Los primeros conceptos

1. Pruébese que en un grupo el neutro y el simétrico (de cada elemento) son únicos.

   Esquema de solución:

   Si b es neutro, es idempotente y designando por b' un simétrico de b, complétese

   $$b^2 = b \Longrightarrow b'b^2 = b'b \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow b = e$$

   Si b y c son simétricos de a, complétese

   $$b = eb = (ca)b = \cdots = ce = c$$

2. Pruébese que en un grupo G, el neutro 1_G es el único elemento idempotente:

   $$a^2 = a \iff a = 1_G$$

   Esquema de solución: Complétese

   $$a^2 = a \iff a^{-1}a^2 = a^{-1}a \iff \cdots \iff a = 1_G$$

3. Pruébese que en un grupo G, $(a^{-1})^{-1} = a$ y $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

   Esquema de solución: Complétese

   $$(a^{-1})a = \cdots$$

   $$(b^{-1}a^{-1})(ab) = \cdots = 1_G$$

4. Pruébese que en un grupo G las ecuaciones $ax = b$, $ya = b$ tiene solución única.

   Esquema de solución:

   Existencia: $x = a^{-1}b, y = ba^{-1}$.

   Unicidad: Complétese

   $$ax = b = ax_1 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x = x_1$$

   Análogamente para $ya = b$.

5. Pruébese que $e\colon (\mathbf{R}, +) \longrightarrow (\mathbf{R}^*, .)$ dado por $e(x) = e^x$ es un isomorfismo de grupos. Describir el isomorfismo inverso.

   Esquema de solución: Que es aplicación biyectiva suele verse en los cursos de cálculo. Que es homomorfismo es plantear

   $$e(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = e(x)e(y)$$

   La inversa es el logaritmo neperiano.

6. Pruébese que $(G,.)$ es un grupo si (y sólo si) cumple:

   - . es asociativa:
   $$a.(b.c) = (a.b).c, \forall a, b, c \in G$$
   - Existe elemento neutro a izquierda:
   $$\exists e \in G \ni e.a = a, \ \forall a \in G$$
   - Existe simétrico a izquierda
   $$\forall a \in G \, \exists \, b \in G \ni b.a = e,$$

   Esquema de solución: Se trata de probar que existen neutro y simétrico a derecha. Notemos que el ejercicio 2 es válido aquí pues sólo hemos utilizado simétrico y neutro a izquierda. Ahora,

   Un simétrico a izquierda lo es a derecha:
   $$a'a = e \Longrightarrow aa' = a(ea') = aea' = a(a'a)a' = (aa')(aa')$$
   Por tanto, (aa') es idempotente y es el neutro.

   El neutro a izquierda e lo es a derecha: dado a sea b tal que $ab = ba = e$. Entonces,
   $$a = ea = (ab)a = a(ba) = ae$$

7. Construir la tabla del grupo simétrico de grado 3.

   Esquema de solución:

   Se trata de cumplimentar algo así:

$\circ$	1	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
1	1	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	1	(1 3 2)	(1 2 3)	(2 3)	(1 3)
(1 3)	(1 3)		1			
(2 3)	(2 3)			1		
(1 2 3)	(1 2 3)					1
(1 3 2)	(1 3 2)				1	

   Recordemos que $x\colon G \longrightarrow G$ dada por $y \longrightarrow xy$ es una biyección y cada línea es una permutación de los elementos del grupo.

8. Idem del grupo del cuadrado (movimientos del plano que dejan fijo un cuadrado (... y todos)

   Esquema de solución: Análogamente, el grupo es
   $$\{1, x, x^2, x^3, y, z, t, u\}$$
   donde

   - x es el giro de 90 grados.

- y es la simetría respecto de la vertical que lo parte en dos
- z es la simetría respecto de la diagonal que une el vértice superior izquierdo con el inferior derecho
- t es la simetría respecto de la horizontal que lo parte en dos
- u es la simetría respecto de la diagonal que une el vértice superior derecho con el inferior izquierdo

$\circ$	1	x	x^2	x^3	y	z	t	u
1	1	x	x^2	x^3	y	z	t	u
x	x	x^2	x^3	1	z	t	u	y
x^2	x^2	x^3	1	x	t	u	y	z
x^3	x^3	1						
y	y				1			
z	z					1		
t	t						1	
u	u							1

9. (Asociatividad generalizada) Sea G un grupo. Probar que el producto de n elementos es independiente del orden, sin permutar, en que se asocien de dos en dos. Más precisamente, el conjunto $P_n(a_1, \ldots, a_n)$

$$\{xy \mid x \in P_r(a_1, \ldots, a_r), y \in P_{n-r}(a_{r+1}, \ldots, a_n), r < n\}$$

sólo tiene un elemento.

Esquema de solución: Por inducción sobre n el resultado es obvio para $n = 2$ y cierto por axioma para $n = 3$.

Supongamos $n > 3$ y sean

$$xy, zt \in P_n(a_1, \ldots, a_n)$$

$$x \in P_r(a_1, \ldots, a_r), y \in P_{n-r}(a_{r+1}, \ldots, a_n), r < n$$
$$z \in P_s(a_1, \ldots, a_s), t \in P_{n-s}(a_{s+1}, \ldots, a_n), s < n$$

Si $r = s$ la inducción obliga a ser $x = z$ e $y = t$.

Podemos suponer que $r < s$. Entonces,

$$z = uv, u \in P_r(a_1, \ldots, a_r), v \in P_{s-r}(a_{r+1}, \ldots, a_s)$$

y

$$zt = u(vt), u \in P_r(a_1, \ldots, a_r), vt \in P_{n-r}(a_{r+1}, \ldots, a_n)$$

Por inducción $u = x, vt = y$ y $zt = xy$.

10. Pruébese que en un grupo G, $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$

Esquema de solución: Por inducción sobre n, el resultado es cierto para n=2; para $n > 2$ complétese

$$(a_1 \cdots a_n)^{-1} = [(a_1 \cdots a_{n-1})a_n]^{-1} = \cdots = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$$

11. Pruébese que $(G, .)$ es un grupo si (y sólo si) cumple:

   - G es no vacío.
   - . es asociativa:
   $$a.(b.c) = (a.b).c, \forall a, b, c \in G$$
   - $\forall a, b \in G \, \exists \, x \in G \ni a.x = b$
   - $\forall a, b \in G \, \exists \, y \in G \ni y.a = b$

   Esquema de solución:

   Basta ver que existe neutro a izquierda e, pues la existencia de simétrico a izquierda se obtiene tomando $b = e$.

   Al efecto, sea $a \in G$ y $ea = a$. Dado $b \in G, \exists y \ni ay = b$, Entonces,

   $$eb = eay = (ea)y = ay = b$$

   Nótese que las soluciones de $xa = b$ y $ay = b$, a posteriori, son únicas, a saber, $x = ba^{-1}$, $y = a^{-1}b$. Nótese asimismo la necesidad de solución a ambos lados. Esto plantea la cuestión abierta, al menos para mí, ¿existe un semigrupo con solución para $xa = b$, que no sea grupo?.

12. Pruébese que la partición $\mathbf{Z} = \mathbf{N}^* \cup \{0\} \cup -\mathbf{N}^*$ da una relación de equivalencia no compatible con la suma.