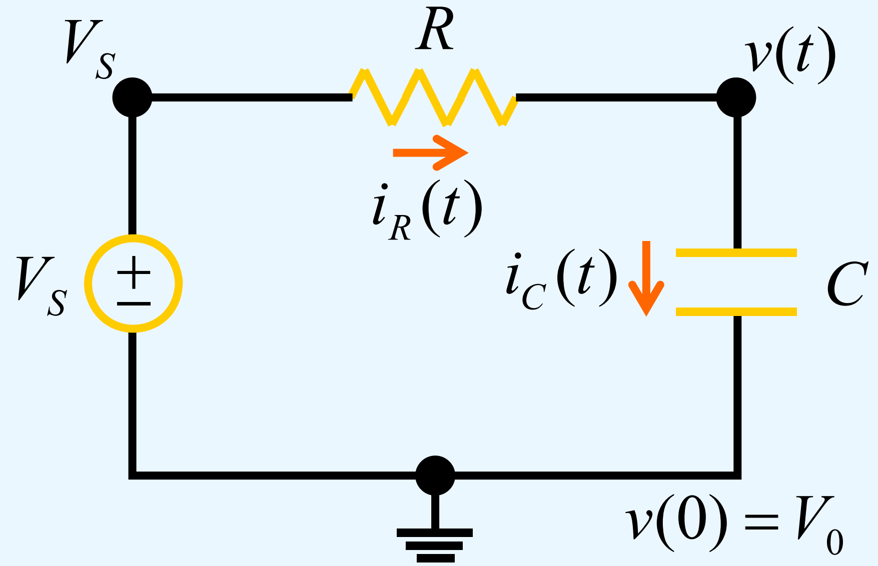
Tema 5. Análisis Transitorio de Circuitos de Primer y Segundo Orden



Bibliografía Básica para este Tema:

[1] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, "Fundamentos de circuitos eléctricos", McGraw-Hill.

[2] R. C. Dorf, J. A. Svoboda, "Introduction to electric circuits", John Wiley & Sons.

Sadiku → Temas 7 y 8

Dorf → Tema 8 y 9

- Esta presentación se encuentra, temporalmente, en:

http://personales.unican.es/peredaj/AC.htm

5.1 Introducción

- En este tema se consideran circuitos que contienen diversas combinaciones de dos o tres elementos pasivos (R, L, C)
- En la primera parte del tema se examinan dos tipos de circuitos simples:
  1) el circuito con una resistencia y un condensador (circuito RC)
  2) el circuito con una resistencia y una bobina (circuito RL)
- Los circuitos RC y RL se analizarán aplicando las leyes de Kirchhoff.
- El análisis de circuitos resistivos da como resultado ecs. algebraicas. Sin embargo, los circuitos RC y RL producen ecs. diferenciales.
- Las ecs. diferenciales resultantes del análisis de circuitos RC y RL son de primer orden. Por ello, se les denomina <u>Circuitos de Primer Orden</u>
- Estudiaremos tanto circuitos con fuentes independientes como circuitos sin fuentes independientes.
- Cuando no hay fuentes independientes, las tensiones y corrientes en el circuito se deben a las condiciones iniciales en el condensador o en la bobina (a la energía inicialmente almacenada en ellos).

5.1 Introducción

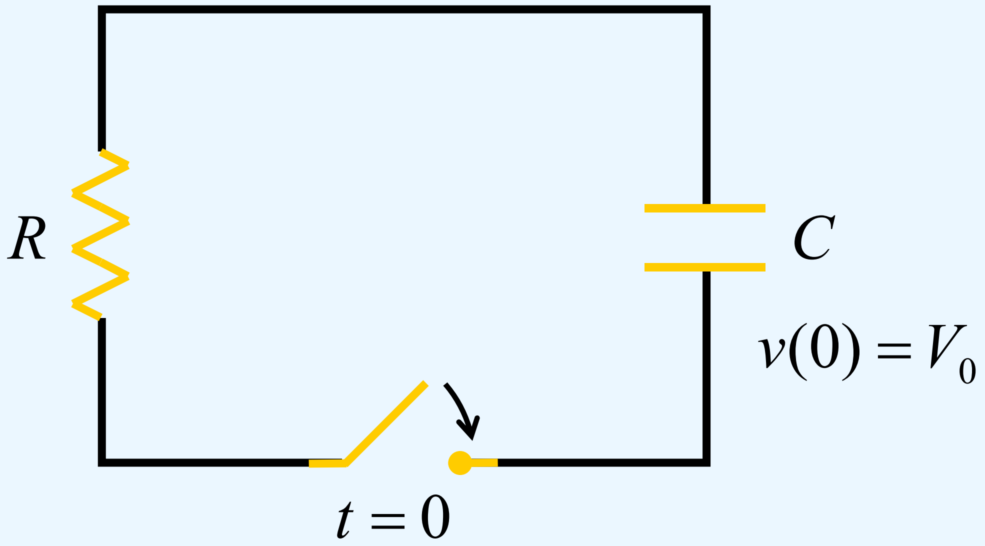
- En la segunda parte del tema se estudiarán circuitos que tienen dos elementos de almacenamiento.
- A estos circuitos se les conoce como Circuitos de Segundo Orden porque se describen mediante ecs. diferenciales que contienen derivadas segundas
- En concreto, estudiaremos la respuesta de circuitos RLC, tanto con fuente independiente como sin ella.

5.2 Circuitos RC sin fuentes

- Descarga de un condensador a través de una resistencia:

  - Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$

  - Conectamos el condensador a una resistencia R a través de un interruptor como se muestra en la figura (circuito RC sin fuentes)

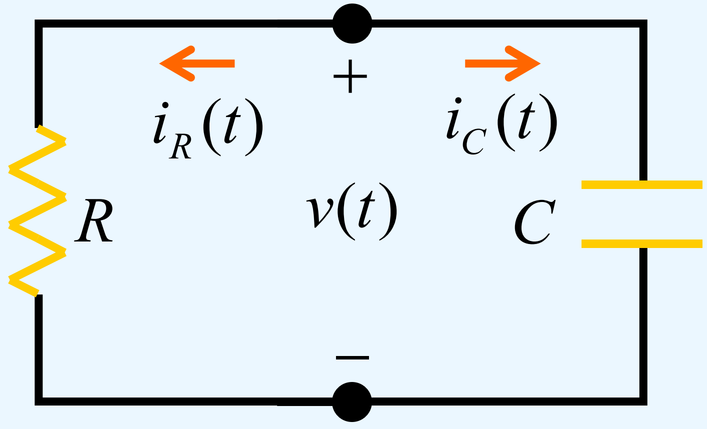


  - En el instante inicial t = 0 se cierra el interruptor y el condensador comienza a descargarse

5.2 Circuitos RC sin fuentes

- Para estudiar el proceso de descarga resolveremos la KCL en el nudo

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$



$$v(0) = V_0$$

- Según la relación i-v de cada elemento:

$$i_R = \frac{v}{R} \qquad\qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

- Sustituyendo en la KCL:

$$\frac{v}{R} + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t$$

- Integrando:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{RC}\int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln v = -\frac{1}{RC}t + \ln A \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{A}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

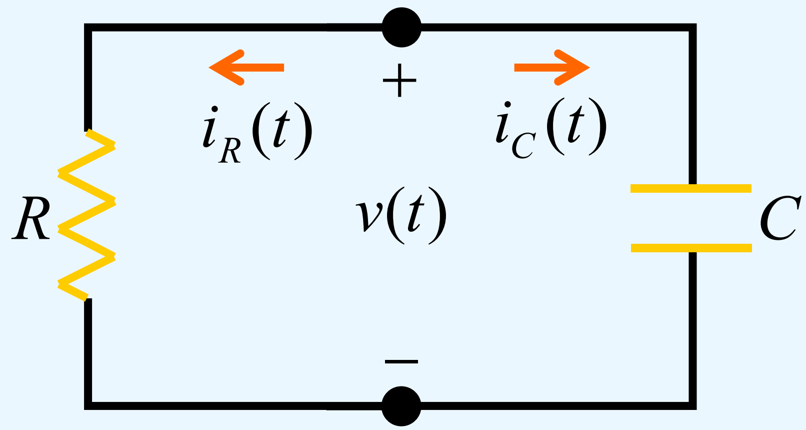
siendo ln A = cte. Tomando "exp" queda

$$v = A\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$$

5.2 Circuitos RC sin fuentes

- Aplicando las condiciones iniciales

$$v(0) = V_0$$



$$v(0) = V_0$$

resulta

$$V_0 = A\exp\left(-\frac{1}{RC}0\right) = A$$

- Luego, la solución buscada es:

$$v(t) = V_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$$

- Esta solución indica que la tensión del circuito RC cae exponencialmente desde el valor inicial hasta cero

5.2 Circuitos RC sin fuentes

- La solución anterior suele escribirse como

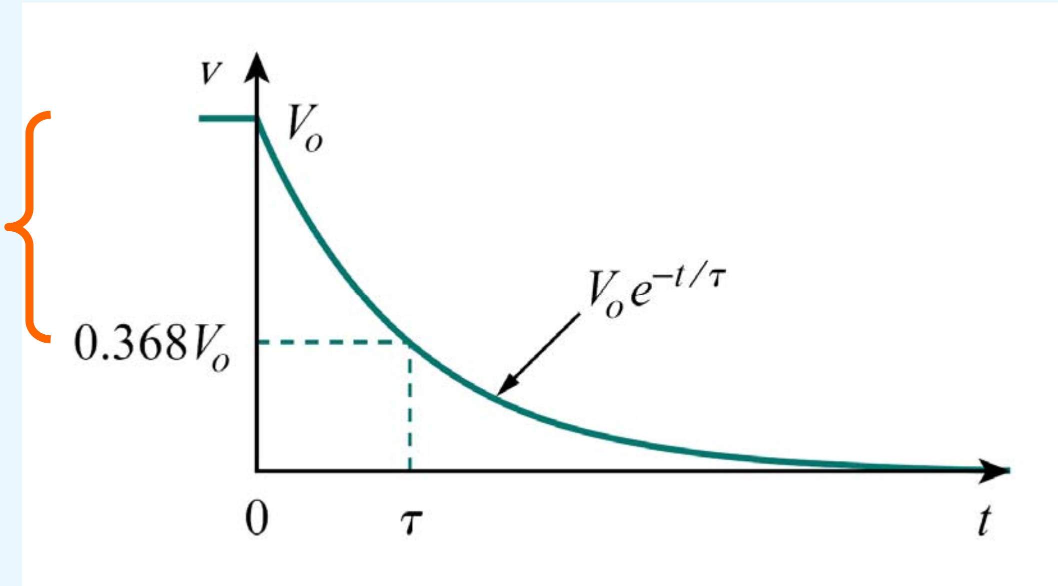
$$\boxed{v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = RC}$$

siendo τ una constante con unidades de tiempo denominada tiempo de relajación o constante de tiempo del circuito

" La constante de tiempo de un circuito RC es el tiempo necesario para que la tensión disminuya en un factor 1/e (un 63.21% de su valor inicial) "

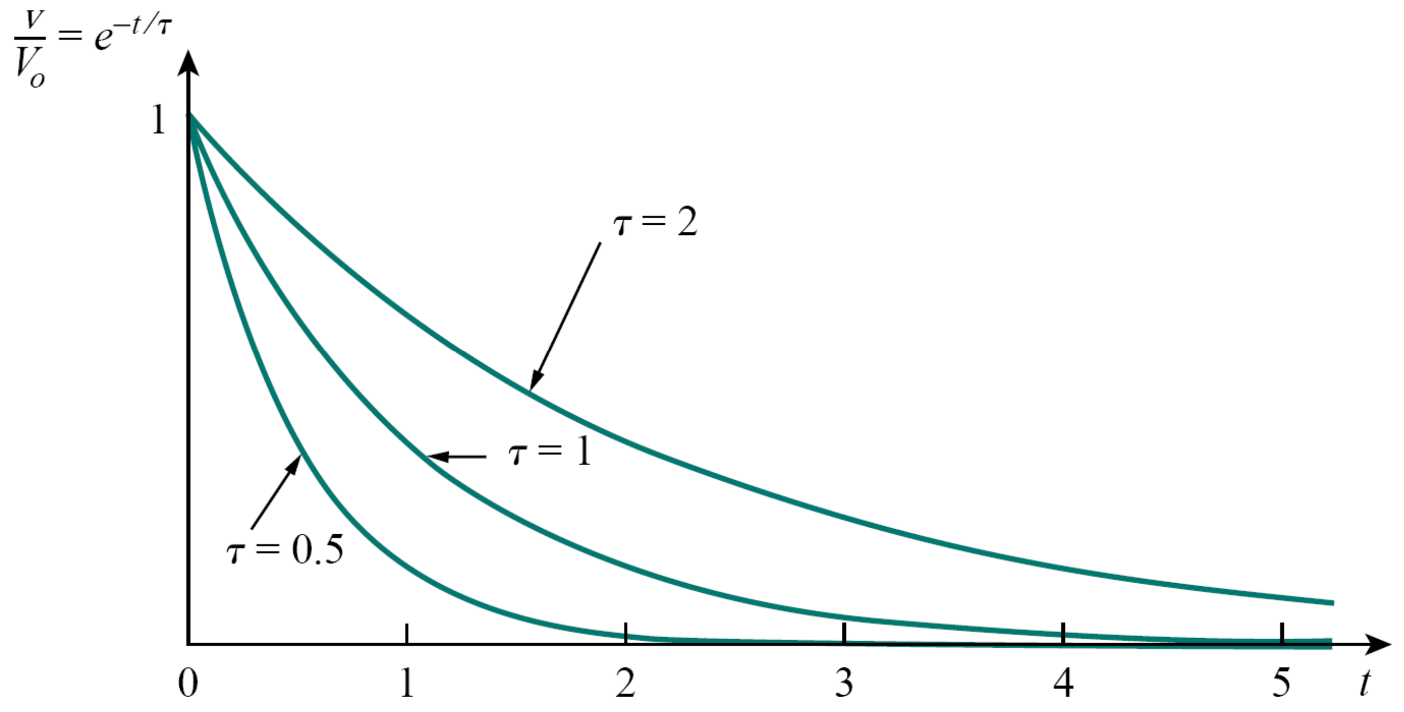
$$t = \tau \;\Rightarrow\; v(\tau) = V_0/\mathrm{e} \approx 0.3679\,V_0$$

63.2%



5.2 Circuitos RC sin fuentes

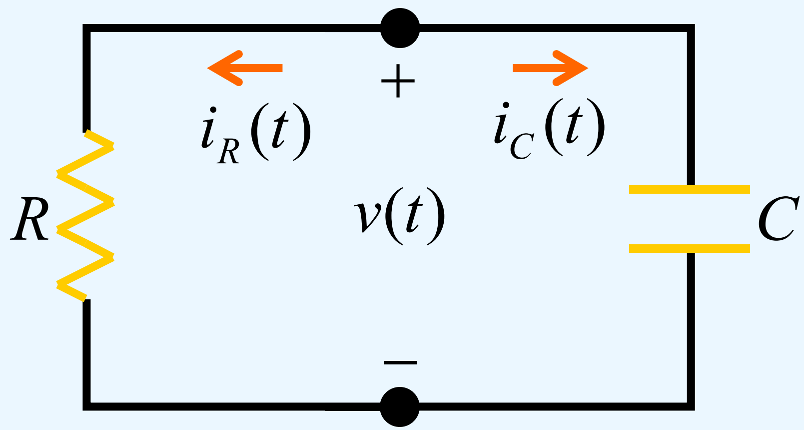
- El tiempo τ da una idea de la rapidez de descarga del circuito.



- Cuanto más pequeño es τ más rápida es la descarga

- Después de un tiempo t = 5τ la tensión ha llegado al 99% de su valor final → el tiempo efectivo de un transitorio es 5τ

5.2 Circuitos RC sin fuentes



- Cálculo de la corriente:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

- Potencia disipada en R:

$$p(t) = v i_R = \left(V_0 e^{-t/\tau}\right)\left(\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}\right) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

- Energía disipada hasta un instante t :

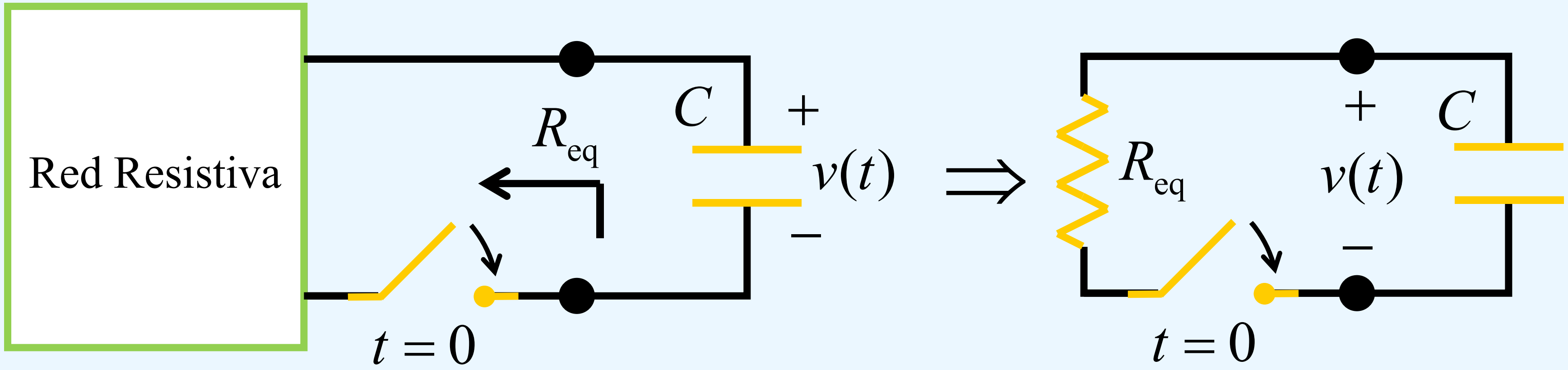
$$w_R(t) = \int_0^t p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = -\frac{\tau}{2}\frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2} C V_0^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$$

- Para t → inf: $w_R(\infty) = \frac{1}{2} C V_0^2$

- La energía total disipada en R es igual a la energía almacenada en el condensador en el instante inicial t = 0.

5.2 Circuitos RC sin fuentes

- Descarga de un condensador a través de una red resistiva:
  - Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$
  - Conectamos el condensador a una red resistiva a través de un interruptor como se muestra en la figura

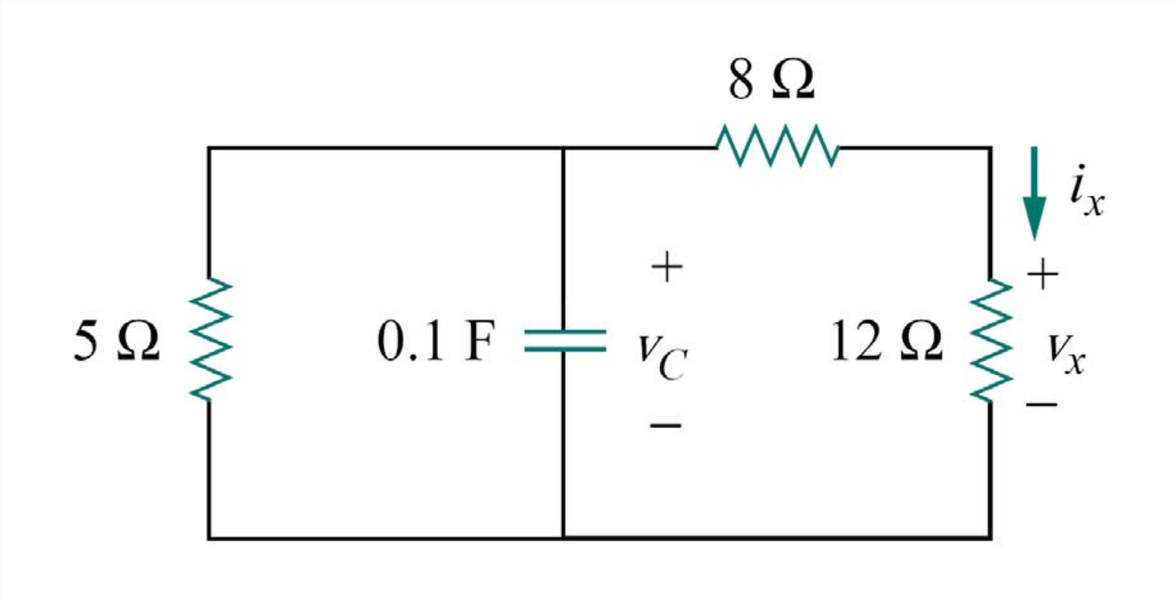


  - Para obtener v(t) (t > 0) basta calcular R_{eq} vista desde los terminales del condensador y aplicar la solución conocida para el circuito RC:

$$\boxed{v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = R_{eq} C}$$

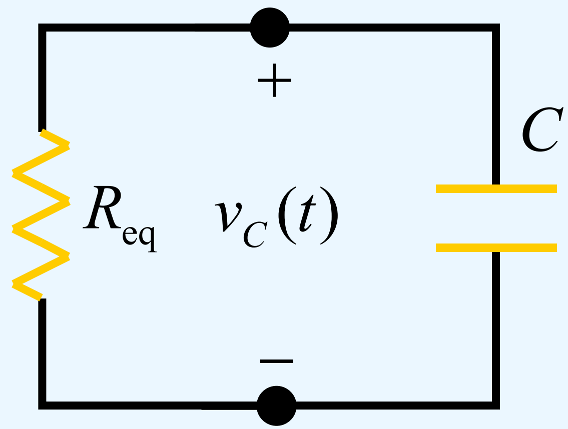
- Nota: si el interruptor cambia en t = t_0 → $v(t) = V_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$

-Ejemplo 1: Sabiendo que $v_C(0) = 15$ V, calcular v_C, v_X e i_X en el circuito de la figura.



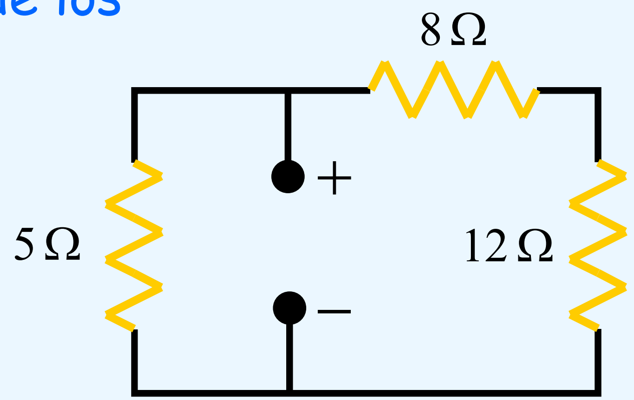
Solución:

- La forma más directa de encontrar la solución es reducir el circuito problema a un circuito RC simple como el de la figura, ya que la solución de este circuito es conocida:



$$v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = R_{eq} C$$

- Entonces, el problema se reduce a calcular R_{eq}, que es la resistencia equivalente vista desde los terminales del condensador, esto es



$$R_{eq} = (12+8) \,\|\, 5 = \frac{20 \times 5}{20+5} = 4\Omega$$

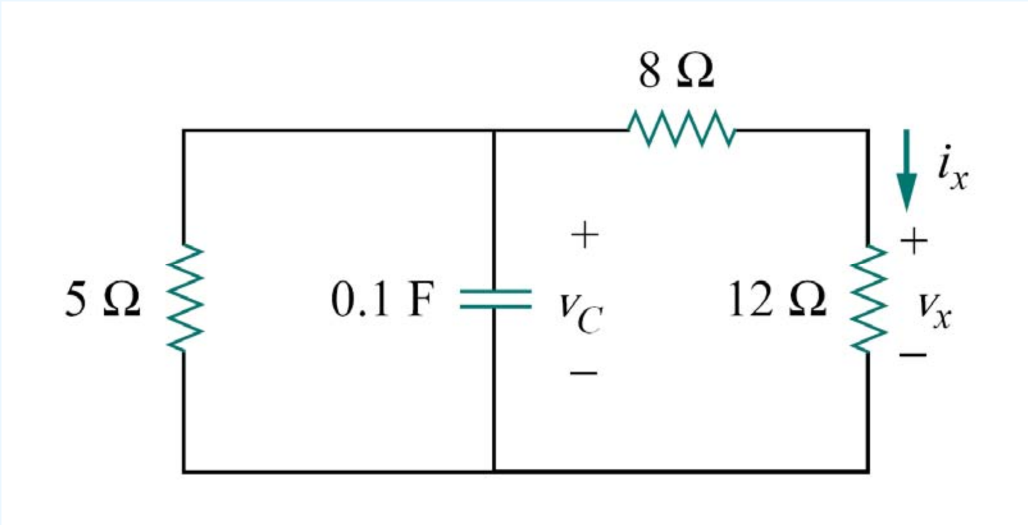
- Por tanto, $\tau = R_{eq} C = 4 \times 0.1 = 0.4\ \text{s}$ y $\boxed{v_C(t) = 15 e^{-2.5t}\ \text{V}}$

- Una vez obtenido v_C, la tensión v_X se calcula mediante un divisor de tensión:

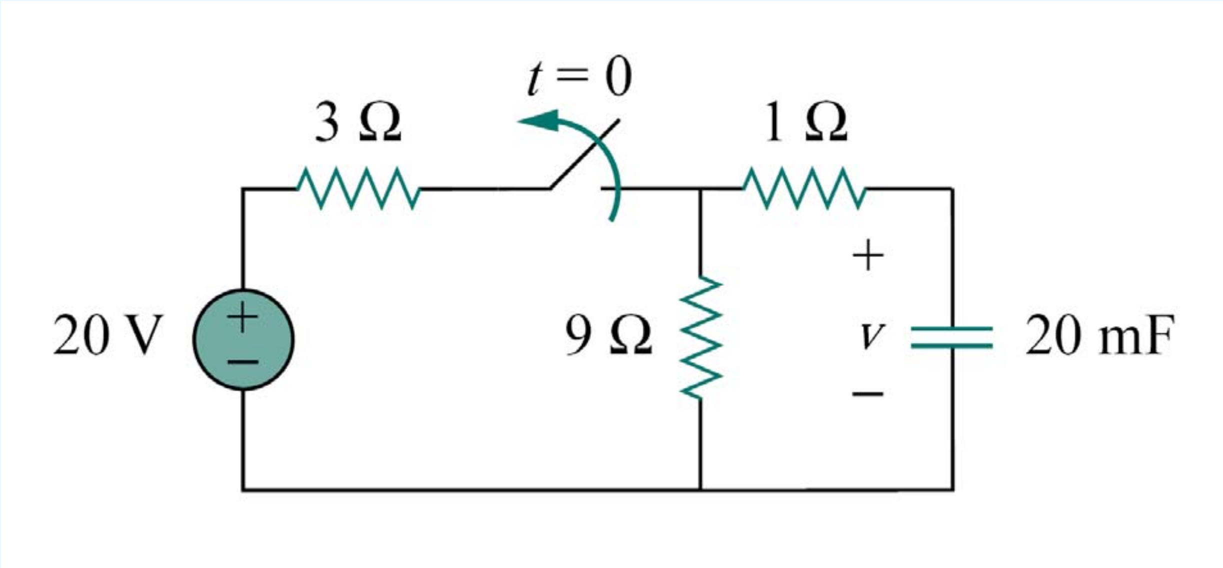
$$\boxed{v_x = \frac{12}{12+8} v_C = \frac{3}{5}\left(15e^{-2.5t}\right) = 9e^{-2.5t} \text{ V}}$$

- y la corriente i_X mediante la ley de Ohm:

$$\boxed{i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75e^{-2.5t} \text{ A}}$$



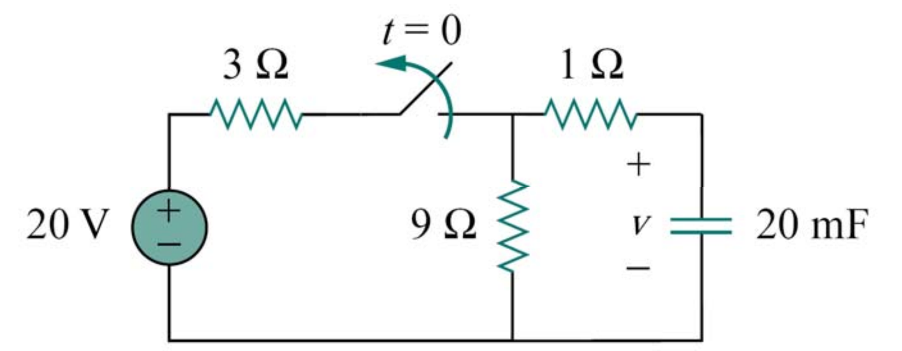
-Ejemplo 2: El interruptor del circuito de la figura ha estado cerrado mucho tiempo y se abre en $t = 0$. Calcular $v(t)$ para $t >= 0$.



Nota: ha estado cerrado mucho tiempo -> estamos en régimen de continua

Solución:

- Mientras el interruptor está cerrado el condensador está en proceso de carga.



- Al abrir el interruptor, el condensador se descargará a través de las resistencias de 1 y 9 Ohm.

- La solución buscada (t > = 0) es de la forma:

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = R_{\text{eq}} C$$

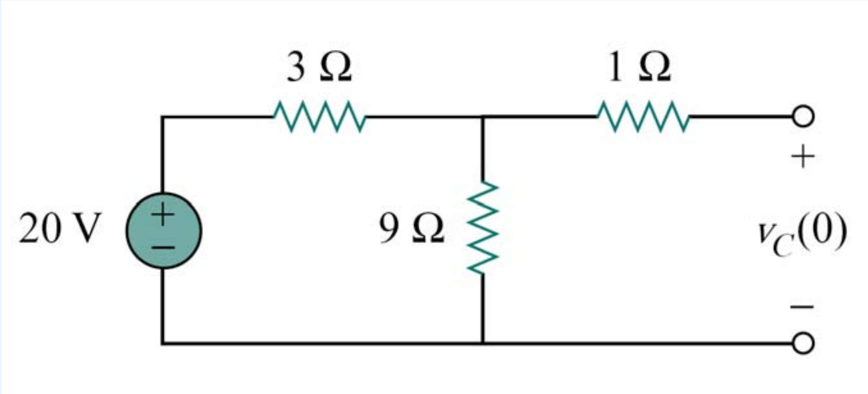
- El problema se reduce a calcular V_0 = v(0) y R_{eq}

- Cálculo de V_0:

- La tensión en el condensador es continua → $V_0 = v(0^-) = v(0^+)$

- El interruptor ha estado mucho tiempo cerrado, por tanto en $t = 0^-$ estamos en régimen de corriente continua

- El circuito equivalente de un condensador en cc es un circuito abierto. Por tanto, para $t = 0^-$ el circuito equivalente es:



- Aplicando la fórmula del divisor de tensión:

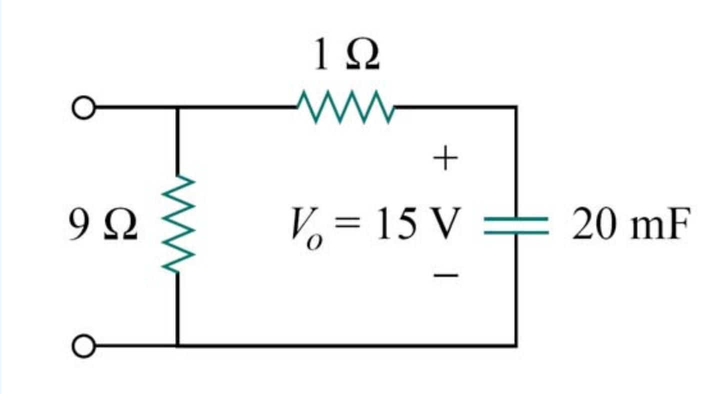
$$v_C(0^-) = \frac{9}{9+3} \times 20 = 15\ \text{V}$$

- La condición inicial buscada es:

$$V_0 = v_C(0^-) = 15\ \text{V}$$

- Cálculo de R_{eq}:

- La resistencia equivalente vista desde los terminales del condensador para t >= 0 es:



$$R_{\text{eq}} = 1 + 9 = 10\,\Omega$$

- Por tanto, $\tau = R_{\text{eq}}C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2\text{ s}$

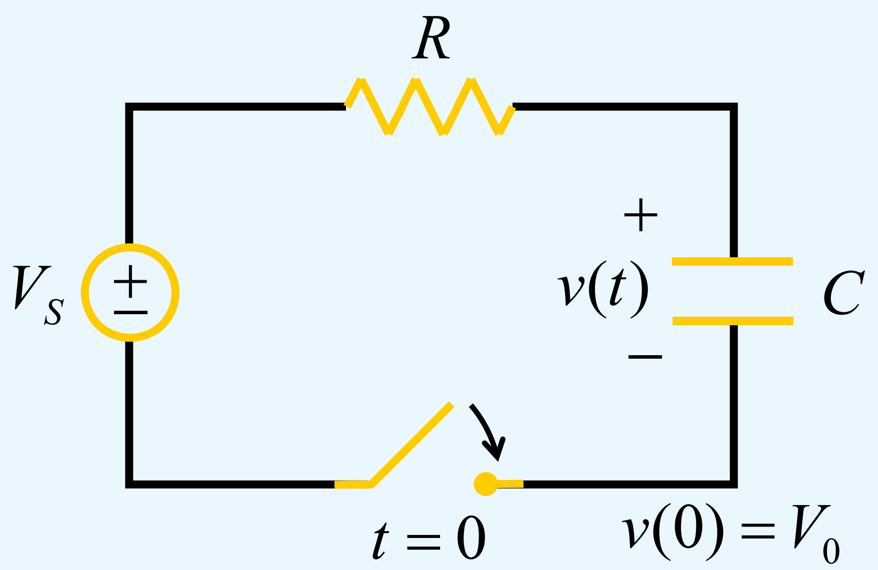
- La solución buscada es:

$$\boxed{v(t) = V_0 e^{-t/\tau} = 15e^{-5t}\ \text{V}}$$

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$

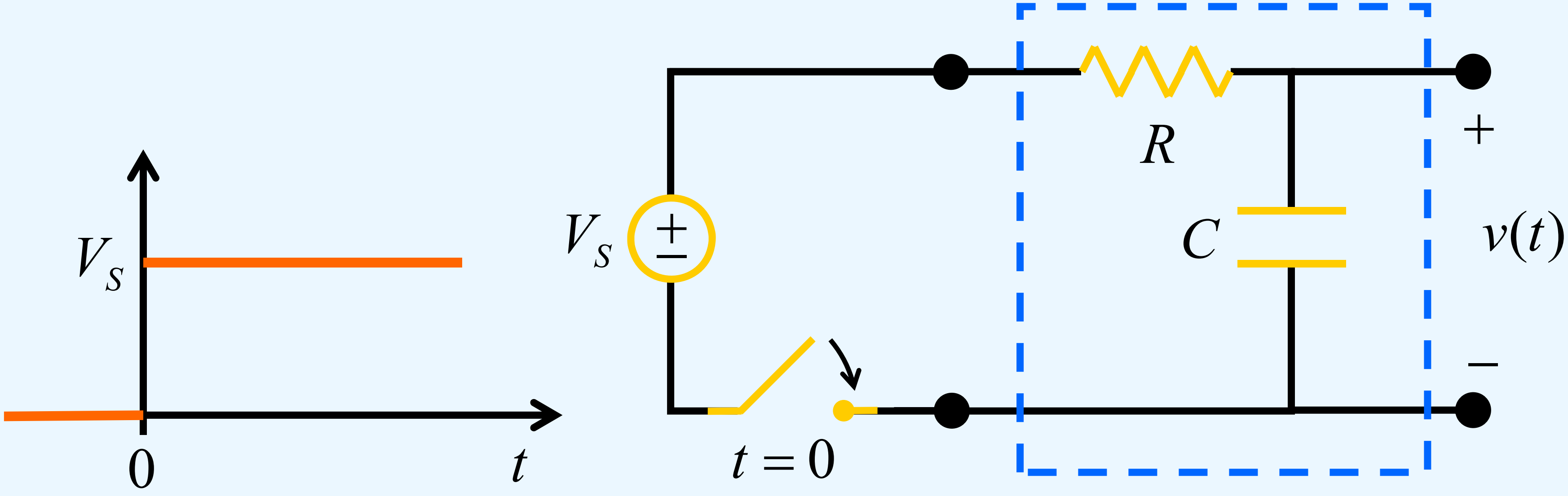
- Conectamos el condensador a una fuente de continua V_S. También se incluye una resistencia R y un interruptor.



- En el instante inicial, t = 0, se cierra el interruptor y el condensador comienza a cargarse. (En realidad cambia sus condiciones de carga de $V_0 \rightarrow V_S$)

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Podemos redibujar el circuito de la siguiente forma:

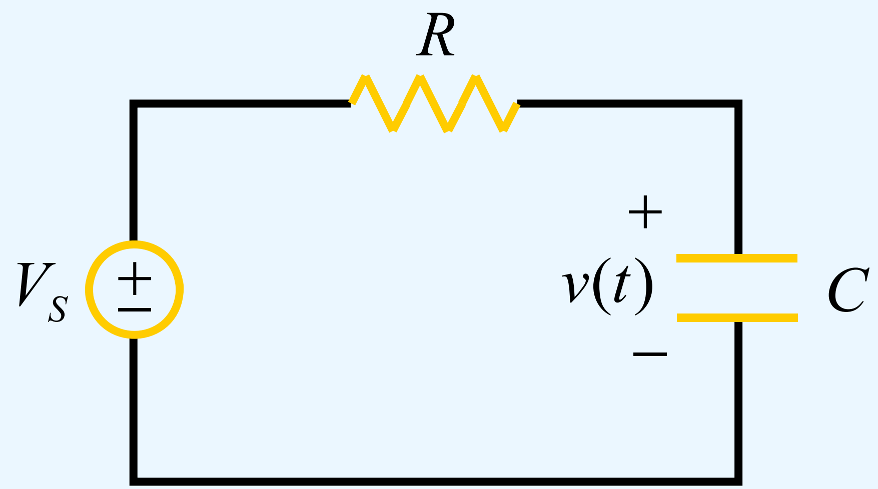


- La fuente V_S representa la excitación o entrada al circuito RC
- La tensión en el condensador $v(t)$ puede interpretarse como la respuesta o salida
- Cuando V_S es cte, al tipo de entrada del dibujo se le llama ESCALÓN, ya que cambia bruscamente de 0 a V_S

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Resolución del circuito:

  - En t = 0 se cierra el interruptor, luego para t >= 0 el circuito resultante es:



  - La tensión en el condensador es continua, luego

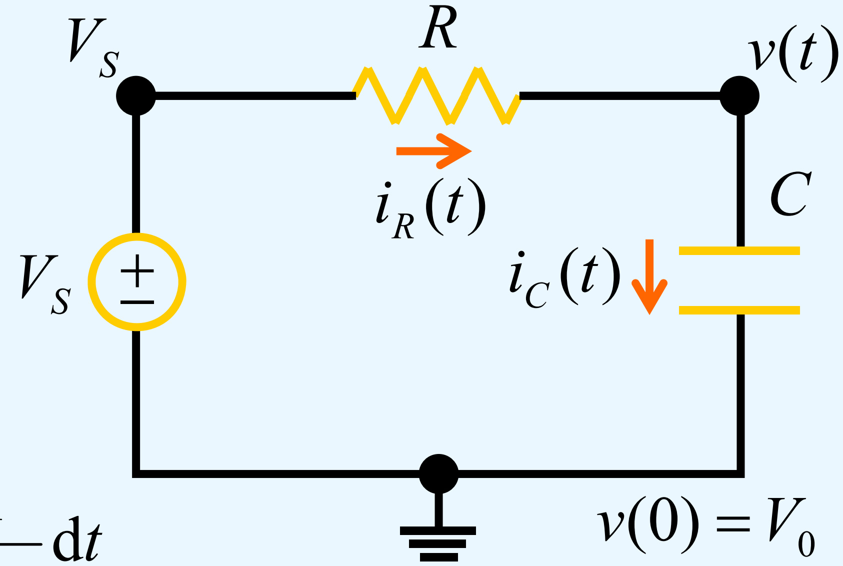
$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

  - Para resolver el circuito emplearemos análisis de nudos

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Tenemos 2 nudos más el de referencia

- Aplicamos la KCL al nudo v(t):



$$i_R(t)=i_C(t)$$

- Según las relaciones i-v:

$$i_R=\frac{V_S-v}{R} \qquad i_C=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

- Sustituyendo en la KCL:

$$\frac{V_S-v}{R}=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v-V_S}=-\frac{1}{RC}\mathrm{d}t$$

- Integrando:

$$\int_{V_0}^{v(t)}\frac{\mathrm{d}v}{v-V_S}=-\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}t \Longrightarrow \ln\left(v-V_S\right)\Big|_{V_0}^{v(t)}=-\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

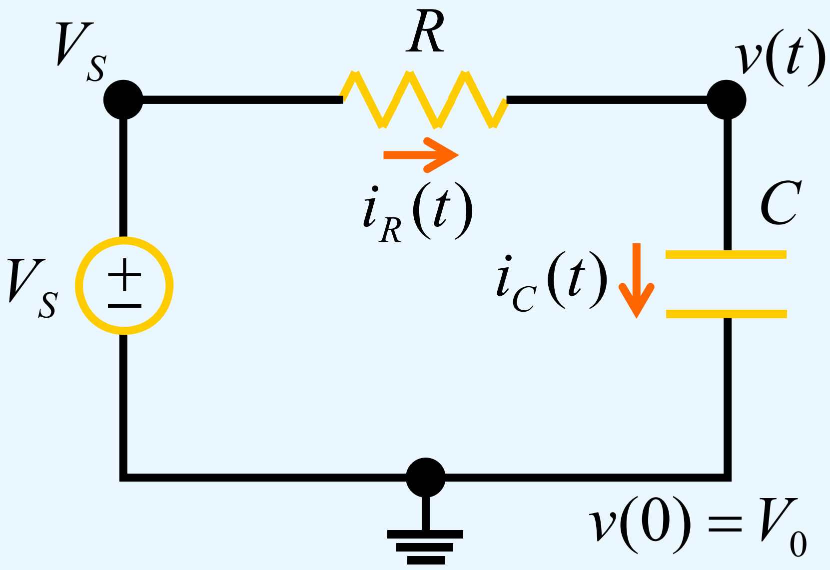
- Sustituyendo en los límites

$$\ln\left(v(t)-V_S\right)-\ln\left(V_0-V_S\right)=-\frac{t}{RC}$$

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Este resultado puede expresarse como

$$\ln\left(\frac{v(t)-V_S}{V_0-V_S}\right) = -\frac{t}{RC}$$



de donde

$$v(t) = V_S + \left(V_0 - V_S\right)e^{-t/\tau}$$

con $\tau = RC$

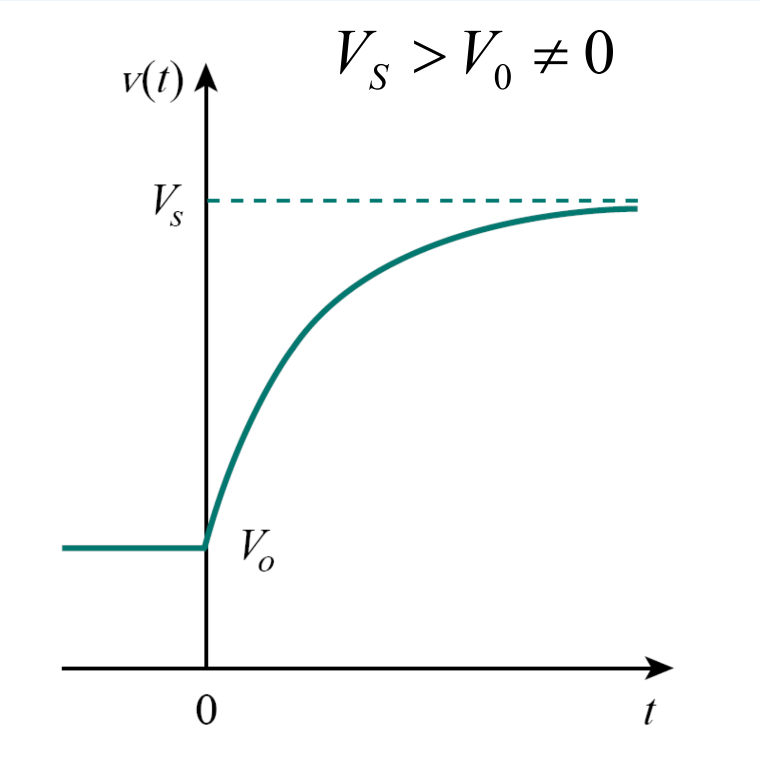
- La solución final del problema es:

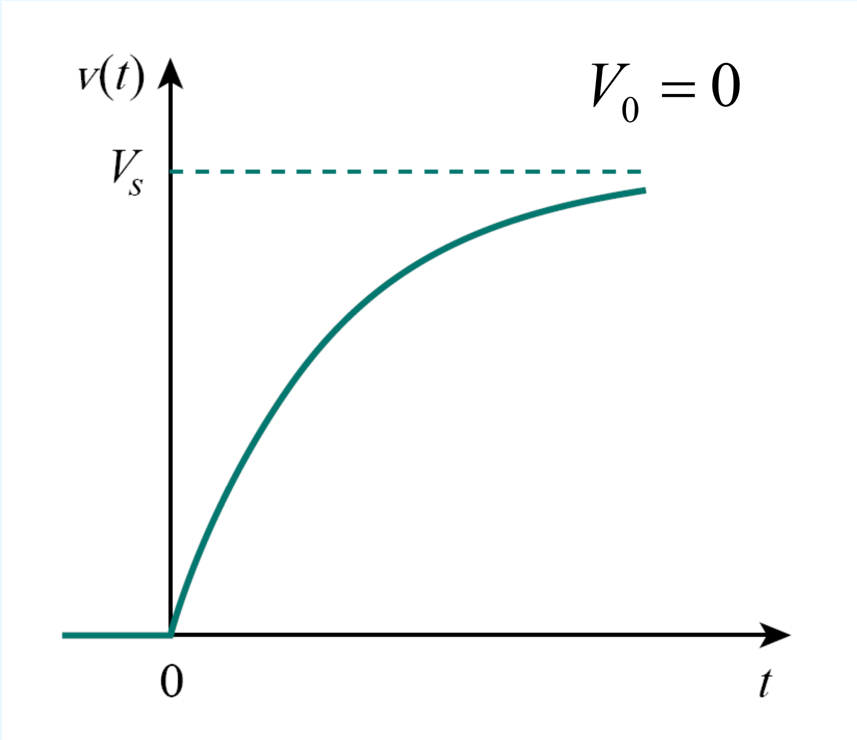
$$v(t) = \begin{cases} V_0, & \text{para} \quad t < 0 \\ V_S + \left(V_0 - V_S\right)e^{-t/\tau}, & \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$\tau = RC$$

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Representación gráfica de la solución





$$v(t) = V_S + \left(V_0 - V_S\right)e^{-t/\tau}$$

- La tensión en el condensador tiende al valor de la tensión de la fuente (la salida sigue a la entrada)

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Respuesta transitoria y respuesta en estado estable

- La respuesta completa de un circuito, v, puede dividirse en dos contribuciones:

1) la respuesta transitoria, v_t
2) la respuesta en estado estable, v_{ss}

- Matemáticamente:

$$v = v_t + v_{SS}$$

- Para el circuito RC:

$$v(t) = V_S + \left(V_0 - V_S\right)e^{-t/\tau} \quad \text{(respuesta completa)}$$

5.3 Circuitos RC con fuentes

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/\tau}$$ (respuesta completa)

"La respuesta transitoria de un circuito es la parte de la respuesta completa que se anula con el tiempo (se hace cero cuanto t -> ∞)"

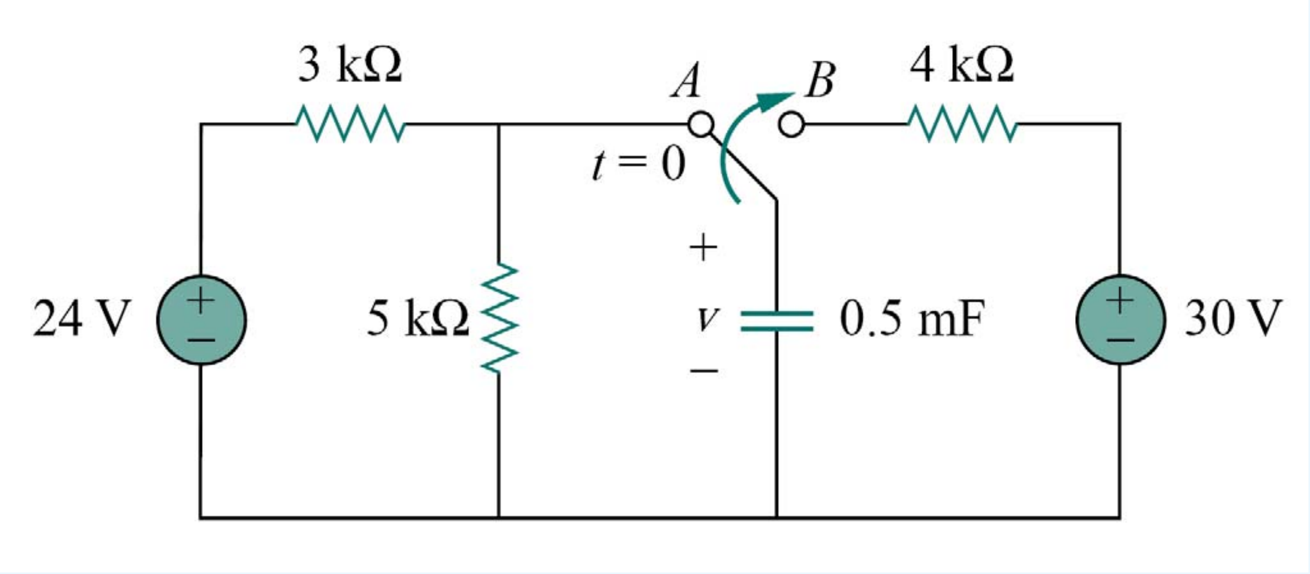
- Para el circuito RC: $v_t = (V_0 - V_S)e^{-t/\tau}$ (respuesta transitoria)

"La respuesta en estado estable de un circuito es la parte de la respuesta completa que permanece mucho tiempo después de aplicada la excitación (la parte que queda cuando t -> ∞)"

- Para el circuito RC: $v_{SS} = V_S$ (respuesta en estado estable)

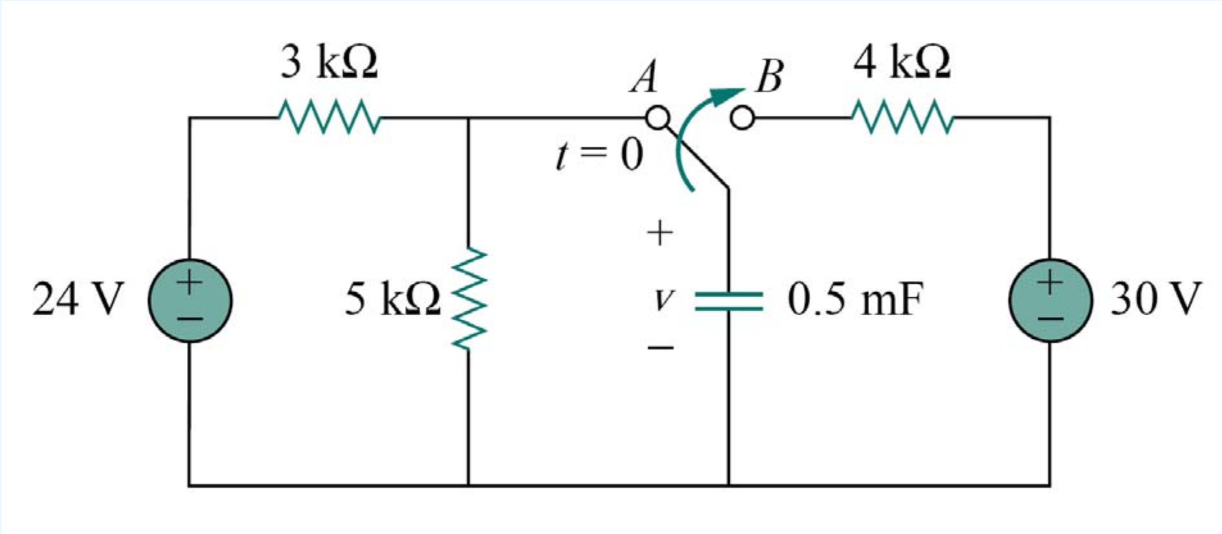
- Nótese que, cuando la fuente tiene valor cte, la respuesta en estado estable es la misma que la repuesta de continua!!!

-Ejemplo 3: El interruptor de la figura ha estado mucho tiempo en la posición A. En $t = 0$ se mueve a la posición B. Calcular $v(t)$ para $t >= 0$ y su valor en $t = 1$ s. A&S-3ª Ej 7.10



Solución:

- Comenzamos resolviendo para t < 0 (con el interruptor en A):

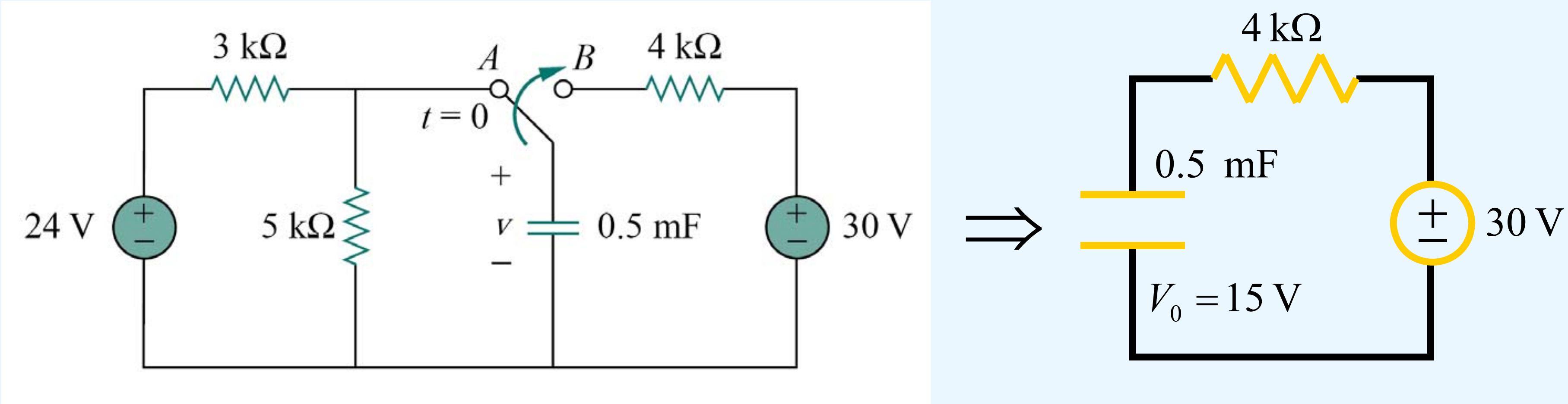


- El interruptor ha estado mucho tiempo en A → estamos en cc

- Aplicamos la fórmula del divisor de tensión:

$$v(0^-) = \frac{5\text{k}}{5\text{k} + 3\text{k}} \times 24 = 15\ \text{V}$$

- Ahora resolvemos para t >= 0 (con el interruptor en B):



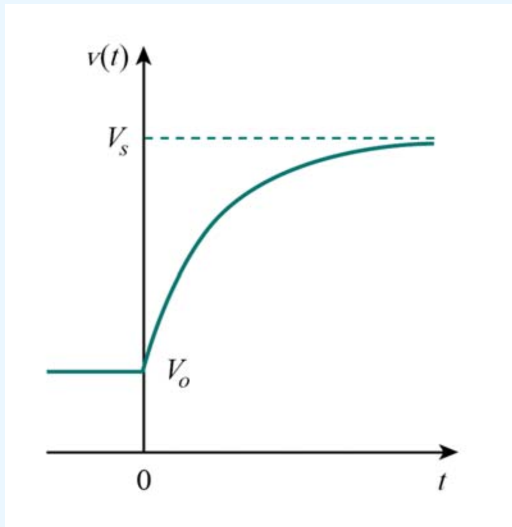
- La solución buscada es de la forma: $v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/\tau}$

- Para esta problema: $V_S = 30\text{ V}$

$$V_0 = v(0^-) = v(0^+) = 15\text{ V}$$

$$\tau = RC = 4\times10^3 \times 0.5\times10^{-3} = 2\text{ s}$$

- Luego: $\boxed{v(t) = 30 - 15\,e^{-0.5t}\ \text{V}}$

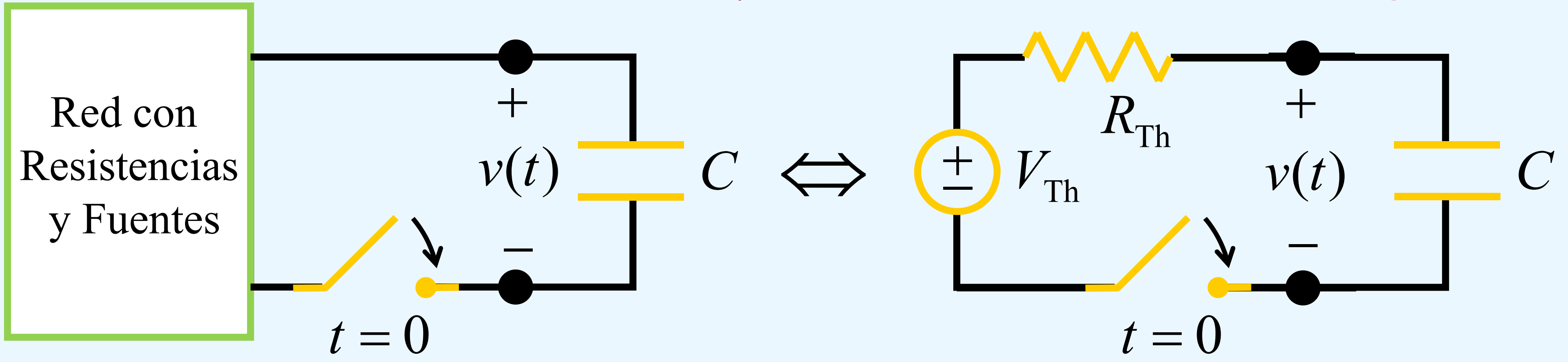


- Para t = 1 s: $v(1) = 30 - 15\,e^{-0.5} = 20.9\ \text{V}$

5.3 Circuitos RC con fuentes

- Carga de un condensador a través de una red de resistencias y fuentes:

  - Consideramos un condensador C inicialmente cargado $v(0) = V_0$
  - Conectamos el condensador a una red de resistencias y fuentes de valor cte a través de un interruptor, como se muestra en la figura

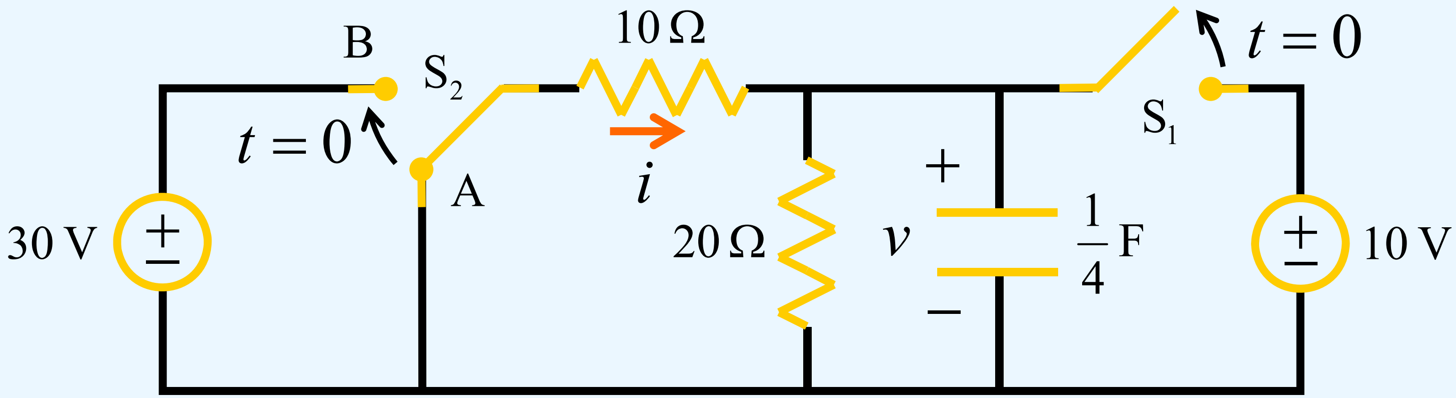


  - Para obtener la tensión en el condensador v(t) (para t>=0) basta calcular el equivalente Thevenin visto desde los terminales del condensador y aplicar la solución conocida para el circuito RC:

$$\boxed{v(t) = V_{\text{Th}} + \left(V_0 - V_{\text{Th}}\right)e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = R_{\text{Th}}C} \qquad t \geq 0$$

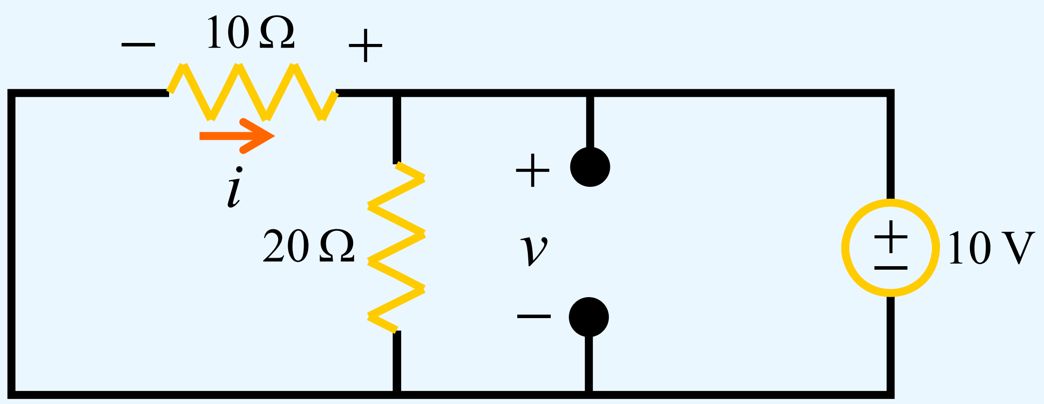
- Nota: si el interruptor cambia en t = t_0 => $t \rightarrow (t - t_0)$

-Ejemplo 4: Después de pasar mucho tiempo, los dos interruptores del circuito de la figura cambian de estado en t = 0. El interruptor S1 se abre y el interruptor S2 pasa a la posición B. Calcular v e i para t >= 0.



Solución:

- La corriente en el condensador puede ser discontinua en t = 0, mientras que la tensión no. Por tanto, es mejor calcular antes la tensión
- Comenzamos determinando las condiciones iniciales en $t = 0^-$
- El circuito equivalente en $t = 0^-$ es:



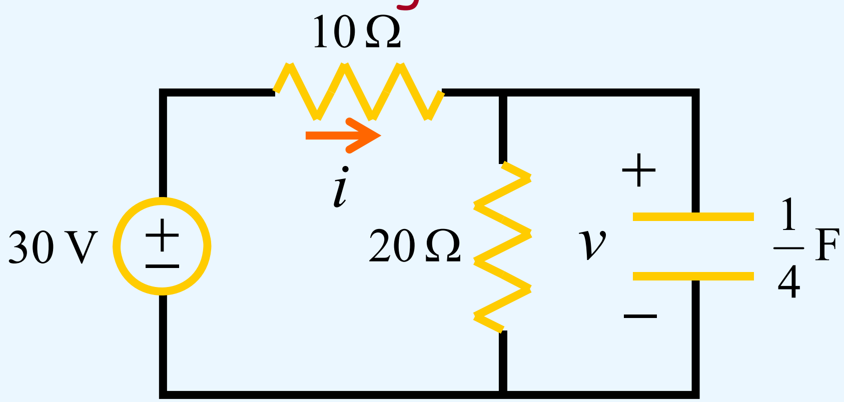
- Se observa que:

$$v(0^-) = 10\ \mathrm{V} \qquad i(0^-) = -\frac{10}{10} = -1\ \mathrm{A}$$

- Entonces la condición inicial para v es:

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0 = 10\ \mathrm{V}$$

- Para t >= 0 el circuito equivalente se muestra en la figura:



- La solución para v(t) es:

$$v(t) = V_{\text{Th}} + \left(V_0 - V_{\text{Th}}\right)e^{-t/\tau}$$

con $\tau = R_{\text{Th}} C$

- Para determinar V_{Th} y R_{Th} debemos calcular el equivalente Thevenin visto desde los terminales del condensador:

$$V_{\text{Th}} = \frac{20}{20+10} \times 30 = 20 \text{ V}$$

$$R_{\text{Th}} = 10 \,\|\, 20 = \frac{10 \times 20}{10+20} = \frac{20}{3}\,\Omega$$

$$\tau = R_{\text{Th}} C = \frac{20}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \text{ s}$$

- Luego: $\boxed{v(t) = 20 - 10\,e^{-0.6t} \text{ V}}$

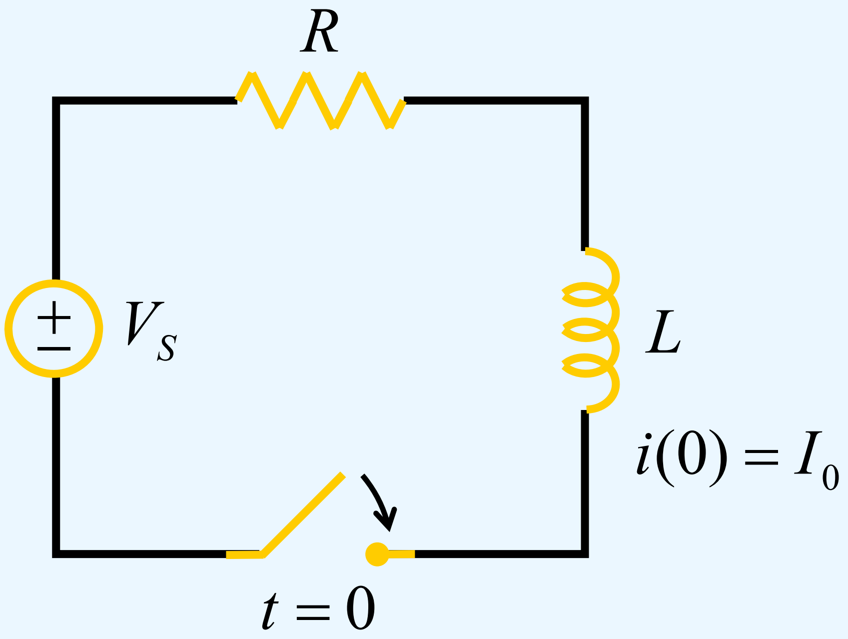
- La tensión en la resistencia de 10 Ohms es: $30 - v(t)$

- Entonces: $\boxed{i(t) = \dfrac{30 - v(t)}{10} = 1 + e^{-0.6t} \text{ A}}$

5.4 Circuitos RL

- Consideramos una bobina *L* con una corriente inicial $i(0) = I_0$

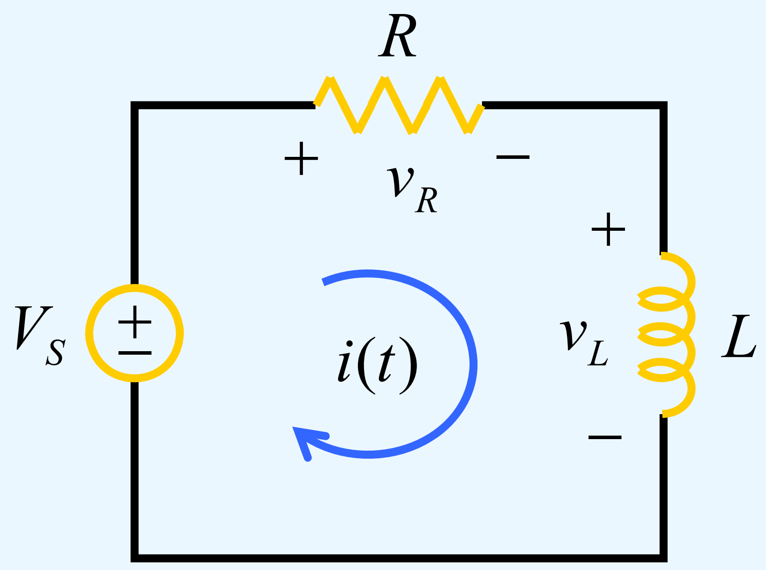
- Conectamos la bobina a una fuente de valor cte V_S. También se incluye una resistencia *R* y un interruptor.



- En el instante inicial, t = 0, se cierra el interruptor y comienza a circular corriente

5.4 Circuitos RL

- Resolvemos para t >= 0



$$i(0) = I_0$$

- Aplicamos análisis de mallas

$$-V_S + v_R + v_L = 0$$

- Según las relaciones v-i:

$$v_R = Ri \qquad v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

- Sustituyendo en la KCL:

$$-V_S + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}i}{i - V_S / R} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

- Integrando:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}i}{i - V_S / R} = -\frac{R}{L}\int_0^t \mathrm{d}t \implies \ln\left(i - V_S / R\right)\Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t$$

5.4 Circuitos RL

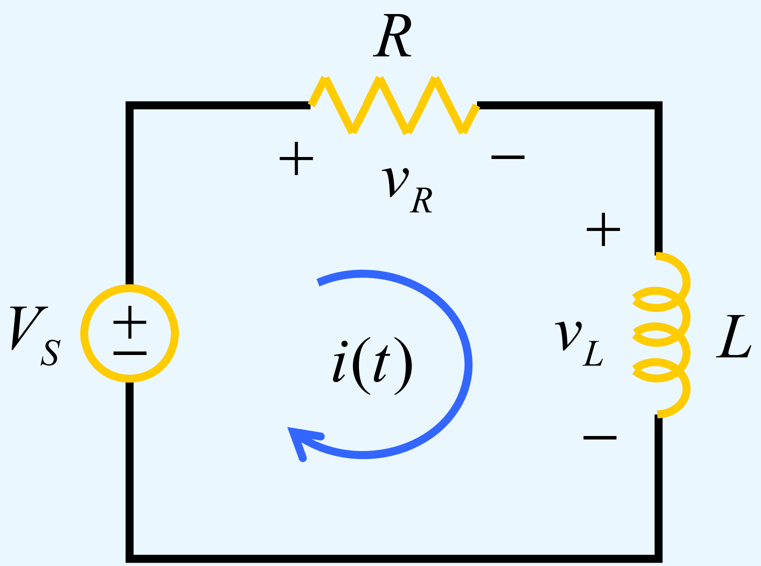
- Sustituyendo en los límites

$$\ln\left(\frac{i(t)-V_S/R}{I_0-V_S/R}\right)=-\frac{R}{L}t$$

de donde

$$i(t)=\frac{V_S}{R}+\left(I_0-\frac{V_S}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

con $\tau = L/R$



$i(0)=I_0$

- La solución final del problema es:

$$i(t)=\begin{cases} I_0, & \text{para} \quad t<0 \\ \dfrac{V_S}{R}+\left(I_0-\dfrac{V_S}{R}\right)e^{-t/\tau}, & \text{para} \quad t\geq 0 \end{cases}$$

$$\tau = L/R$$

5.4 Circuitos RL

- Al igual que en el circuito RC, la respuesta i(t) tiene una parte transitoria y otra parte permanente

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad \text{(respuesta completa)}$$

$$i_t = \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad \text{(respuesta transitoria)}$$

$$i_{SS} = \frac{V_S}{R} \quad \text{(respuesta en estado estable)}$$

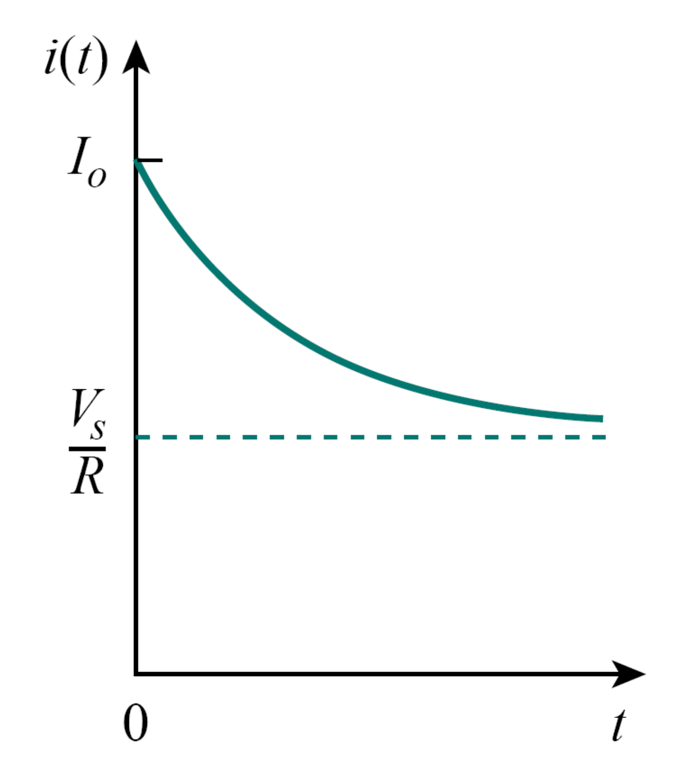
- Nota: si el interruptor cambia en $t = t_0$ la respuesta completa es:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-(t-t_0)/\tau}$$

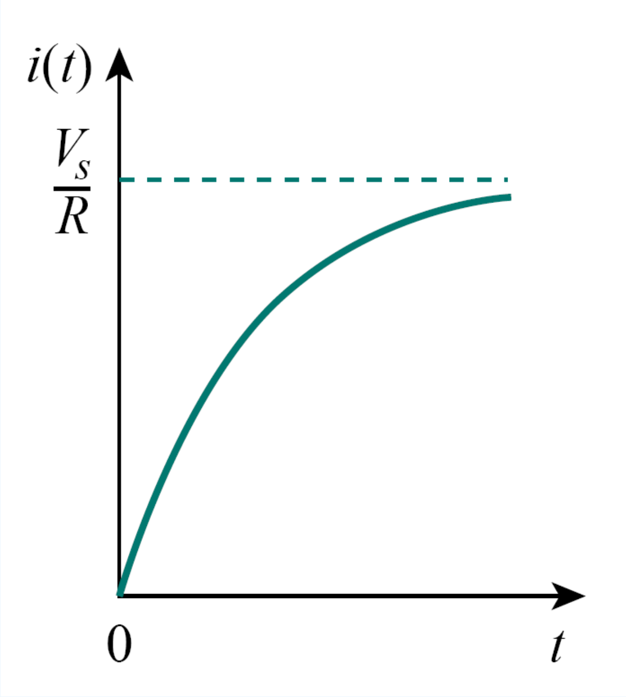
5.4 Circuitos RL

- Gráficamente

$$I_0 > \frac{V_S}{R}$$



$$I_0 = 0$$

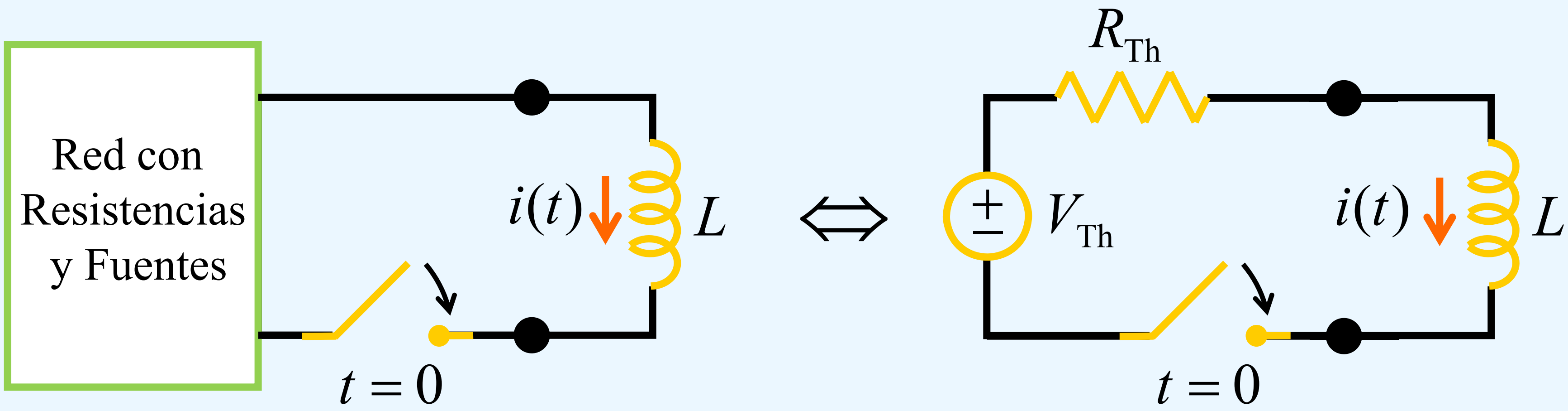


$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-t/\tau} \qquad \tau = L/R$$

5.4 Circuitos RL

- Consideramos una bobina L con una corriente inicial $i(0) = I_0$

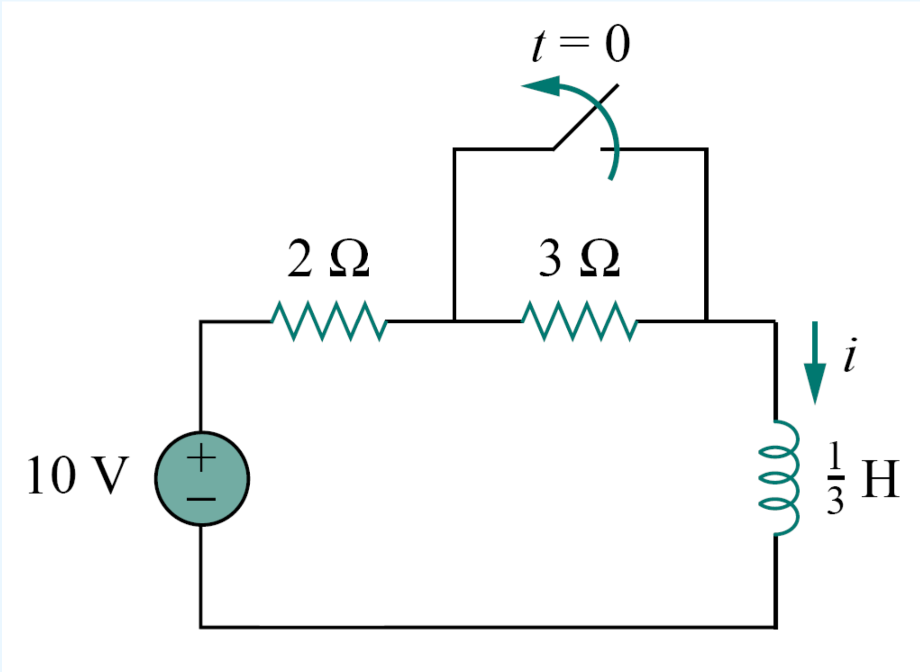
- Conectamos la bobina a una red con resistencias y fuentes de valor cte a través de un interruptor, como se muestra en la figura



- Para obtener la corriente en la bobina i(t) (para t>=0) basta calcular el equivalente Thevenin visto desde los terminales de la bobina y aplicar la solución conocida para el circuito RL:

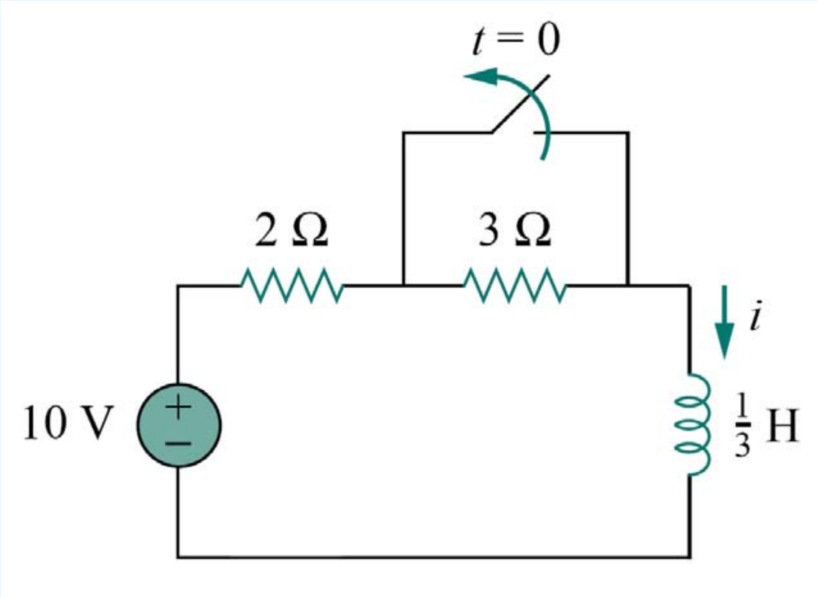
$$\boxed{i(t) = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} + \left(I_0 - \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}}\right) e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} \qquad t \geq 0}$$

- Ejemplo 5: Calcular i(t) en el circuito de la figura para t > 0. Supóngase que el interruptor ha estado cerrado mucho tiempo



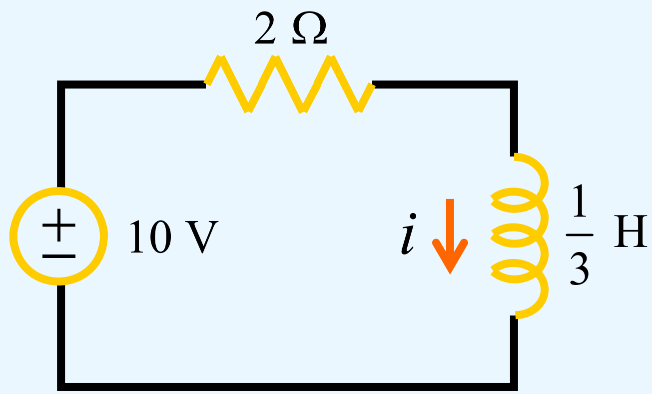
Solución:

- Para t < 0 el interruptor está cerrado → la resistencia de 3 Ohm está cortocircuitada.



$t < 0$

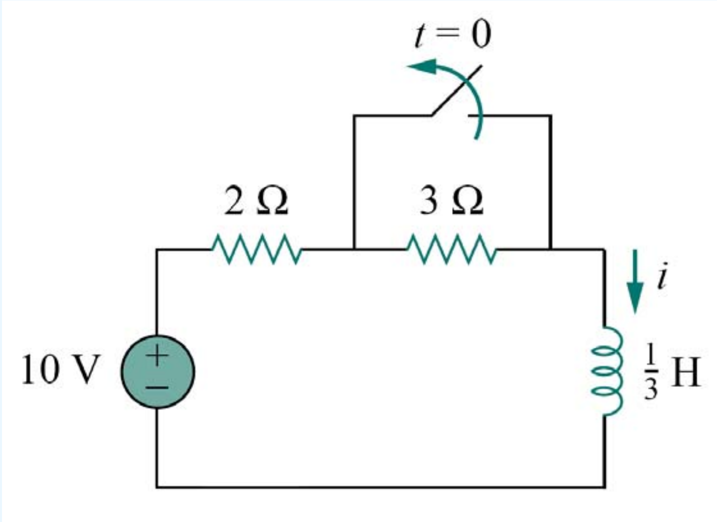
$\Rightarrow$



- El interruptor lleva mucho tiempo cerrado → estamos en cc
- En cc podemos sustituir la bobina por un cortocircuito
- La corriente que pasa por el cortocircuito vale:

$$i(0^-) = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

- La corriente en la bobina no puede cambiar instantáneamente, luego



$$i(0) = i(0^-) = i(0^+) = 5 \ \text{A}$$

- Para t > = 0 el interruptor se abre
- Queda un circuito RL con fuente
- La solución para la corriente es:

$$i(t) = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} + \left(I_0 - \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}}} \right) e^{-t/\tau}$$

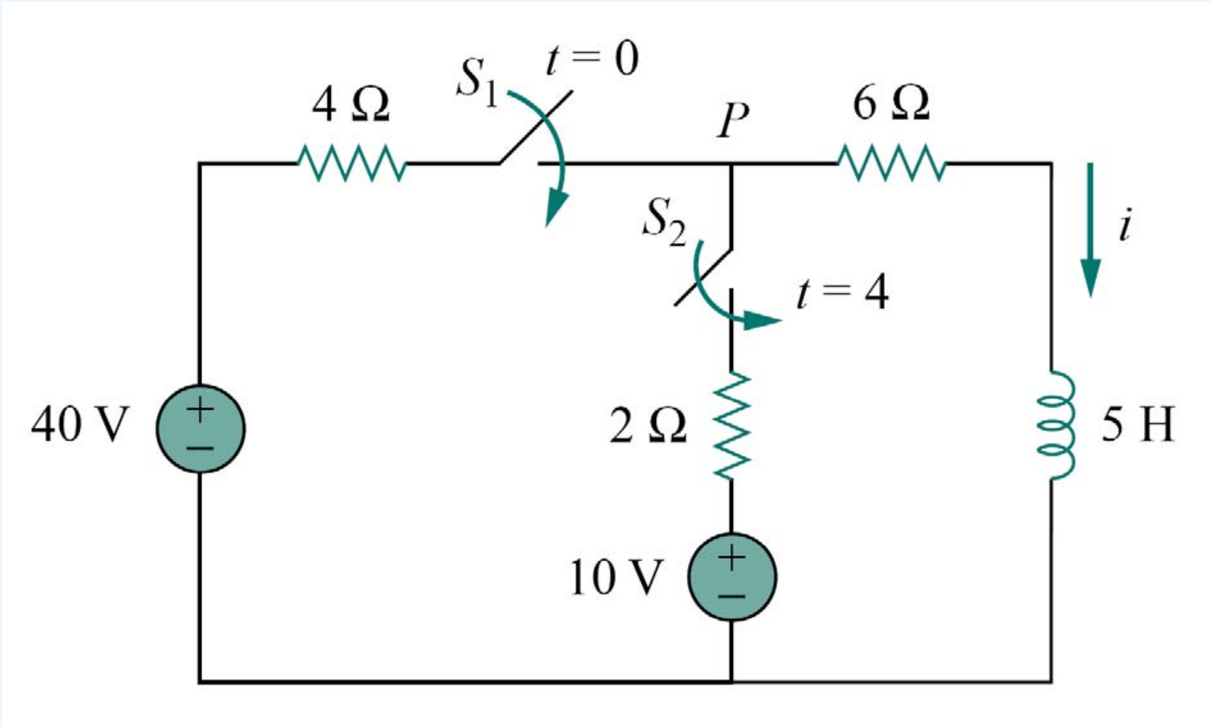
- Para este circuito: $V_{\text{Th}} = 10 \ \text{V}; \ I_0 = 5 \ \text{A}; \quad \tau = \dfrac{L}{R_{\text{Th}}} = \dfrac{1}{3 \times 5} = \dfrac{1}{15} \ \text{s}$

$$R_{\text{Th}} = 2 + 3 = 5 \ \Omega$$

- El resultado final es:

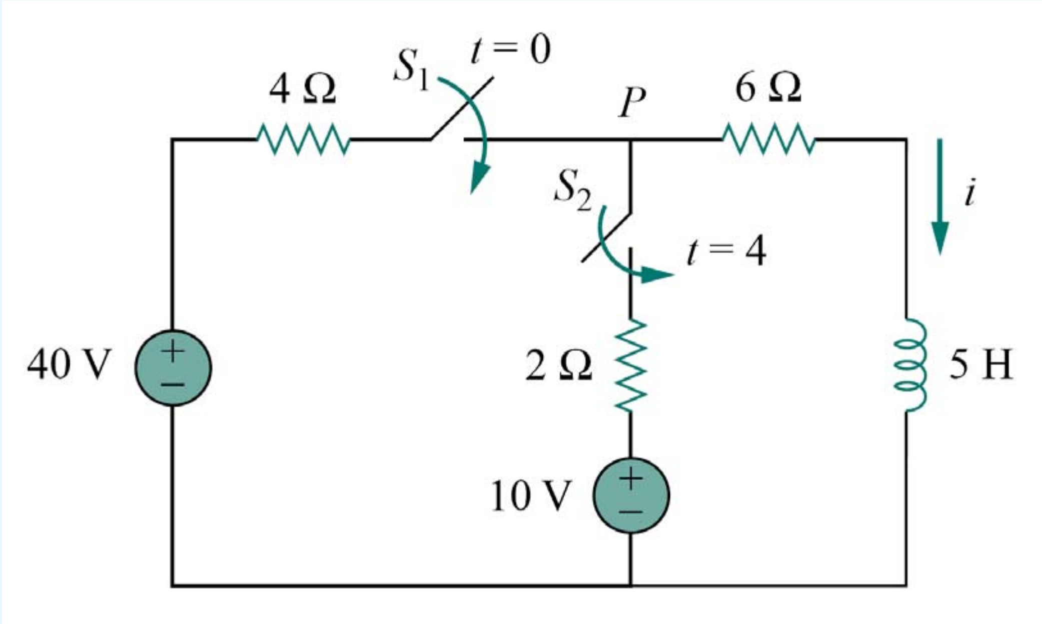
$$\boxed{i(t) = 2 + 3e^{-15t} \ \text{A} \quad \text{para } t \geq 0}$$

- Ejemplo 6: El interruptor S_1 de la figura se cierra en t = 0 y el interruptor S_2 en t = 4 s. Calcular i(t) para t > 0. Determinar el valor de i para t = 2 s y t = 5 s.



Solución:

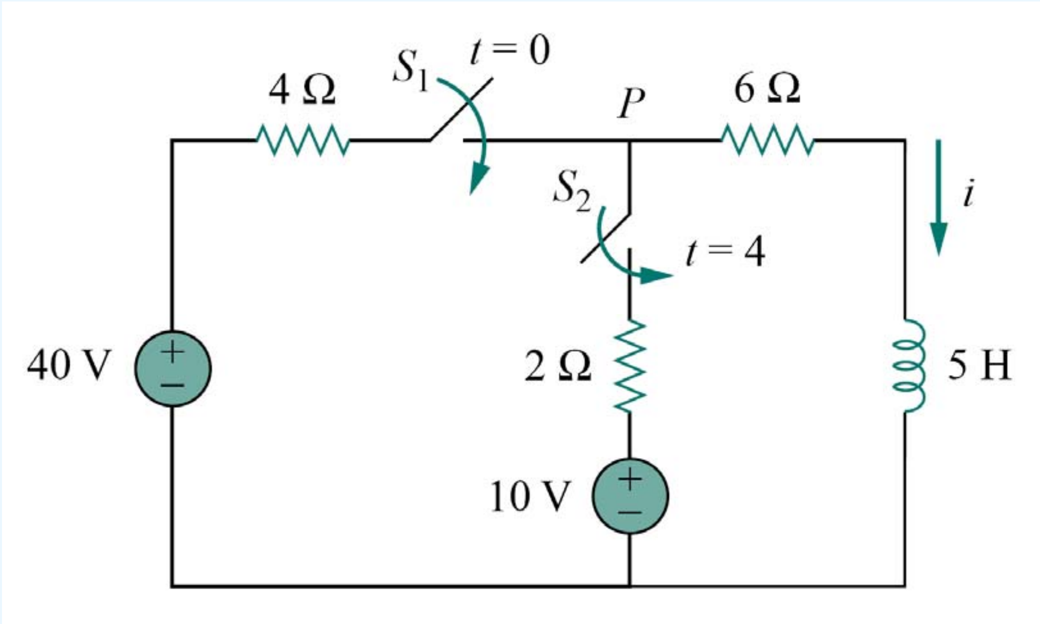
- El circuito problema tiene 2 interruptores que se cierran en instantes de tiempo distintos, lo cual nos define tres intervalos de tiempo: a) t < 0;   b) 0 <= t < 4;   c) t >= 4 s



Solución de estado estable	$t = 0\ \text{s}$	Solución completa	$t = 4\ \text{s}$	Solución completa
S_1 abierto, S_2 abierto		S_1 cerrado, S_2 abierto		S_1 cerrado, S_2 cerrado

t

- a) t < 0 (los dos interruptores están abiertos)



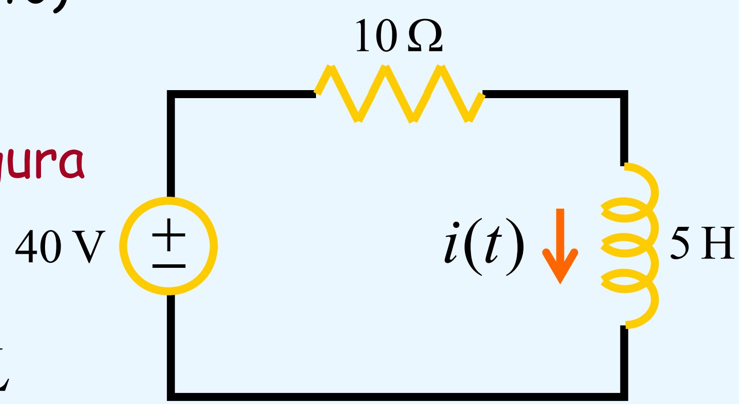
- En este caso $i(t) = 0$

- Tomamos el valor de i(t) en t = 0^- como condición inicial para el siguiente intervalo:

$$i(0^-) = i(0^+) = 0 \text{ A}$$

- b) 0 <= t < 4 s (S_1 está cerrado y S_2 abierto)

- En este caso la rama paralelo está desconectada y queda el circuito de la figura



- La solución es de la forma:

$$i(t) = \frac{V_{\mathrm{Th}}}{R_{\mathrm{Th}}} + \left(I_0 - \frac{V_{Th}}{R_{\mathrm{Th}}} \right) e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R_{\mathrm{Th}}}$$

donde $V_{\mathrm{Th}} = 40\ \ \mathrm{V};\ R_{\mathrm{Th}} = 6 + 4 = 10\ \Omega;\ \ I_0 = i(0^-) = i(0^+) = 0\ \ \mathrm{A}$

$$\tau = \frac{L}{R_{\mathrm{Th}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ \ \mathrm{s}$$

- Luego $i(t) = 4\left(1 - e^{-2t}\right)\ \mathrm{A}$

- La condición inicial para el siguiente tramo es:

$$i(4^-) = 4\left(1 - e^{-2\times 4}\right) = 3.999\ \mathrm{A} \approx 4\ \mathrm{A}$$

- c) t >= 4 s (S_1 y S_2 están cerrados)

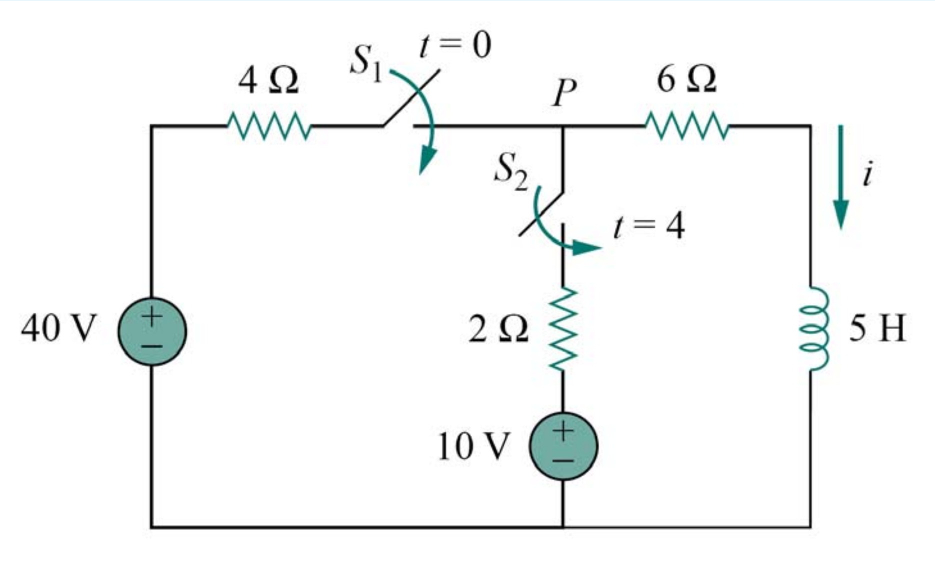
- La solución es de la forma:

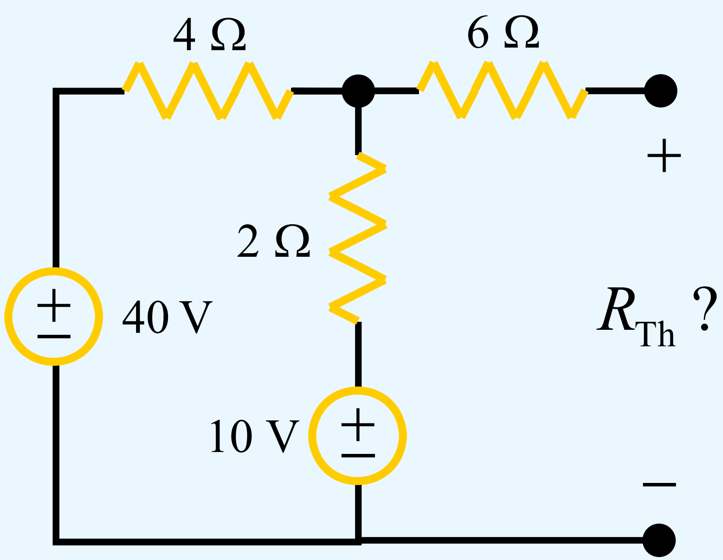
$$i(t) = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} + \left(I_0 - \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \right) e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$$t_0 = 4\ \text{s}$$

$$I_0 = i(4^-) = i(4^+) = 4\ \text{A}$$

- Cálculo de R_{Th}:

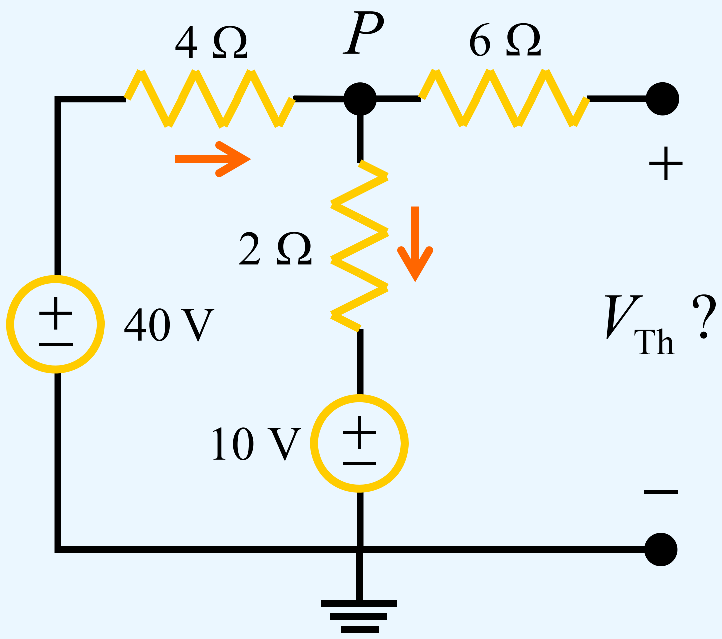




$$R_{Th} = (2 \parallel 4) + 6 = \frac{2 \times 4}{2+4} + 6 = \frac{22}{3}\ \Omega;$$

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5}{\frac{22}{3}} = \frac{15}{22}\ \text{s} = 0.68\ \text{s}$$

- Cálculo de V_{Th}:



- KCL para el nudo P:

$$\frac{40-V_{Th}}{4}=\frac{V_{Th}-10}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_{Th}=20 \;\; \mathrm{V}$$

- Sustituyendo todos los resultados en:

$$I_0=4 \;\; \mathrm{A} \qquad R_{Th}=\frac{22}{3} \;\; \Omega$$

$$\tau=0.68 \;\; \mathrm{s} \qquad t_0=4 \,\mathrm{s}$$

$$i(t)=\frac{V_{Th}}{R_{Th}}+\left(I_0-\frac{V_{Th}}{R_{Th}}\right)e^{-(t-t_0)/\tau}$$

- queda:

$$i(t)=\frac{30}{11}+\left(4-\frac{30}{11}\right)e^{-(t-4)/\tau}=2.73+1.27e^{-1.47(t-4)} \;\; \mathrm{A}$$

- Agrupando las soluciones obtenidas:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \le 0 \\ 4\left(1 - e^{-2t}\right) \ \text{A} & \text{para } 0 \le t \le 4 \text{ s} \\ 2.73 + 1.27e^{-1.47(t-4)} \ \text{A} & \text{para } t \ge 4 \text{ s} \end{cases}$$

- Para t = 2 s: $i(2) = 4\left(1 - e^{-4}\right) = 3.93 \ \text{A}$

- Para t = 5 s: $i(5) = 2.73 + 1.27e^{-1.47(5-4)} = 3.02 \ \text{A}$