frecuencia central) y de las bandas laterales, en número infinito, dependen del valor de β , que es la que determina el valor de la función de Bessel, que expresa la amplitud correspondiente. Es importante hacer notar que, para ciertos valores de β , la amplitud de la portadora es cero; es decir, sólo se tienen las bandas laterales. Aunque en FM, el número de bandas laterales, como se mencionó antes, es infinito, en la práctica el espectro de una señal modulada en FM se limita a un ancho de banda en que la energía de la señal es del orden del 99% de la energía de la señal en banda base. Esta es una aproximación válida, ya que la distorsión que se introduce en la señal transmitida no es significativa.

6.8 Circuitos moduladores de frecuencia

Para generar una señal modulada en frecuencia debe utilizarse un oscilador *cuya frecuencia varíe según la amplitud de la señal de información*, de modo que es necesario que alguno de los elementos del oscilador debe variar su *reactancia*, según la señal de información. En los principios de la modulación en frecuencia se utilizaron válvulas al vacío configuradas en un circuito que actuaba como una reactancia variable según el voltaje de la señal, constituyendo así un *oscilador de reactancia variable* (VCO⁴). En los circuitos transmisores actuales, se utilizan con frecuencia VCO integrados y bien sea que se trate de circuitos con elementos discretos o integrados, el VCO suele ir seguido de un amplificador que actúa como *buffer*⁵ para producir el aislamiento entre el oscilador y la carga y mantener la estabilidad de frecuencia. La señal modulada en frecuencia se amplifica hasta obtener el nivel deseado de potencia a la salida. Los amplificadores de potencia en FM pueden funcionar en clase C y cerca de la saturación para conseguir la máxima eficiencia y, aunque si bien, la potencia en FM es constante al ser constante la envolvente

⁴ La abreviatura significa *Voltage Controlled Oscillator* u oscilador controlado por voltaje.

⁵ En este contexto un *buffer* es un amplificador de alta impedancia de entrada y baja impedancia de salida que actúa como elemento de separación entre el oscilador y la carga, a fin de que las variaciones de ésta no afecten a la frecuencia de oscilación.

de la señal modulada, es necesario algún circuito limitador de picos para mantener constante el nivel de la señal transmitida.

Osciladores controlados por voltaje

Puesto que un VCO requiere de un elemento cuya reactancia varíe de acuerdo a la amplitud instantánea de la señal de entrada, un método simple para controlar su frecuencia es el de utilizar un *varactor* o *varicap*⁶ Un varactor (*variable reactor*), designado también como varicap (*variable capacitor*), es un diodo cuyas propiedades fueron observadas inicialmente por Schottky⁷ y analizadas también por Schockley⁸, particularmente la presencia de una capacidad, alrededor de la unión, sensible al voltaje inverso aplicado al diodo.

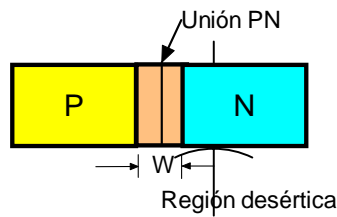


Fig. 6.6. Diodo varactor y símbolo del mismo.

Cuando se aplica a un diodo un voltaje inverso, alrededor de la unión P-N se forma una región desértica⁹ sin carga eléctrica significativa respecto a la carga en las regiones N y P fuera de dicha región desértica, de anchura W , como se muestra en la figura 6.6, de modo que esta región actúa como un dieléctrico entre dos regiones cargadas, constituyendo así un condensador que, si es de placas planas tiene una capacidad dada por:

$$C = \frac{A\varepsilon}{W} \quad \text{fd} \quad (6.35)$$

donde A es el área de las placas en m^2 , $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ es la permitividad del dieléctrico y W la distancia entre las placas en m. En esta geometría simple, de placas planas y paralelas, la capacidad es función únicamente de la distancia entre ellas. En el caso del diodo, puesto que la anchura de la región desértica depende del voltaje inverso aplicado, la capacidad depende del voltaje, del nivel de impurificación del semi-

⁶ Un *varactor* o *varicap* es un diodo que, en polarización inversa varía el ancho de la región desértica alrededor de la unión, según el voltaje aplicado, actuando así como un elemento de capacidad variable.

⁷ Schottky, W. "Simplified and Extended Theory of Boundary Layer Rectifiers", *Z.Physik*, vol 118, pp. 539-592, 1942

⁸ Schockley, W. "The Theory of P-N Junctions in Semiconductors and P-N Junction Transistors". *Bell System Technical Journal*, vol 28, pp. 435-489, July 1949.

⁹ En inglés se designa como *depletion layer*.

conductor y de la geometría de la unión¹⁰. Para una unión N-P abrupta, la capacidad de la región desértica entre las regiones del semiconductor, suponiendo nivel de impurezas constante está dada por¹⁰:

$$C_V(V_R) = \frac{C_{V0}}{\sqrt{1 + \frac{V_R}{V_\phi}}} \quad (6.37)$$

Donde C_{V0} es la capacidad a $V_R = 0$, V_R , el voltaje inverso aplicado al diodo y V_ϕ es un pequeño voltaje positivo de contacto, generalmente menor de 1 V. La expresión anterior tiene algunas variantes⁹ que, para el propósito aquí, no son muy significativas.

Independientemente del nivel de impurificación en el semiconductor, $C_V(V_R)$ decrece monótonicamente según aumenta V_R como se ilustra en la figura 6.7. Esto es de esperar, ya que según aumenta el voltaje inverso, W también aumenta y la capacidad disminuye.

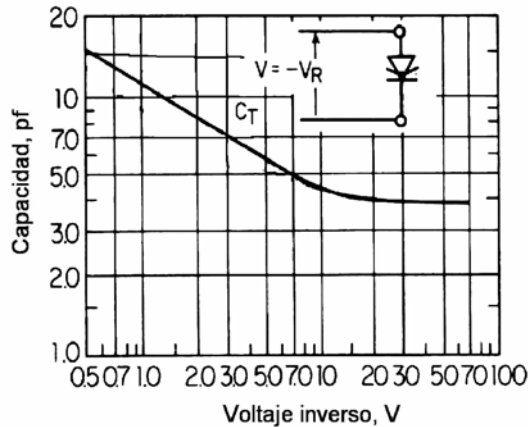


Fig. 6.7. Variación de la capacidad en función del voltaje inverso.

En la figura 6.8, se muestra un circuito modulador de frecuencia, muy sencillo, utilizando dos varactores. En este modulador, el circuito LC constituye el tanque de un oscilador LC. Un método simple de variar la frecuencia de resonancia de ese circuito sintonizado, es emplear varactores, para variar la capacidad total del tanque y, por consecuencia su frecuencia de resonancia según la magnitud del voltaje de señal aplicado a la entrada. La capacidad total del circuito está dada por $C = C_0 + \Delta C$, en que ΔC es la capacidad total de los dos varactores, proporcional a $v_m(t)$, el voltaje de señal.

¹⁰ Giacoletto, L. J. *Solid State Devices*. Sección 10 de *Electronics Designers' Handbook*, 2nd Edition. Ed. L. J. Giacoletto. McGraw-Hill Book Company. 1977.

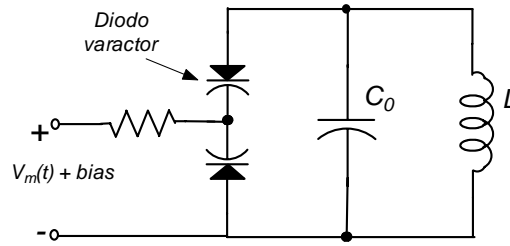


Fig. 6.8. Modulador de frecuencia con dos varactores.

A la entrada del circuito se aplica, además, un voltaje para mantener la polarización inversa de los varactores. La frecuencia angular de resonancia del circuito en estas condiciones está dada por:

$$\omega_{FM} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_0}}} \quad (6.38)$$

Si el cambio en la capacidad es pequeño, es decir, $\Delta C \ll C_0$, la expansión binomial $[1 + \Delta C / C_0]^{-1/2}$, puede aproximarse como $(1 - \Delta C / 2C_0)$, con lo que:

$$\omega_{FM} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left(1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \right) \quad (6.39)$$

La variación de capacidad de los varactores depende del voltaje de señal de modo que $\Delta C = K_V v_m(t)$, por lo que la frecuencia instantánea de la señal modulada en frecuencia puede expresarse ahora como:

$$\omega_{FM} = \omega_0 \left[1 - \frac{K_V v_m(t)}{2C_0} \right] \quad (6.40)$$

o bien:

$$f_{FM} = f_0 [1 - K_C v_m(t)] \quad (6.41)$$

Con lo que la frecuencia de oscilación del circuito resonante queda directamente relacionada con la amplitud de la señal moduladora. En estas condiciones el circuito resonante se puede utilizar como la red determinante de la frecuencia en un oscilador retroalimentado, produciendo, en forma directa, una señal modulada en frecuencia. Este tipo de modulador sólo puede usarse para generar FM de banda estrecha, ya que $\Delta C \ll C_0$, lo que requiere de multiplicación de frecuencia subsecuente para generar FM de banda ancha. El valor máximo del índice de modulación, β , que se puede conseguir con este tipo de modulador LC, es del orden de 0.2, de

modo que para producir FM de banda ancha se requieren varias etapas multiplicadoras. Al multiplicar la frecuencia mediante un dispositivo no lineal, también se multiplica el índice de modulación por el mismo factor.

6.9 Demodulación de Frecuencia

La función principal de un demodulador o detector de frecuencia es generar una señal cuya amplitud sea proporcional a la frecuencia instantánea f_i de la señal modulada en frecuencia. La expresión para una señal modulada en frecuencia es:

$$v_{FM}(t) = A \cos\left(\omega_0 t + K \int_0^t v_m(t) dt\right) \quad (6.42)$$

Si se deriva la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{dv_{FM}(t)}{dt} = -A[\omega_0 + K v_m(t)] \operatorname{sen}\left(\omega_0 t + K \int_0^t v_m(t) dt\right) \quad (6.43)$$

Que es la expresión de una señal modulada en frecuencia, pero cuya envolvente tiene una magnitud proporcional a la amplitud de la señal moduladora $v_m(t)$, que puede recuperarse mediante un detector de envolvente que, ignorará las variaciones de frecuencia de la portadora. Tradicionalmente los demoduladores o detectores de FM aplicaron las propiedades de los circuitos sintonizados para conseguir la derivación deseada, lo que se ilustra en la figura 6.9, en que la frecuencia de resonancia del circuito sintonizado, f_r , se elige, no a la frecuencia central, f_0 de la señal modulada en frecuencia, sino ligeramente desviada, de modo que f_0 caiga sobre la parte lineal de la respuesta del circuito.

La linealidad de un circuito resonante simple como el de la figura está limitada a un rango de frecuencias reducido, que puede extenderse introduciendo un segundo circuito resonante a una frecuencia ligeramente diferente del primero, de modo que entre ambos tengan una respuesta como se ilustra en la figura 6.10.

Cada uno de los circuitos sintonizados se alimenta con fases opuestas, produciendo una característica de transferencia como la mostrada. En este principio se basan algunos de los *discriminadores de frecuencia*, como el que se ilustra en la figura 6.11 y que se designan como *discriminadores balanceados*.

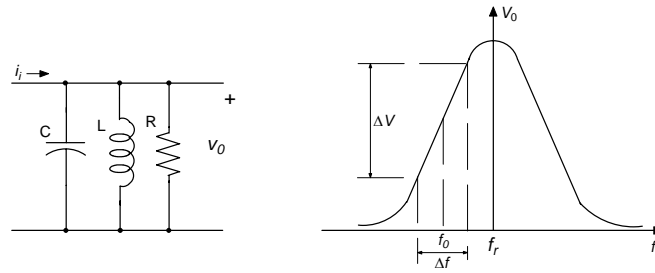


Fig. 6.9. Principio de la demodulación en frecuencia.

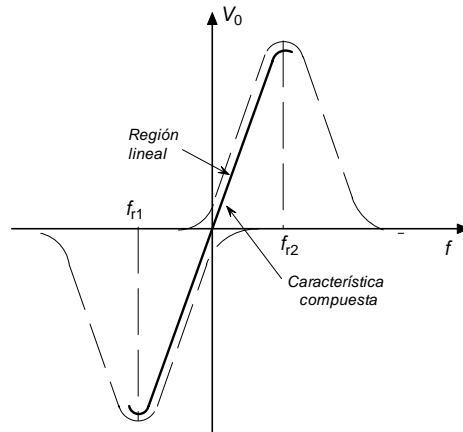


Fig.6.11. Discriminación de frecuencia mediante dos circuitos sintonizados.

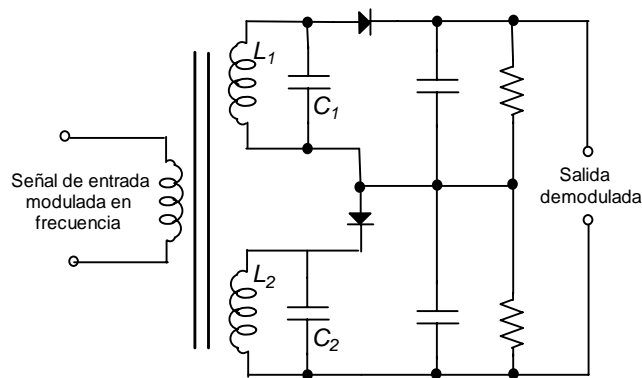


Fig. 6.11. Discriminador balanceado.

La respuesta amplitud-frecuencia de un discriminador balanceado como el de la figura anterior es similar a la de la figura y, en ella, la frecuencia central, es decir la correspondiente a la portadora sin modulación, se sitúa en el centro de los ejes coordenados. Las frecuencias de resonancia de los circuitos sintonizados están desviadas de ésta hacia arriba y hacia abajo, como también se aprecia en la figura 6.11.

Un problema con este tipo de circuitos discriminadores, es que también son sensibles a variaciones de amplitud, por lo que para evitar estas variaciones, previamente la señal modulada en frecuencia pasa por un *limitador*, cuyo efecto se ilustra en las figuras 6.12 y 6.13

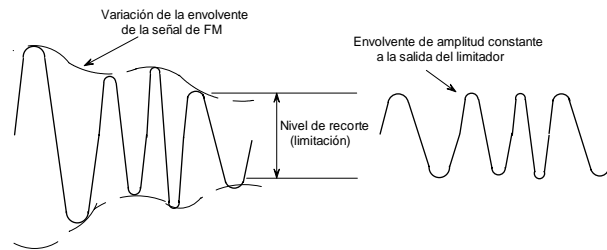


Fig. 6.12. Variaciones de amplitud en una señal modulada en frecuencia.

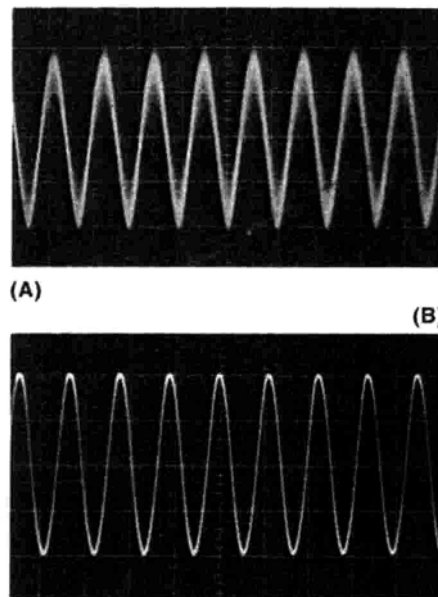


Fig. 6.13. Formas de onda antes (a) y después (b) del limitador.

En la figura 6.14 se ilustra un limitador típico con circuito integrado. La entrada al limitador es la señal de salida del amplificador de frecuencia intermedia en un receptor, con variaciones de amplitud como las mencionadas antes. Su salida, de amplitud constante, es la señal de entrada al discriminador o detector de frecuencia.

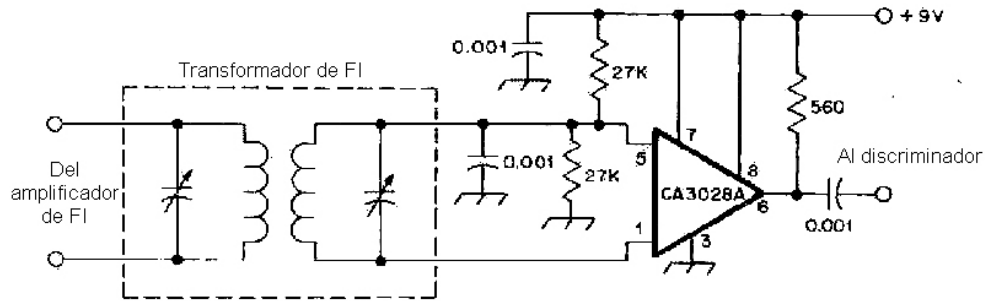


Fig. 6.14. Limitador con circuito integrado.

Las técnicas actuales de demodulación o detección de señales moduladas en frecuencia se basan en el empleo de la tecnología de circuitos integrados, en que por lo general, no se emplean inductancias. El efecto de la limitación de la señal de FM, como se aprecia de la figura anterior, produce de hecho, una señal de pulsos de amplitud constante y frecuencia variable, en la que la frecuencia instantánea se preserva en los *cruces por cero* de la señal pulsante. En la figura 6.15 se ilustra un circuito, completamente digital, basado en la detección de los cruces por cero.

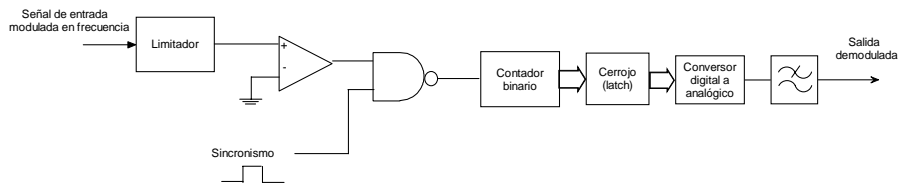


Fig. 6.15. Demodulador digital de FM.

El número de cruces por cero en un intervalo determinado se aplican a la entrada de un contador binario, cuyas salidas se aplican a un convertidor digital-analógico (DAC), cuyo voltaje de salida, ya en el dominio analógico, es proporcional al número de cruces por cero y, por consecuencia, proporcional a la amplitud de la señal moduladora original.

6.10 Ruido en sistemas de FM

La recepción de señales de FM ofrece algunas ventajas respecto a la de AM. Por una parte, el empleo del limitador ayuda a reducir el ruido impulsivo, que se traduce en variaciones de amplitud. Por otra parte, el ruido a la entrada del receptor no puede modular directamente en frecuencia a la portadora incidente, ya que su frecuencia está fijada en un transmisor distante, sin embargo la fase del ruido modula a la portadora en el receptor y esto da lugar a una reducción en la señal de salida comparada con AM. Una ventaja importante en FM es que puede conseguirse mejorar la relación señal a ruido (S/N) en la recepción aumentando la desviación de frecuencia de la señal transmitida, si bien esto conlleva un aumento en el ancho de banda necesario.

En FM el nivel de la portadora o más propiamente, de la componente espectral a la frecuencia central, depende del índice de modulación según $J_0(\beta)$ como puede verse de la expresión (6.23) y hay valores de β , el índice de modulación, para los cuales la amplitud de la portadora es muy pequeña o nula. Cuando esta se reduce a un nivel menor al de *umbral*, la relación S/N se reduce rápidamente. En sistemas de FM es común hablar de la relación portadora a ruido (C/N), para la señal a la salida de la etapa de FI o a la entrada del detector y de la relación S/N para la señal a la salida de éste. La relación entre ambas es como se muestra en la figura 6.17, para un índice de modulación $\beta = 5$.

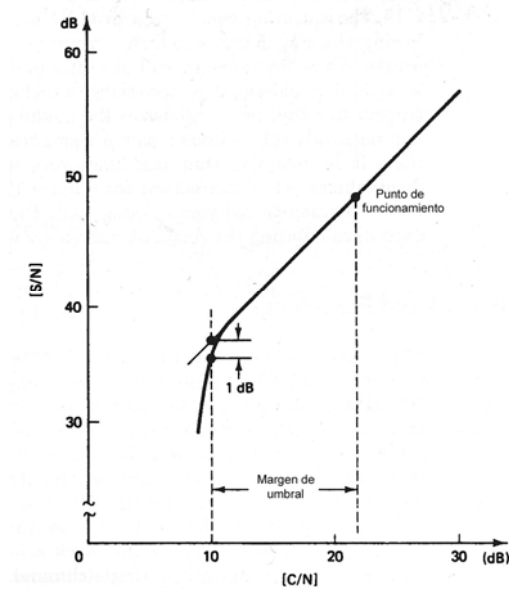


Fig. 6.17. Umbral en FM.

Este umbral es relativamente insensible al índice de modulación y ocurre aproximadamente a $C/N \approx 10$ dB.

6.11 Preénfasis y deénfasis¹¹

En FM la densidad espectral de ruido aumenta en función del cuadrado de la distancia, esto es, a razón de 20 dB/octava, a diferencia de AM en que la densidad espectral es constante. En el espectro de la señal modulada en FM, la mayor parte de la energía está en las componentes de baja frecuencia alrededor de la frecuencia central, de modo que las componentes de alta frecuencia de la señal, de menor amplitud, se ven más afectadas por el ruido.

Para corregir esto, la señal de banda base se *predistorsiona*, aumentando la amplitud de las componentes de alta frecuencia o lo que es equivalente, atenuando las componentes de baja frecuencia, mediante circuitos de *preénfasis* en el transmisor, que acentúan las altas frecuencias y de *deénfasis* que las restauran a su forma espectral original en el receptor. La respuesta de estos circuitos se ilustra en la figura 6.17.

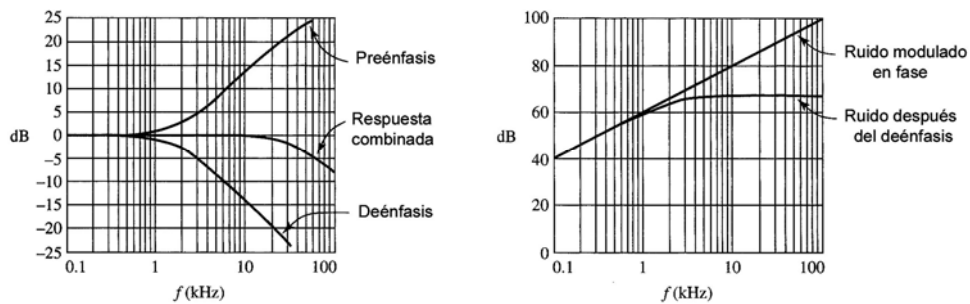


Fig. 6.17. Respuesta de los circuitos de preénfasis y deénfasis.

Como se aprecia en la figura de la izquierda, la respuesta del preénfasis corresponde a la de un filtro de paso alto, en tanto que la del de deénfasis a la de uno de paso bajo, como se muestra en la figura 6.18.

¹¹ También se designan como *preacentuación* y *desacentuación*.

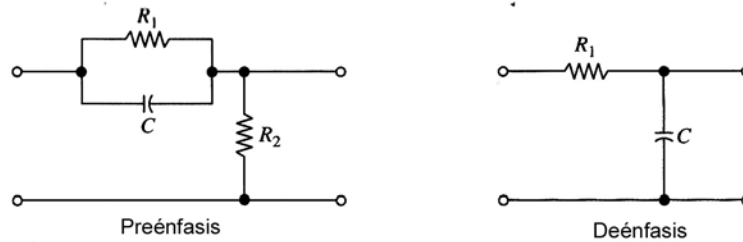


Fig. 6.18. Circuitos simples de preénfasis y deénfasis.

La entrada del circuito de preénfasis es la señal en banda base, antes del modulador. La entrada al circuito de deénfasis es la salida del discriminador y su salida es la señal en banda base con el espectro original antes de la modulación.

Problemas

6.1. Un sistema de FM de banda estrecha transmite una señal senoidal de frecuencia f_m que produce una desviación de frecuencia de la portadora de $0.1f_m$. Estime el ancho de banda necesario y las amplitudes relativas de la portadora y de las bandas laterales significativas.

6.2. Calcular el ancho de banda requerido para la transmisión de 24 señales telefónicas. Cada señal está limitada en banda entre 300 y 3400 Hz, con bandas de guarda efectivas de 0.9 KHz entre canales adyacentes. Se utiliza modulación en banda lateral única y multiplexado por división de frecuencia.

6.3. Una señal de forma $A\cos(\omega_c t)$ sufre interferencia aditiva con una señal $N\cos(\omega_c + \omega_N)t$. Determinar la amplitud resultante y la desviación de frecuencia de las señales combinadas, suponiendo que $A \gg N$. Calcular, además, la potencia de salida normalizada cuando las señal combinada deseada y las de interferencia se procesan mediante:

- Un receptor de AM de sensibilidad tal que, cuando recibe una señal modulada con una profundidad de modulación de $m=1$, su demodulador da 1 V_{pi-co} de salida.
- Un receptor de FM tal que, cuando la desviación de frecuencia de la señal de entrada es f_D , su demodulador entrega una salida de 1 V.
- De lo anterior, demuestre que para la señal interferente en este caso, el receptor de FM es superior al de AM si $f_D/f_m > 1$, donde f_m es la frecuencia máxima de la señal en banda base que pasa por las etapas posteriores a la detección.

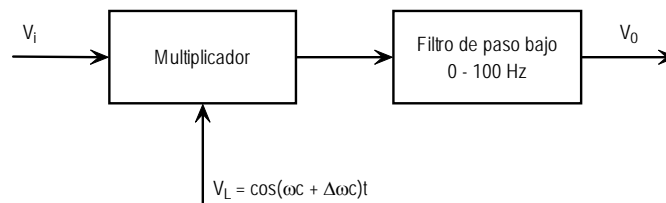
6.4. Una portadora de forma $\cos\omega_c t$ está modulada por una señal de forma $v(t) = m[\cos\omega t + \cos(2\omega t)]$. Obtenga las expresiones correspondientes a la portadora modulada para los casos siguientes:

- AM completa.
- FM, asumiendo que una señal con amplitud de 1 V produce una desviación de frecuencia de K Hz.
- Modulación de fase, suponiendo que una señal con amplitud de 1V produce una desviación de fase de M radianes.

6.5. En la figura siguiente se muestran los elementos básicos de un demodulador para un sistema de radiotelegrafía. Determinar y dibujar la forma de onda del voltaje de salida v_0 para:

- Cuando la portadora local reinsertada es ω_c ; es decir $\Delta\omega_c = 0$.
- Cuando $\Delta f_c = +20$ Hz.

La señal de entrada es de forma: $v_i(t) = [\cos(\omega_1 t - 0.25\cos(3\omega_1 t))\cos(\omega_c t)]$, y $f_1 = 25$ Hz.



6.6. Una portadora de 15 w se modula en frecuencia con una señal senoidal, tal que la desviación pico es de 6 kHz. La frecuencia de la señal moduladora es 1 kHz. Calcular la potencia de salida sumando las potencias de todas las bandas laterales.

6.7. Calcular el ancho de banda necesario para un sistema de radiodifusión de FM en que la máxima desviación permitida es ± 75 KHz y la máxima frecuencia de la señal moduladora no puede exceder los 15 kHz.

