

HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES EN EL LABORATORIO

PROFESOR: PABLO ALBELLA

PRIMER CURSO DEL GRADO EN FÍSICA



EJERCICIOS ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Ejercicio 1 (Análisis de los últimos dígitos)

Como parte de un experimento llevado a cabo en una clase, se han obtenido las alturas de los estudiantes. Los últimos dígitos de dichas alturas se muestran debajo.

0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 3 3 3 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 8 8 8 9

1. Construye una distribución de frecuencias (absolutas y relativas) con 10 clases y el histograma asociado.
2. Construye además la tabla de frecuencias acumulativa y la ojiva asociada.
3. ¿Puedes concluir algo acerca de la distribución de los dígitos?
4. ¿Parecen las alturas haber sido verdaderamente medidas o inventadas?

Solución del ejercicio 1

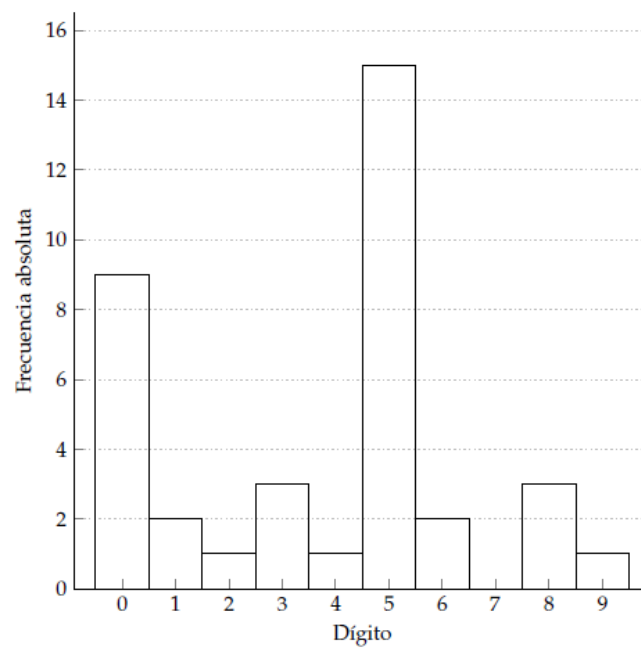
1. Seguimos el procedimiento descrito en la p. 6 de los apuntes:
 1. Número de clases: el problema nos dice que escojamos 10 clases.
 2. Anchura de clase:

$$\text{Anchura de clase} \approx \frac{\text{Valor máximo} - \text{Valor mínimo}}{\text{número de clases}} = \frac{9 - 0}{10} = 0.9$$

Redondeamos a 1.

3. Elegimos como primer límite inferior el 0.
4. Añadiendo la anchura de clase, enumeramos el resto de límites inferiores en una columna vertical y determinamos entonces los límites superiores de clase (coinciden con los límites inferiores).
5. Tomamos cada valor individual de los datos y lo asignamos a una clase concreta. La frecuencia (absoluta) de esa clase es el número de valores existente en ella.

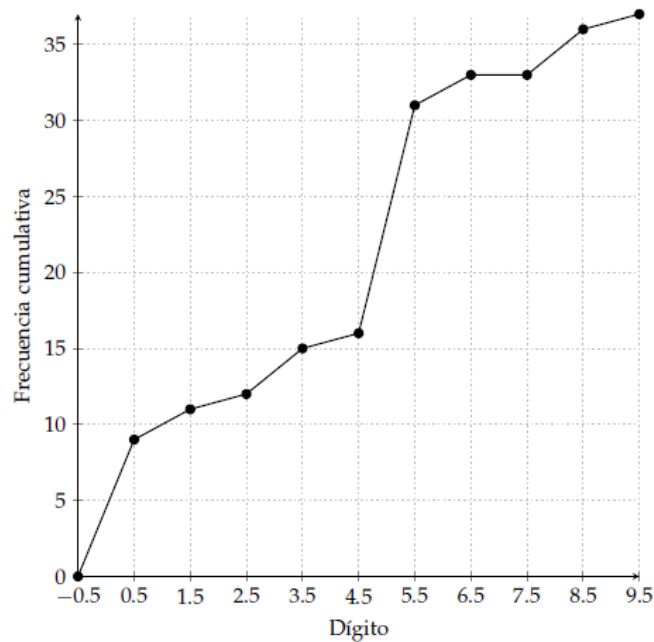
Número (clase)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
0	9	0.24	24
1	2	0.05	5
2	1	0.03	3
3	3	0.08	8
4	1	0.03	3
5	15	0.41	41
6	2	0.05	5
7	0	0	0
8	3	0.08	8
9	1	0.03	3
TOTAL	37	1	100



2. La tabla de frecuencias acumulada es:

Número (clase)	Frecuencia acumulada
0	9
1	11
2	12
3	15
4	16
5	31
6	33
7	33
8	36
9	37

Y la ojiva asociada:



Ejercicio 2 (Medidas resumen)

Lanzamos un dado 10 veces y estos son los números que nos salen:

2 5 4 1 1 3 6 3 4 2

Calcula:

1. La media.
2. La mediana.
3. La moda.
4. El rango.
5. La desviación estándar.

Solución del ejercicio 2

1.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2 + 5 + 4 + 1 + 1 + 3 + 6 + 3 + 4 + 2}{10} = 3.1$$

2. Primero ordenamos los datos de menor a mayor:

1 1 2 2 3 3 4 4 5 6

Como el número de datos es par, calculamos el valor medio entre los dos valores centrales, 3 y 3:

$$\bar{x} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

3. La moda es el valor que más veces se repite. Podemos construir una tabla de frecuencias con 6 clases (1 para cada valor posible) para visualizarlo mejor:

Número (clase)	Frecuencia absoluta
1	2
2	2
3	2
4	2
5	1
6	1

Observamos que los números 1, 2, 3 y 4 son moda.

4. El rango no es más que la diferencia entre el valor máximo y el mínimo:

$$\text{rango} = \text{valor máximo} - \text{valor mínimo} = 6 - 1 = 5$$

5. Calculamos la desviación estándar según la expresión:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\left[\frac{(2 - 3.1)^2 + (5 - 3.1)^2 + (4 - 3.1)^2 + (1 - 3.1)^2 + (1 - 3.1)^2}{10 - 1} \right.} \\ &\quad \left. + \frac{(3 - 3.1)^2 + (6 - 3.1)^2 + (3 - 3.1)^2 + (4 - 3.1)^2 + (2 - 3.1)^2}{10 - 1} \right]^{1/2}} \\ &= 1.7 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 ¡Cookies!

A continuación, se muestra el número de pepitas de chocolate en diferentes marcas de galletas:

Marca 1

22 22 26 24 23 27 25 20 24 26 25 25 19 24 20 22 24 25 25 20
23 30 26 20 25 28 19 26 26 23 25 23 23 23 22 26 27 23 28 24

Marca 2

21 20 16 17 16 17 20 22 14 20 19 17 20 21 21 18
20 20 21 19 22 20 20 19 16 19 16 15 24 23 14 24

Marca 3

13 24 18 16 21 20 14 20 18 12 24 23 28 18 18 19 22 21 22 16
13 20 20 23 24 20 17 20 19 21 27 16 24 19 23 25 14 18 15 19

Marca 4

29 31 25 32 27 31 30 29 31 26 32 33 32 30 33 29 30
28 32 35 37 31 24 30 30 34 29 27 24 38 37 32 26 30

Marca 5

13 15 16 21 15 14 14 15 13 13 16 11
 14 12 13 12 14 12 16 17 14 16 14 15

1. Compara la desviación estándar estimada a partir de la regla de oro del rango con la real.
2. Basándote en la regla de oro del rango, ¿qué galletas puedes decir que contienen un número inusual de pepitas de chocolate?
3. ¿Cuántas galletas caen dentro de 1 desviación estándar de la media para cada marca? ¿Y de 2 desviaciones estándar?
- 3.1 ¿Se cumple la Regla Empírica 68–95–99.7? ¿Por qué?
4. Utiliza el coeficiente de variación para comparar la variación de cada marca de galletas.

Solución del ejercicio 3

1. Primero calculamos las desviaciones estándar reales de cada marca de galletas, de acuerdo a la expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Marca	1	2	3	4	5
s	2.6	2.7	3.8	3.5	2.1

La regla de oro del rango nos dice que la desviación estándar se puede estimar a partir del rango con la expresión:

$$s \approx \frac{\text{rango}}{4}$$

Marca	1	2	3	4	5
Rango	11	10	16	14	10
≈ s	2.8	2.5	4.0	3.5	2.5

2. De acuerdo a la regla de oro del rango, los valores mínimo y máximo típicos vienen dados por la expresión:

$$\text{valor mínimo típico} = \bar{x} - 2s$$

$$\text{valor máximo típico} = \bar{x} + 2s$$

, por lo que también necesitamos calcular los valores medios de pepitas de chocolate en cada marca de galletas:

Marca	1	2	3	4	5
$\bar{x}$	24.0	19.1	19.6	30.4	14.4
Valor mínimo típico	18.8	13.7	12	23.4	10.2
Valor máximo típico	29.2	24.5	27.2	37.4	18.6

3. No tenemos más que contar el número de galletas que se encuentran en los intervalos $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$ y $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$ para cada marca de galletas y calcular el porcentaje que suponen del total, comparándolo con la estimación dada por la Regla Empírica 68–95–99.7:

Marca	1	2	3	4	5
$[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$	24.0	19.1	19.6	30.4	14.4
% 1s	72.5	62.5	67.5	70.6	75.0
$[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$	39	32	39	33	23
% 2s	97.5	100	97.5	97.1	95.8

4. Calculamos los coeficientes de variación (CV) de cada marca de galletas según la expresión:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Marca	1	2	3	4	5
CV(%)	10.8	14.1	19.4	11.5	14.6

Ejercicio 4 (Distribución de frecuencias)

Un ingeniero está diseñando una máquina para fabricar guantes y para ello obtiene la siguiente muestra de longitudes de mano (en mm) de varones adultos seleccionados aleatoriamente:

173 179 207 158 196 195 214 199

Construye una distribución de frecuencias utilizando una anchura de clase de 10 mm y usando 150 mm como el límite inferior de la primera clase.

Ejercicio 5 (Histograma)

Utiliza la distribución de frecuencias del Ejercicio 4 para construir un histograma.

Ejercicio 6 (Estadística Descriptiva)

Utiliza las longitudes de mano del Ejercicio 4 para calcular (con sus unidades):

1. La media.
2. La mediana.
3. La desviación estándar.
4. La varianza.
5. El rango.

Ejercicio 7

Se ha obtenido el módulo de Young (medido en GPa) de placas de fundición constituidas por diferentes sustratos intermetálicos, resultando en las siguientes medidas:

116.4 115.9 114.6 115.2 115.8

1. Calcula $\bar{x}$ y las desviaciones de la media.
2. Utiliza las desviaciones de la media obtenidas en 1 para obtener la varianza y la desviación estándar muestrales.
3. Resta 100 de cada medida para obtener una muestra de valores transformados. Ahora calcula la varianza de estos valores transformados, y compárala con la varianza de los datos originales.

Ejercicio 8

¿Cuál es la probabilidad de sacar una espada de la baraja de 40 cartas? ¿Y de no sacar una espada?

Solución del ejercicio 8

Suponemos una baraja convencional formada por 40 cartas, 10 por cada palo. También suponemos que tenemos todas las cartas tienen la misma probabilidad de salir, por lo que aplicamos la expresión:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

, donde $N(A)$ es el número de casos favorables y N el número de casos posibles. En nuestro caso:

$$P(A) = \frac{10}{40} = 0.25$$

Hay 30 cartas en la baraja que no son espadas, por lo que:

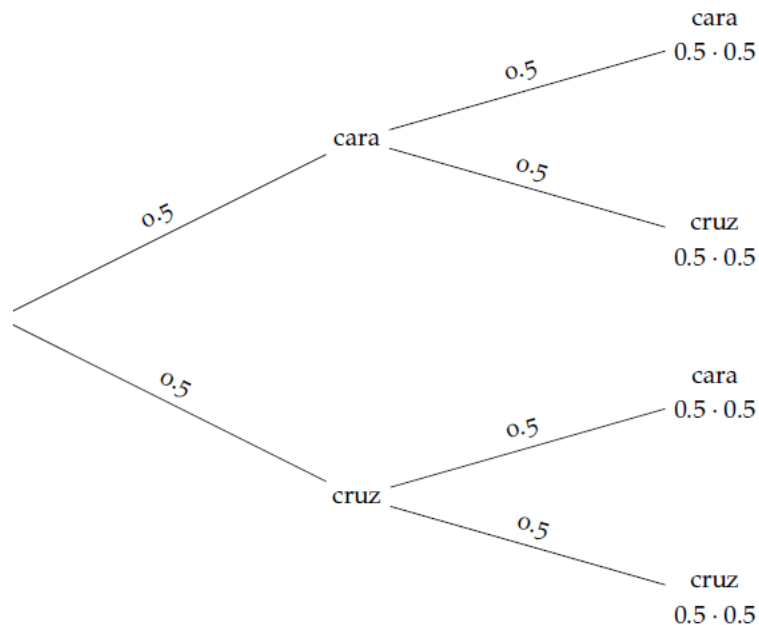
$$P(A) = \frac{30}{40} = 0.75$$

Ejercicio 9

Al lanzar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara?

Solución del ejercicio 9

Lo más sencillo es construir un diagrama de árbol con todos los posibles casos:



El espacio muestra consiste en $S = \{ (C, C) , (C,+) , (+, C) , (+,+) \}$.

De los cuatro posibles resultados, solo 1 es favorable para el suceso “no sacar ninguna cara”, por lo que:

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0.25$$

El suceso “sacar al menos una cara” es el suceso contrario de “no sacar ninguna cara”, por lo que:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.75$$

Ejercicio 10

Calcula la probabilidad de sacar al menos un 6 al tirar dos dados.

Solución del ejercicio 10

Llamamos A al suceso *sacar un 6 en el primer dado* y B al suceso *sacar un 6 en el segundo dado*. Nos piden $P(A \cup B)$, siendo $A \cup B = \text{sacar al menos un 6}$.

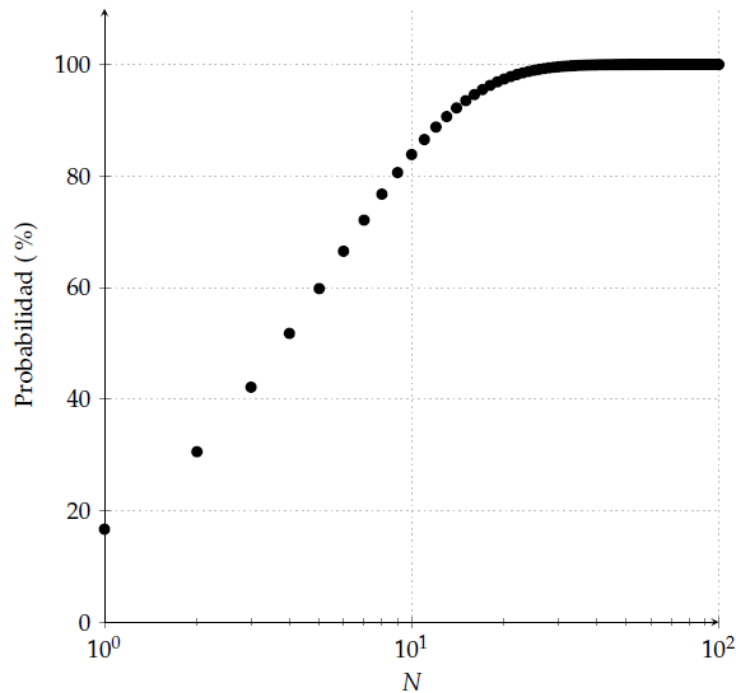
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como ambos sucesos son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

Si quisiéramos saber la probabilidad de sacar al menos un 6 al tirar N dados, entonces no es más que

$$P(A) = 1 - (P(\bar{A}))^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$



Ejercicio 11

En abril de 2006 se habían registrado unos 50 millones de dominios .com.

1. ¿Cuántos dominios de dos letras se pueden formar? Si además de letras se permiten dígitos, ¿cuántos dominios se pueden formar?
2. ¿Cuántos dominios de tres letras pueden formarse? ¿Y si también se permiten dígitos?
3. ¿Y con 4 caracteres?
4. En abril de 2006 todavía quedaban libres 97786 dominios de cuatro caracteres. Si seleccionamos un dominio al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ya esté tomado?

Ejercicio 12 Experimento (Devore: p. 74)

Un experimentador está estudiando los efectos de la temperatura, la presión y el tipo de catalizador en el rendimiento de una cierta reacción química. Se consideran 3 temperaturas distintas, 4 presiones y 5 tipos de catalizador.

1. Si un experimento consiste en seleccionar una temperatura, una presión y un catalizador, ¿cuántos experimentos distintos pueden llevarse a cabo?

2. ¿Cuántos experimentos involucran la temperatura más baja y las dos presiones más bajas?
3. Supongamos que el primer día vamos a realizar 5 experimentos. Si seleccionamos los 5 aleatoriamente de entre todos los posibles, ¿cuál es la probabilidad de que en cada uno se utilice un catalizador diferente?

Solución del ejercicio 12

1. Según la regla del producto, con $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ y $n_3 = 5$ tenemos $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ experimentos distintos.
2. Si queremos que se utilice la temperatura más baja, $n_1 = 1$, y las dos presiones más bajas, $n_2 = 2$, manteniéndose $n_3 = 5$, por lo que habrá $1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$ experimentos distintos en esas condiciones.
3. Primero, ¿cuántas formas de seleccionar 5 experimentos de entre 60 hay?

$$\binom{60}{5}$$

Por cada catalizador, hay $3 \cdot 4 = 12$ posibles combinaciones de temperatura y presión. Separamos los 60 experimentos posibles en 5 conjuntos de 12 cada uno. El número de formas de escoger 1 experimento de entre los 5 conjuntos de 12 es

$$\binom{12}{1}^5 = 12^5$$

La probabilidad es por tanto

$$P = \frac{12^5}{\binom{60}{5}} = 0.0456$$

Ejercicio 13

¿De cuántas formas podemos ordenar en una línea 5 canicas de distinto color?

Solución del ejercicio 13

La primera posición puede ser ocupada por cualquier de las 5 canicas. La segunda posición puede ser ocupada por 4 canicas (ya hemos colocado 1). La tercera por 3, la cuarta por 2 y la última solopor 1, es decir:

$$\text{número de ordenaciones} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

Este es un caso claro de aplicación de la regla del factorial. Queremos saber el número total de ordenaciones de 5 elementos cuando todos los 5 son elegidos.

Ejercicio 14

Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos bolas rojas?

VOLUNTARIO PARA CASA

Ejercicio 15 (Spiegel: p. 25)

Una caja contiene 5 bolas rojas y 4 bolas blancas. Sacamos dos bolas consecutivas sin reemplazo, y vemos que la segunda es blanca. ¿Qué probabilidad hay de que la primera también sea blanca?

Solución del ejercicio 15

Llamamos W_1 y W_2 a los sucesos “sacar una bola blanca la primera vez” y “sacar una bola blanca la segunda vez”, respectivamente. Lo que nos pide el problema es $P(W_1|W_2)$ (probabilidad de que ocurra W_1 sabiendo que W_2 ha ocurrido).

$$P(W_1|W_2) = \frac{P(W_1 \cap W_2)}{P(W_2)} = \frac{(4/9)(3/8)}{4/9} = \frac{3}{8}$$

Como sabemos que la segunda bola es blanca, para la primera bola solo quedan 3 blancas entre 8 totales, por lo que la probabilidad es $3/8$.

Ejercicio 16

Calcula la probabilidad de sacar un número menor que 4 al lanzar un dado si (1) no tenemos más información y (2) sabemos que el número que ha salido es impar.

Solución del ejercicio 16

Denotamos por A el suceso menor que 4. Como A es la unión de los sucesos elementales 1, 2 o 3:

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Llamamos B al suceso número impar. Vemos que $P(B) = 3/6 = 1/2$. La probabilidad del suceso intersección, $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$. Entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Es decir, saber que el número que sale es impar aumenta la probabilidad de $1/2$ a $2/3$.

Ejercicio 17

Lanzamos dos veces un dado. Encuentra la probabilidad de sacar un 4, 5 o 6 en la primera tirada y un 1, 2, 3 o 4 en la segunda tirada.

Solución del ejercicio 17

Llamamos A al suceso sacar un 4, 5 o 6 en la primera tirada y B al suceso sacar un 1, 2, 3 o 4 en la segunda tirada. Lo que nos piden es

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

, donde hemos utilizado el hecho de que ambos sucesos son independientes.

Ejercicio 18

Sacamos dos cartas de un mazo ordinario (y bien barajado) de 40 cartas. Encuentra la probabilidad sacar dos ases si la primera carta (1) es reemplazada, (2) no es reemplazada.

Solución del ejercicio 18

Llamamos A_1 al suceso sacar un as en la primera carta y A_2 al suceso sacar un as en la segunda carta. De nuevo lo que nos están pidiendo es $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$

1. Para la primera carta, tenemos 4 ases en toda la baraja, por lo que $P(A_1) = 4/40$. Si devolvemos la carta al mazo, para la segunda carta volvemos a tener la misma situación, por lo que

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

2. Como en la primera parte, $P(A_1) = 4/40$. Pero ahora si no devolvemos la carta al mazo, en total habrá 3 ases y 39 cartas, de forma que $P(A_2|A_1) = 3/39$. Entonces:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Ejercicio 19

Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 bolas negras; otra contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Si sacamos una bola de cada bolsa, encuentra la probabilidad de que:

1. Ambas sean blancas.
2. Ambas sean negras.
3. Una sea blanca y otra negra.

Solución del ejercicio 19

Sean W_1 el suceso bola blanca de la primera bolsa, W_2 el suceso bola blanca de la segunda bolsa.

$$1. \quad P(W_1 \cap W_2) = P(W_1) \cdot P(W_2|W_1) = \frac{4}{4+2} \cdot \frac{3}{3+5} = \frac{1}{4}$$

$$2. \quad P(\overline{W_1} \cap \overline{W_2}) = P(\overline{W_1}) \cdot P(\overline{W_2}|\overline{W_1}) = P(\overline{W_1}) \cdot P(\overline{W_2}) = \frac{2}{4+2} \cdot \frac{5}{3+5} = \frac{5}{24}$$

3. El suceso *una sea blanca y otra negra* es en realidad el suceso complementario de la unión de los dos anteriores (es la última posibilidad que queda), por lo que:

$$1 - P(W_1 \cap W_2) - P(\overline{W_1} \cap \overline{W_2}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$