Ejercicios de grupos resolubles

1. Calcular D'_n.

   Esquema de solución: $[x, y] = x^2 \in D'_n$. Por tanto, $< x^2 > \leq D'_n$.

   Recíprocamente, $D'_n =< [x^r y, x^s y] = x^{2(r-s)}, [x^r, x^s y] = x^{2r} > \leq < x^2 >$.

   Así, $D'_n =< x^2 >$ que es $C_{n/2}$, si n es par y C_n en caso contario..

2. Calcular S'_4

   Esquema de solución: S_4 no es abeliano, luego el 1 queda descartado. Puesto que A_4 da cociente abeliano y el único subgrupo normal de éste es el grupo de Klein V, $S'_4 = A_4$ ó $S'_4 = V$.

   Ahora bien
   $$[(1\ 2), (1\ 3)] = (1\ 2\ 3) \notin V \Longrightarrow S'_4 = A_4$$

3. Calcular la serie derivada de los grupos simétricos, alternados y diédricos. Deducir cuáles son resolubles y cuáles no.

   Esquema de solución:
   $$1 \lhd S_2 \quad 1 \lhd A_3 \lhd S_3 \quad 1 \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4 \quad 1 \neq A_n \lhd S_n$$
   $$1 \lhd < x^2 > \lhd D_n$$

4. Probar que todo p-grupo finito es resoluble.

   Esquema de solución: Razonaremos por inducción sobre el orden. Puesto que $1 \neq Z(G)$, $G/Z(G)$ es resoluble y al ser $Z(G)$ abeliano, es resoluble y G lo es.

5. Probar que todo p-grupo finito admite una serie normal
   $$Z_0 = 1 \lhd Z_1 \lhd \cdots \lhd Z_k \lhd \cdots \lhd Z_r = G$$
   tal que $Z_k/Z_{k-1} = Z(G/Z_{k-1})$

   Recibe el nombre de serie central ascendente[1]. Grupos en los que esta serie acaba en G reciben el nombre de grupos nilpotentes[2].

   Esquema de solución:

   Basta notar que el centro de un p-grupo finito es no trivial por lo que $Z_k \subsetneq Z_{k+1}$.

   Nótese que
   $$Z_k/Z_{k-1} = Z(G/Z_{k-1}) \Longrightarrow Z_k/Z_{k-1} \lhd G/Z_{k-1} \Longrightarrow Z_k \lhd G$$

[1] superior para algunos autores

[2] Los próximos ejercicios están destinados a probar la coherencia de este nombre

6. Probar que $G = A_1 \times \cdots \times A_n \Longrightarrow A_i \leq C_G(\prod_{j \neq i} A_j)$

   Esquema de solución: Sea $B = \prod_{j \neq i} A_j$ Por normalidad, $[a_i, b] \in A_i \cap B = 1$ Como consecuencia
$$a_1 \cdots a_n = a_{\sigma 1} \cdots a_{\sigma n} \, \forall \sigma \in S_n$$

7. Probar que $G = A_1 \times \cdots \times A_n \Longrightarrow Z(G) = Z(A_1) \times \cdots \times Z(A_n)$

   Esquema de solución: Es suficiente probar el caso $n = 2$ y aplicar inducción. Así, sea $G = A \times B$. Por el problema anterior, $Z(A)$ y $Z(B)$ son subgrupos normales de G y puesto que se cortan trivialmente, el producto es directo y el enunciado tiene sentido.

   Ahora,
$$\begin{aligned} ab \in Z(G) &\iff aba_1b_1 = a_1b_1ab \, \forall a_1 \in A, \forall b_1 \in B \iff \\ &\iff aa_1bb_1 = a_1ab_1b \iff \\ &\iff (a_1a)^{-1}(aa_1) = (b_1b)(bb_1)^1 \in A \cap B = 1 \iff \\ &\iff aa_1 = a_1a \quad bb_1 = b_1b \iff a \in Z(A), b \in Z(B) \end{aligned}$$

8. Con las notaciones anteriores, probar que
$$G = A_1 \times \cdots \times A_n \Longrightarrow Z_i(G) = Z_i(A_1) \times \cdots \times Z_i(A_n)$$

   Esquema de solución: Por inducción sobre n, es suficiente probar el caso $n = 2$; sea pues $G = A \times B$.

   En primer lugar, $Z_i(A)$ es normal en A y conmuta con todo B, luego es normal en G; análogamente, $Z_i(B)$ es normal en G;como se cortan trivialmente, su producto es directo y el enunciado tiene sentido.

   Debemos ver que
$$Z_i = Z_i(A) \times Z_i(B) \quad \forall i$$
   Por inducción sobre i, el resultado es obvio si $i = 0$.

   Supongamos $Z_{i-1} = Z_{i-1}(A) \times Z_{i-1}(B)$ y veamos que
$$(Z_i(A) \times Z_i(B))/(Z_{i-1}(A) \times Z_{i-1}(B)) \stackrel{?}{=} Z[(A \times B)/(Z_{i-1}(A) \times Z_{i-1}(B))]$$
   Simplificando la notación: $A_i = Z_i(A), B_i = Z_i(B)$, se trata de ver que
$$(A_i \times B_i)/(A_{i-1} \times B_{i-1}) \stackrel{?}{=} Z[(A \times B)/(A_{i-1} \times B_{i-1})]$$
   "$\subseteq$": Con las notaciones obvias,
$$\begin{aligned} \overline{a_ib_i}\,\overline{ab} &= \overline{a_ib_iab} = \overline{a_iab_ib} = \overline{aa_ia_{i-1}bb_ib_{i-1}} = \overline{aba_ia_{i-1}b_ib_{i-1}} = \\ &= \overline{aba_ia_{i-1}b_ib_{i-1}} = \overline{ab}\,\overline{(a_ib_i)(a_{i-1}b_{i-1})} = \overline{ab}\,\overline{(a_ib_i)} \end{aligned}$$
   "$\supseteq$": Sea $\overline{xy} \in Z[(A \times B)/(A_{i-1} \times B_{i-1})$. Queremos ver que
$$\overline{xy} \in (A_i \times B_i)/(A_{i-1} \times B_{i-1})$$

Veremos que

$$x \in A_i \quad y \in B_i$$

Por definición de A_i y B_i, ello equivale a que

$$xA_{i-1} \in Z(A/A_{i-1}) \quad yB_{i-1} \in Z(B/B_{i-1})$$

Es decir, se trata de ver que

$$xA_{i-1}aA_{i-1} = aA_{i-1}xA_{i-1} \, \forall a \in A \quad yB_{i-1}bB_{i-1} = bB_{i-1}yB_{i-1} \, \forall b \in B$$

O lo que es lo mismo,

$$xax^{-1}a^{-1} \in A_{i-1} \, \forall a \in A \quad yby^{-1}b^{-1} \in B_{i-1} \, \forall b \in B$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \overline{xy}\,\overline{ab} &= \overline{ab}\,\overline{xy} \Longrightarrow \overline{xyab} = \overline{abxy} \Longrightarrow \overline{xayb} = \overline{axby} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow xayb(axby)^{-1} \in (A_{i-1} \times B_{i-1}) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow xayby^{-1}b^{-1}x^{-1}a^{-1} \in (A_{i-1} \times B_{i-1}) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow xax^{-1}a^{-1}yby^{-1}b^{-1} \in (A_{i-1} \times B_{i-1}) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow xax^{-1}a^{-1} \in A_{i-1} \quad yby^{-1}b^{-1} \in B_{i-1} \end{aligned}$$

Nótese que este resultado engloba al del ejercicio anterior, por lo que quedaría superfluo.

Se ha puesto como un mero entrenamiento.

9. Probar que si $G = A_1 \times \cdots \times A_n$ y los A_i son nilpotentes, G lo es.

   Esquema de solución: Sea $Z_{r_i}(A_i) = A_i$ y $r = \max(r_1, \ldots, r_n)$. Poniendo

   $$Z_k(A_i) = A_i, \forall k > r_i$$

   la s series son centrales ascendentes y,

   $$Z_r(G) = Z_r(A_1) \times \cdots \times Z_r(A_n) = A_1 \times \cdots \times A_n = G$$

10. Probar que si G es nilpotente,

    $$S \subsetneq G \Longrightarrow S \subsetneq N_G(S)$$

    Esquema de solución: Sea $(Z_i(G))$ la serie central ascendente en G:

    $$S \subsetneq G \Longrightarrow \exists i, Z_{i-1}(G) \subseteq S, Z_i(G) \not\subseteq S$$

    Dado $a \in Z_i(G) \setminus S$, veremos que $a \in N_G(S)$. Al efecto, para cada $s \in S$,

    $$\begin{aligned} asa^{-1}Z_{i-1}(G) &= aZ_{i-1}(G)sZ_{i-1}(G)a^{-1}Z_{i-1}(G) = sZ_{i-1}(G) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow asa^{-1} = sz, z \in Z_{i-1}(G) \subseteq S \Longrightarrow asa^{-1} \in S \end{aligned}$$

11. Probar que un grupo finito G es nilpotente[3] si y sólo si sus p-subgrupos de Sylow son normales.

    Esquema de solución: Sea P un p-Sylow; si $P = G$ es normal y si $P < G$, sea $S = N_G(P)$. Sabemos que $S = N_G(S)$, luego por el problema anterior $S = G$ y P es normal en G. El recíproco es consecuencia de que el producto directo de nilpotentes lo es.

12. Probar que A_4 y S_3 no son nilpotentes.

    Esquema de solución: A_3 no conmuta con todos, luego el centro de S_3 es trivial. Asimismo, V no conmuta con los 3-Sylow de A_4 y el centro de A_4 es trivial.

    Las series centrales ascendentes ni tan siquiera arrancan.

    También es claro que los 2-Sylows de S_3 y los 3-Sylows de A_4 no son normales, pues no son únicos.

13. Probar que todo grupo abeliano es nilpotente y que éstos son resolubles.

    Esquema de solución: $Z_k/Z_{k-1} = Z(G/Z_{k-1})$ es abeliano, luego la serie central ascendente es de cocientes abelianos.

    También es claro que los p-Sylows de un abeliano son normales.

    Notemos que A_4 es resoluble no nilpotente y que D_4, cualquier p-grupo no abeliano, es no abeliano.

[3] Y ahora cuadra la denominación con las anteriores hojas de problemas