Ejercicios de grupos simétricos

1. Descomponer en producto de ciclos disjuntos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

   Esquema de solución: Seguir la pista a los números

$$(1\ 4)(2\ 5 \ldots$$

2. Sea $G \leq S_n, 1 \leq j \leq n$. Probar que

$$G_j = \{\sigma \in G \mid \sigma(j) = j\}$$

   es un subrupo de G, que recibe el nombre de estabilizador de j en G.

   Esquema de solución: Es no vacío pues la pewrmutación idéntica fija a cualquier elemento.

   Ahora

$$\sigma, \tau \in G_j \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \tau^{-1}(j) = j \Longrightarrow \sigma\tau^{-1}(j) = \cdots = j$$

3. Sea $G \leq S_n$. Probar que $j \sim k \iff \exists \sigma \in G$ con $\sigma(j) = k$ es una relación de equivalencia en $\{1, \ldots, n\}$. Designando Gj la clase de equivalencia $[j]$, probar asimismo que $[G : G_j] = \#Gj$.

   Esquema de solución: La permutación idéntica da la reflexividad; asimismo, la permutación inversa de una dada proporciona la simetría; finalmente, la permutación producto dará la transitividad.

   Para la segunda afirmación comprobar que

$$\sigma G_j \longrightarrow \sigma(j)$$

   es una biyección entre el conjunto de clases a izquierda y la clase de equivalencia del índice j.

4. Probar que $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_r)\sigma^{-1} = (\sigma i_1, \sigma i_2 \ldots, \sigma i_r)$

   Esquema de solución: Tómese un índice k y sea $j = \sigma^{-1}(k)$. Distinguir j en o fuera del soporte.

   Si j está fuera del soporte de $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$

$$[\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_r)\sigma^{-1}](k) = \sigma(j) = k$$

$$(\sigma i_1, \sigma i_2 \ldots, \sigma i_r)(k) = k$$

   pues $k = \sigma(j)$ está fuera del soporte de $(\sigma i_1, \sigma i_2 \ldots, \sigma i_r)$

   Si $j = i_s$,

$$[\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_r)\sigma^{-1}](k) = \sigma(i_1, i_2, \ldots, i_r)(j) = \begin{cases} \sigma i_{s+1}, & s < r \\ \sigma i_1, & s = r \end{cases}$$

$$(\sigma i_1, \sigma i_2 \ldots, \sigma i_r)(k) = (\sigma i_1, \sigma i_2 \ldots, \sigma i_r)(\sigma i_s) = \begin{cases} \sigma i_{s+1}, & s < r \\ \sigma i_1, & s = r \end{cases}$$

5. Se dice tipo de una permutación a la familia de las longitudes de sus ciclos. Probar que dos permutaciones son conjugadas si y sólo si son del mismo tipo.

   Esquema de solución:

   "Sólo si":

   $$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \sigma c_1 \cdots c_r \sigma^{-1} = \sigma c_1 \sigma^{-1} \cdots \sigma c_r \sigma^{-1} = d_1 \cdots d_r$$

   "Si": Sean α y β del mismo tipo. Entonces,

   $$\alpha = c_1 \cdots c_r \quad \beta = d_1 \cdots d_r$$

   Sea σ la permutación que transforma el soporte de c_i en d_i, para $i = 1 \ldots, r$ y deja los demás índices fijos. Así,

   $$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \sigma c_1 \cdots c_r \sigma^{-1} = \sigma c_1 \sigma^{-1} \cdots \sigma c_r \sigma^{-1} = d_1 \cdots d_r = \beta$$

6. Este ejercicio está destinado a probar que A_4 es un grupo de orden 12 que no posee subgrupos de orden 6.

   (a) Probar que los elementos del grupo A_4 son ciclos de longitud 3 o productos de dos trasposiciones

   (b) Probar que un subconjunto de orden 6 de A_4 contiene necesariamente un ciclo de longitud 3.

   (c) Probar que un subgrupo de orden 6 de A_4 contiene necesariamente un producto de trasposiciones disjuntas.

   (d) Probar que si un subgrupo de A_4 es de orden 6 el subgrupo generado por su 3-ciclo es normal en él.

   (e) Probar que el conjugado de un 3-ciclo por un par de trasposiciones de A_4 es un 3-ciclo de soporte diferente.

   (f) Deducir que el grupo A_4 no posee subgrupos de orden 6, por lo que el recíproco del teorema de Lagrange es falso.

   Esquema de solución:

   (a) Al descomoponer en producto de ciclos disjuntos, no caben longitud 4 por paridad; si tenemos un ciclo de longiutud 3 hemos acabado; puede haber productos de dos transposiciones, pero sólo una no por paridad.

   (b) Sólo hay 3 productos de 2 transposiciones, con la identidad hago 4, los otros dos elementos deben ser 3-ciclos.

   (c) Con cada 3-ciclo $(a\ b\ c)$ estará su inverso $(a\ c\ b)$. Luego a base de 3-ciclos tendré 1,3 5,7,9 elementos, pero nunca 6.

   (d) Es de índice 2.

   (e) La situación es

   $$(a\ b)(c\ d)(a\ b\ c)(a\ b)(c\ d) = (b\ a\ d)$$

   o

   $$(a\ c)(b\ d)(a\ b\ c)(a\ c)(b\ d) = (c\ d\ a)$$

(f) El apartado (e) contradice la normalidad del (d).

7. Describir los subgrupos de A_4 indicando cuáles son normales y cuáles no.

   Esquema de solución: En primer lugar, es cómodo listar los elementos de A_4:

   De orden 1: 1

   De orden 2:
$$\{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

   De orden 3:
$$\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$$

   Subgrupos de orden 2 deberán ser de la forma $\{1, \tau\}$, τ de orden 2 y par; se obtiene:
$$\{1, (1\ 2)(3\ 4)\} \quad \{1, (1\ 3)(2\ 4)\} \quad \{1, (1\ 4)(2\ 3)\}$$

   No pueden ser normales por el problema 4:

   Por ejemplo,
$$(1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3)^{-1} = (2\ 3)(1\ 4) \notin \{1, (1\ 2)(3\ 4)\}$$

   De orden 3 serán de la forma $< \sigma >= \{1, \sigma, \sigma^2\}$, σ un 3-ciclo, y no pueden ser normales por el problema 4:
$$< (1\ 2\ 3) > \quad < (1\ 2\ 4) > \quad < (1\ 3\ 4) > \quad < (2\ 3\ 4) >$$

   Por ejemplo,
$$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3)^{-1} = (2\ 3\ 4) \notin < (1\ 2\ 4) >= \{1, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\}$$

   Finalmente, un subgrupo de orden 4 debe tener elementos de orden 2 ó 4. Elementos de orden 4 no hay; así solo puede haber elementos de orden 2, que sean permutaciones pares: es el grupo del rectángulo
$$\{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

   o 4-grupo de Klein. Este subgrupo es normal, pues tiene todas las permutaciones de tipo $(2, 2)$.

   No hay más subgrupos de orden 4.

8. Utilizando $(k, j) = (1, k)(1, j)(1, k)$ probar que S_n está generado por las transposiciones $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$

   Esquema de solución: Se ha visto que toda permutación es producto de transposiciones.

9. Utilizando $(1, k+1) = (k, k+1)(1, k)(k, k+1)$ probar que S_n está generado por las trasposiciones $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)$

   Esquema de solución: Probar por inducción sobre k que

   $$(1, k) \in < (1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n) >$$

   y utilizar el problema anterior.

10. Probar que dada una matriz A de orden n,

    $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots a_n^{\sigma n}$$

    Esquema de solución: Se trata de probar que la asignación

    $$A \longrightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots a_n^{\sigma n} = \Delta(A)$$

    es una función determinante que asigna 1 a la matriz identidad.

    Esta última afirmación es simple, pues los sumandos son cero salvo el caso en que $\sigma i = i, \forall i$, en cuyo caso el sumando es 1.

    Ahora,

    $$\Delta(Q_i(s)A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots s a_i^{\sigma i} \cdots a_n^{\sigma n} = s \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots a_n^{\sigma n} = s\Delta(A)$$

    El *percal* está en probar que $\Delta(P_{ij}(t)A) = \Delta(A)$. Al efecto,

    $$\Delta(P_{ij}(t)A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots (a_i^{\sigma i} + t a_j^{\sigma i}) \cdots a_j^{\sigma j} \cdots a_n^{\sigma n}$$

    Basta pues probar que

    $$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots a_j^{\sigma i} \cdots a_j^{\sigma j} \cdots a_n^{\sigma n} = 0$$

    Para ello, consideremos la trasposición $\tau = (i\ j)$

    $$\begin{gathered}\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots a_j^{\sigma i} \cdots a_j^{\sigma j} \cdots a_n^{\sigma n} \\ \| \quad (+) \quad \text{es} \quad \text{conmutativa} \\ \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{(\sigma\tau)} a_1^{(\sigma\tau)1} \cdots a_j^{(\sigma\tau)i} \cdots a_j^{(\sigma\tau)j} \cdots a_n^{(\sigma\tau)n} \\ \| \\ \sum_{\sigma \in S_n} -\epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1} \cdots a_j^{\sigma j} \cdots a_j^{\sigma i} \cdots a_n^{\sigma n}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} &\| \quad (.) \quad \text{es} \quad \text{conmutativo} \\ -&\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_1^{\sigma 1}\cdots a_j^{\sigma i}\cdots a_j^{\sigma j}\cdots a_n^{\sigma n}\end{aligned}$$

Y, en característica diferente de 2, el único elemento que coincide con su opuesto es el 0.