Ejercicios de grupos de orden bajo y subgrupos de Sylow

1. Clasificar los grupos de orden 4.

   Esquema de solución: es un grupo de orden p^2.

2. Probar que el grupo cuaternio tiene exactamente tres subgrupos cíclicos de orden 4 y un único subgrupo cíclico de orden 2, que es el centro.

   Esquema de solución:

   Los tres cíclicos de orden 4 están generados por las matrices J, L, M. Estos son distintos 2 a 2, pues $L \notin < J >$...

   Por otro lado, no hay más elementos de orden 4.

   Ahora elementos de orden 2 sólo está el $-I_2$. Esta matriz está en el centro y las demás no.

3. Probar que hay, salvo isomorfismos, 3 grupos abelianos de orden 8:

   $$C_8 \quad C_4 \times C_2 \quad C_2 \times C_2 \times C_2$$

   Esquema de solución:

   Si hay un elemento de orden 8 ya está.

   Si todos son de orden 2 tengo $\{1, a, b, ab, c, ac, bc, abc\}$ y el subgrupo producto $< a >< b >< c >$ es directo. Por órdenes,

   $$G =< a > \times < b > \times < c >= C_2 \times C_2 \times C_2$$

   Si hay un elemento de orden 4, a , G contiene $\{1, a, a^2, a^3\}$; necesito uno fuera b. Si el orden de b es 2, el producto $< a >< b >$ es directo. Por órdenes, $G =< a > \times < b >= C_4 \times C_2$

   Si el orden de b fuera 4

   $$G = \{1, a, a^2, a^3 = a^{-1}, b, b^3 = b^{-1}, ab, (ab)^3 = (ab)^{-1}\}$$

   Por tanto,

   $$a^2 = b^2 = (ab)^2 \Longrightarrow a^2 = a^2b^2 \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow o(b) = 2$$

   una contradicción.

4. Probar que hay, salvo isomorfismos, 2 grupos abelianos de orden 12:

   $$C_{12} \quad C_6 \times C_2$$

   Esquema de solución: Por la teoría de Sylow hay un subgrupo de orden 4 y uno de orden 3; además G es producto directo de ambos.

   Si el de orden 4 es cíclico, tenemos

   $$o(x) = 4, o(y) = 3 \Longrightarrow o(xy) = 12$$

Si el de orden 4 es el V de Klein, tomo un elemento a de orden 2 en V y el generador b de C_3; entonces, ab tiene orden 6. Sea $c \neq a$ en V. Así, $< ab >$ sólo tiene un elemento de orden 2 que es a y el producto $< ab >< c >$ es directo. Por órdenes, $G =< ab > \times < c >= C_6 \times C_2$

5. Probar que en un p-grupo G todo subgrupo normal (no trivial) corta no trivialmente al centro.

   Esquema de solución:

   Puesto que N es normal, consideramos la acción de G sobre N por conjugación. El neutro forma una órbita de tamaño 1, las demás órbitas tiene tamaño p^m. Al ser la suma de tamaños potencia de p, debe haber otra órbita, al menos, con un único elemento. Ese elemento, de N, conmuta con todos.

6. Probar que un grupo de orden p^m posee un subgrupo normal de orden $p^r, r = 0, \ldots, m$

   Esquema de solución:

   Sólo falta ver la normalidad. Podemos, pues, suponer que G no es abeliano. Sea $1 \neq p^s$ el orden del centro. Puesto que los subgrupos del centro son normales en el grande, sólo hay que ocuparse de las potencias mayores que s. Entonces, puede aplicarse inducción a $G/Z(G)$.

7. Probar que todo p-subgrupo normal está incluido en cualquier p-Sylow. Esquema de solución:

   $N \leq P_1$ para algún P_1; dado otro $P_2 = P_1^g$, luego $N = N^g \leq P_1^g = P_2$

8. Probar que G es producto directo de sus p-subgrupos de Sylow, para todo p si y sólo si cada p-subgrupo de Sylow es normal. Grupos finitos en estas condiciones se llaman nilpotentes.

   Esquema de solución: Si es producto directo son normales. Para elrecíproco,

   podemos considerar el producto de p_i-Sylows por normalidad. Por cuestión de órdenes $P_i \cap \prod P_{j \neq i} = 1$ y el producto es directo. La igualdad a G es nuevamente cuestión de órdenes.

9. Probar que si P es un p-Sylow de G y N es normal:

   (a) PN/N es p-Sylow de G/N
   (b) $P \cap N$ es p-Sylow de N
   (c) $N_G(P)N/N = N_{G/N}PN/N$

   Esquema de solución: a) Es cuestión obvia de índices.

   b)

   $$[N : P\cap N] = [PN : P\cap N]/[PN : N] = [PN : P\cap N]/[P : P\cap N] = [PN : P]$$

   Nótese la exigencia de ser N normal en G.

Sean P_1, P_2 dos p-Sylows distintos[1] de un grupo G. Entonces, si $P_1 \cap P_2$ fuera un p-Sylow de P_2, por órdenes se tendría $P_1 \cap P_2 = P_2$, lo que daría $P_2 \leq P_1$ y nuevamente por órdenes $P_1 = P_2$ contradicción.

c) El "$\subseteq$" es directo. Recíprocamente, sea $xN \in N_{G/N} PN/N$; así, $(PN/N)^{xN} = PN/N$; por tanto, $P^x \leq PN$; así, P y P^x son p-Sylows de PN, luego son conjugados en él y existe $zn \in PN$ tal que $P^n = P^{zn} = P^x$; ahora, $xn^{-1} \in N_G(P)$ y $xN \in N_G(P)N/N$.

[1]situación muy habitual, por ejemplo en S_4