Ejercicios de subgrupos de Sylow

1. Probar que todo grupo abeliano tiene un único p-Sylow, para cada primo p.

2. Probar que no puede haber grupos simples de órdenes 148 ni 56.

   Esquema de solución: $148 = 2^2\,37$ luego sólo hay un 37-Sylow. Análogamente, $56 = 2^3\,7$ da un único 7-Sylow u 8; en este caso, contando elementos sólo quedan 7 disponibles que me darán un único 2-Sylow.

   Otros órdenes de grupos no simples son $28, 312, 255, 130, \ldots$

3. Probar que si p y q son dos primos no hay grupos simples de orden pq.

   Esquema de solución: Si $p < q$ sólo hay un q-Sylow.

4. Probar que un grupo de orden 6 es cíclico o (isomorfo a) S_3.

   Esquema de solución: Si es abeliano tiene un x de orden 3 y un y de orden 2, luego $o(xy) = 6$. Si no es abeliano, tiene un único 3-Sylow, $< x >$, y 3 2-Sylows conjugados; por tanto, existe un elemento y de orden 2 que no conmuta con x, luego G contiene a

   $$< x, y \mid o(x) = 3, o(y) = 2, yxy = x^2 >$$

   que es isomorfo a S_3.

5. Probar que todo grupo G de orden 15 es cíclico.

   Esquema de solución: Sólo hay un 3-Sylow $< x >$ y un 5-Sylow $< y >$. Por tanto, $< x >< y >$ es subgrupo de G. Por órdenes, $< x >< y >= G$ Ahora bien x e y conmutan por Sylow, luego G es abeliano; finalmente, $o(xy) = 15$ y G es cíclico.

6. Probar que C_{mn} es producto directo de sus subgrupos C_m y C_n si y sólo si $(m, n) = 1$ ¿Es cierto que todo grupo de orden $mn, (m, n) = 1$ es cíclico?

   Esquema de solución: El directo, es consecuencia del teorema de Cauchy, pues si $p \mid m, n$, C_m y C_n contienen cada uno un subgrupo de orden p, lo quye contradice la unicidad en C_{mn}.

   Recíprocamente,

   $$(m, n) = 1 \Longrightarrow C_m \cap C_n = 1 \Longrightarrow C_m C_n = C_{mn} \Longrightarrow C_{mn} = C_m \times C_n$$

   Cuidado!! No se puede afirmar que todo grupo de orden $mn, (m, n) = 1$ sea cíclico. Contraejemplo: S_3.

7. Probar que si P es un p-Sylow de G y $N_G(P) \leq S \leq G$, $N_G(S) = S$.

   Esquema de solución: Sea $x \in N_G(S)$. Entonces, P y P^x son p-Sylows de S; por tanto, existe $s \in S$ tal que $P^s = P^x$ y $xs^{-1} \in N_G(P) \leq S$; necesariamente, $x \in S$.

8. [Argumento de Frattini] Sea M un subgrupo normal de G y P un p-Sylow de M. Probar que $G = MN_G(P)$.

   Esquema de solución: Sea $g \in G$; así, P y $P^g \leq M^g = M$ son p-Sylows de M, luego existe $m \in M$ tal que $P^m = P^g$. Por tanto, $gm^{-1} \in N_G(P)$ y $g \in MN_G(P)$.

9. Probar que dos p-Sylows distintos de un subgrupo S de G no pueden estar contenidos en el mismo p-Sylow de G.

   Esquema de solución:

   $$P_1, P_2 \leq P \implies\ < P_1, P_2 > \leq P \cap S$$

   y $< P_1, P_2 >$ es p-Sylow de S conteniendo a ambos. No queda más remedio que $P_1 = P_2$

10. Probar que el número de ciclos (distintos) de longitud k en S_n es

   $$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k}$$

   Esquema de solución: Se trata de variaciones de n elementos tomados de k en k. Ahora bien, cada ciclo así contado está repetido k veces.

   Otra forma: Por inducción sobre n, es obvio el caso $n = 2$; sea $n > 2$:

   Si $k = n$, se trata de contar los que empiezan por 1 y salen $(n-1)!$ que da la fórmula.

   Supongamos $k < n$; entonces, están los que terminan en n más los que no tienen al n. De los primeros hay V_{n-1}^{k-1} y los segundos son los ciclos de grado $n-1$ y longitud k, luego inductivamente V_{n-1}^{k}/k. Total:

   $$V_{n-1}^{k-1} + \left(V_{n-1}^{k}/k\right) = (n-1)\cdots[(n-1)-(k-1)+1)] + \frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k} =$$

   $$= (n-1)\cdots(n-(k-1)) + \frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k}$$

   $$= \frac{k(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k} + \frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k}$$

   $$= \frac{(n-1)\cdots(n-(k-1))[k+(n-k)]}{k} = \frac{(n-1)\cdots(n-(k-1))n}{k}$$

11. Describir los subgrupos de Sylow de S_4

   Esquema de solución: Puesto que el orden de S_4 es $24 = 2^3\,3$, los 3-Sylow deben ser cíclicos de orden 3, generados por 3-ciclos. Puede haber 1 ó 4. Salen 4:

   $$< (1\ 2\ 3) >, < (1\ 2\ 4) >, < (1\ 3\ 4) >, < (2\ 3\ 4) >$$

y los 2-Sylow deben ser D_4, generados por un 4-ciclo y una trasposición. Puede haber 1 ó 3. Salen 3:

$$< (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4) >, < (1\ 2\ 4\ 3), (2\ 3) >, < (1\ 3\ 2\ 4), (3\ 4) >$$

Compruebe el lector que los tres son diferentes (¡eso sí conjugados!).

12. Describir los subgrupos de Sylow de S_5

    Esquema de solución: El orden de S_5 es $120 = 2^3\, 3\, 5$

    - Los 5- Sylows deben ser cíclicos de orden 5, generados por un 5-ciclo. Puede haber $1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots$, pero sólo $1, 6$ son divisores de 24. Salen 6:

    $$< (1\ 2\ 3\ 4\ 5) >$$

      y sus conjugados por trasposiciones:

    $$\begin{aligned} &< (1\ 2\ 3\ 4\ 5) >^{(1\ 2)} = < (2\ 1\ 3\ 4\ 5) > = < (1\ 2\ 5\ 4\ 3) > \\ &< (1\ 2\ 3\ 4\ 5) >^{(1\ 3)} = < (3\ 2\ 1\ 4\ 5) > = < (1\ 2\ 3\ 5\ 4) > \\ &< (1\ 2\ 3\ 4\ 5) >^{(1\ 4)} = < (4\ 2\ 3\ 1\ 5) > = < (1\ 2\ 5\ 3\ 4) > \\ &< (1\ 2\ 3\ 4\ 5) >^{(1\ 5)} = < (5\ 2\ 3\ 4\ 1) > = < (1\ 2\ 4\ 5\ 3) > \\ &< (1\ 2\ 3\ 4\ 5) >^{(2\ 5)} = < (1\ 5\ 3\ 4\ 2) > = < (1\ 2\ 4\ 3\ 5) > \end{aligned}$$

      La observación directa sobre los generadores dice que son distintos dos a dos.

    - Los 3-Sylow deben ser cíclicos de orden 3, generados por 3-ciclos. Puede haber $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40$, pero sólo $1, 4, 10, 40$ son divisores de 40. Salen 10:

    $$< (1\,2\,3) >, < (1\,2\,4) >, < (1\,2\,5) >, < (1\,3\,4) >, < (1\,3\,5 >, < (1\,4\,5) >$$

    $$< (2\ 3\ 4) >, < (2\ 3\ 5) >< (2\ 4\ 5) >, < (3\ 4\ 5) >$$

      No puede haber 40, pues necesitaría 80 3-ciclos y eso es mucha bici en S_5.

    - Los 2-Sylow deben ser D_4, generados por un 4-ciclo y una trasposición. Puede haber $1, 3, 5, 15$. Son de la forma:

    $$< (a\ b\ c\ d), (c\ d) > = \{1, (a\ b\ c\ d), (a\ c)(b\ d), (a\ d\ c\ b), (b\ d), \ldots\}$$

      Puesto que tenemos $V_5^4/4 = 30$ 4-ciclos salen 15 2- Sylows.