Ejercicios de grupos diédricos

1. Probar que
$$S_3 =< \sigma, \tau \mid o(\sigma) = 3, o(\tau) = 2, \tau\sigma\tau = \sigma^2 >$$
Esquema de solución: $D_3 =< (1\ 2\ 3), (2\ 3)$ tiene orden 6.

2. Probar que $< x >$ es normal en D_n. Describir el grupo cociente.

   Esquema de solución: Calcúlese el índice de $< x >$ en D_n.

3. Probar que la conjugación es un automorfismo.

   Esquema de solución: Se trata de ver que fijado $b \in G$ la asignación $a \longrightarrow bab^{-1}, \forall a \in G$ es un isomorfismo de G en sí. Como consecuencia
$$(bab^{-1})^k = ba^kb^{-1}\, \forall k \in \mathbf{N} \qquad (bab^{-1})^{-1} = ba^{-1}b^{-1}$$
lo que será de utilidad en los próximos ejercicios.

4. Probar que los elementos de D_n de la forma x^ky son de orden 2.

   Esquema de solución: Hacer las cuentas
$$x^kyx^ky = \cdots = x^k(x^{-1})^k = 1$$

5. Probar que para cada divisor k de n, distinto de 2, D_n tiene un único subgrupo cíclico de orden k. Probar además que dicho subgrupo es normal.

   Esquema de solución: Por el problema anterior, su generador es uno de $x, x^2, \ldots$, luego está dentro del cíclico $< x >$. Estos son únicos, luego normales en D_n.

6. Probar que para cada divisor k de n, distinto de 2, D_n contiene una copia[1] de D_k.

   Esquema de solución: El subgrupo $< x^{n/k}, y >$.

7. Probar que
$$x(x^ky)x^{-1} = x^{k+2}y \quad k = 0, \ldots, n-2$$
$$x(x^{n-1}y)x^{-1} = x\,y$$
Esquema de solución:
$$x(x^ky)x^{-1}y = x^{k+1}(y\,x^{-1}y) = x^{k+2}, k = 0, \ldots, n-2$$
Basta multiplicar por y.

   La otra igualdad es directa. El ejercicio se utiliza en los siguientes.

[1] un subgrupo isomorfo a D_k

8. Probar que si n es impar, D_n posee exactamente n subgrupos de orden 2, ninguno de ellos normal.

   Esquema de solución: $< x >$ no posee subgrupos de orden 2, luego los elementos de orden 2 son de la forma $x^k y$. De acuerdo con el problema anterior, estos elementos permutan entre sí por conjugación mediante x, luego no pueden ser normales.

9. Probar que si n es par, D_n posee $n+1$ subgrupos de orden 2, uno de ellos normal y los demás no.

   Esquema de solución: Añadir el elemento de orden 2 de $< x >$. Éste sí es normal.

10. Describir los subgrupos de D_3 y D_4.

    Esquema de solución:

    D_3 tiene orden 6. Así,

    - Subgrupos de orden 2 hay 3; están formados por la identidad y cada una de las tres simetrías respecto de las alturas.
    - Subgrupos de orden 3 hay 1; está formado por la identidad y los dos giros de 120 y 240.

    D_4 tiene orden 8. Así,

    - Subgrupos de orden 2 hay 5; están formados por la identidad y cada uno de los 5 movimientos de orden 2:
      - Giro de 180
      - Las 4 simetrías
    - Subgrupos de orden 4 hay:
      - Uno (sólo) cíclico, que está formado por la identidad y los tres giros de 90, 180 y 270.
      - Los demás están formados por la identidad y tres elementos de orden 2; denominando x al giro de 90 grados e y a una simetría axial:
        - ∗ Si contiene a x^2, notemos que al contemplar otro elemento tendrá necesariamente su producto, luego:

          (a) $\{1, x^2, y, x^2y\}$

          (b) $\{1, x^2, xy, x^3y\}$
        - ∗ Si no contiene a x^2, quedan 4 subconjuntos de 3 elementos de orden 2. Los escribimos y vemos lo que pasa

          (a) $\{1, y, xy, x^2y\}$ Debería contener a $xyy = x$ de orden 4, luego no vale.

          (b) $\{1, y, xy, x^3y\}$ Idem.

          (c) $\{1, y, x^2y, x^3y\}$ Debería contener a $x^3yy = x^3$ de orden 4, luego no vale.

(d) $\{1, xy, x^2y, x^3y\}$ Debería contener a $xyx^2y = xx^2 = x^3$ de orden 4, luego tampoco vale.

En resumen, sólo hay tres subgrupos de orden 4, uno cíclico y otros dos isomorfos al grupo del rectángulo.

Puede el lector interesado continuar con D_5 y D_7, que por ser 5 y 7 primos le van a dar poco trabajo; asimismo D_6 parece que se describe como D_4.

11. Se dice centro de un grupo a

$$\mathbf{Z}(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$$

Probar que el centro de un grupo es invariante por automorfismos, y, como consecuencia, es normal.

Esquema de solución: Sea f un automorfismo de G.

Complétese

$$a \in \mathbf{Z}(G) \Longrightarrow \cdots f^{-1}(a)b = bf^{-1}(a),\ \forall b \in G \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow a \in f(\mathbf{Z}(G))$$

$$a \in f(\mathbf{Z}(G)) \Longrightarrow \cdots ab = ba,\ \forall b \in G \Longrightarrow a \in \mathbf{Z}(G)$$

12. Describir el centro del grupo diédrico de grado n.

Esquema de solución:

$$1 \neq x^k y \in \mathbf{Z}(D_n) \Longrightarrow (x^k y)\, y = y\, (x^k y) \Longrightarrow x^k = (x^k)^{-1}$$
$$1 \neq x^k \in \mathbf{Z}(D_n) \Longrightarrow x^k\, y = y\, x^k \Longrightarrow x^k = y\, x^k\, y \Longrightarrow x^k = (x^k)^{-1}$$
$$x^k = (x^k)^{-1} \Longrightarrow o(x^k) = 2$$

Por tanto, si n es impar, $\mathbf{Z}(D_n) = 1$.

En el caso par, es claro ya que $x^{n/2}$ conmuta con todos. Veamos que $x^{n/2}y$ no conmuta con x.

Al efecto,

$$x\,(x^{n/2}y) = (x^{n/2}y)\,x \iff x^{n/2}\,(x\,y) = x^{n/2}(y\,x) \iff x\,y = y\,x \iff x = x^{-1}$$

Pero esto contradice $n > 2$.

13. Utilizando la relación $x(x^k y)x^{-1} = x^{k+2}y$, probar que si n es impar los únicos subgrupos normales de D_n son los de C_n, y que si n es par los únicos subgrupos normales de D_n fuera de C_n son los diédricos de grado $n/2$,

$$< x^2, y > \quad < x^2, xy >$$

Esquema de solución: Es claro que los subgrupos de C_n son normales en D_n por su unicidad.

Si n es impar y N es un subgrupo normal de D_n fuera de C_n, N debe contener un elemento de la forma $x^k y, k \geq 0$. Por tanto, $x(x^k y)x^{-1} = x^{k+2}y \in N$. Iterando, $y, xy \in N$, luego su producto $xyy = x \in N$, y N llena D_n.

Supongamos ahora n par, y sea N un subgrupo normal de D_n fuera de C_n; sea $x^k y \in N$.

- Si k es impar, $x^{n-1}y, xy, x^3y, \ldots \in N$. El producto $xyx^{n-1}y = x^2 \in N$ y
$$\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, xy, x^3y, \ldots, x^{n-1}y\} \subseteq N$$
Por tanto,
$$\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, xy, x^3y, \ldots, x^{n-1}y\} = N$$
ó
$$\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, xy, x^3y, \ldots, x^{n-1}y\} \subsetneq N$$
La primera posibilidad da el subgrupo de índice 2, $< x^2, xy >$; y la segunda posibilidad obliga a ser $N = D_n$.

- Si k es par,
$$\{x^ky, x^{k+2}y, \ldots, x^ny = y, x^2y, x^4y, \ldots, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, 1\} \subseteq N$$
Por tanto,
$$\{x^ky, x^{k+2}y, \ldots, x^ny = y, x^2y, x^4y, \ldots, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, 1\} = N$$
ó
$$\{x^ky, x^{k+2}y, \ldots, x^ny = y, x^2y, x^4y, \ldots, x^2, x^4, \ldots, x^{n-2}, 1\} \subsetneq N$$
La primera posibilidad da el subgrupo de índice 2, $< x^2, y >$; y la segunda posibilidad obliga a ser $N = D_n$.