

### Ejercicios sobre el primer teorema de estructura

1. Describir todos los grupos abelianos de orden 360.

Esquema de solución:

|       |         |         |       |                  |                             |
|-------|---------|---------|-------|------------------|-----------------------------|
| $2^3$ | $2^2.2$ | $2.2.2$ | $C_8$ | $C_4 \oplus C_2$ | $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$ |
| $3^2$ | $3.3$   |         | $C_9$ | $C_3 \oplus C_3$ |                             |
| $5$   |         |         | $C_5$ |                  |                             |

seleccionando uno de cada fila y columna, y reagrupando primos

$$C_8 \oplus C_9 \oplus C_5 = C_{360}$$

$$C_8 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 = C_{120} \oplus C_3$$

$$C_4 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 = C_{180} \oplus C_2$$

$$C_4 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 = C_{60} \oplus C_6$$

$$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_5 = C_{90} \oplus C_2 \oplus C_2$$

$$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_5 = C_{30} \oplus C_6 \oplus C_2$$

2. Sea  $G = \langle b \rangle$  un grupo cíclico de orden  $d = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$ . Encontrar  $(b_1, \dots, b_r)$  tales que

$$G = \bigoplus_{i=1}^r \langle b_i \rangle \quad o(b_i) = p_i^{m_i}$$

Esquema de solución: Sean  $d_i = d/p_i^{m_i}$  y  $b_i = d_i b$ . Es claro que  $p_i^{m_i} b_i = p_i^{m_i} (d_i b) = db = 0$ ; por tanto,  $o(b_i) = p_i^{n_i}$ ,  $n_i \leq m_i$ ; asimismo,

$$(d_1, \dots, d_r) = 1 \implies z_1 d_1 + \dots + z_r d_r = 1$$

Luego,

$$b = 1.b = (z_1 d_1 + \dots + z_r d_r)b = z_1 b_1 + \dots + z_r b_r$$

Ahora,

$$\left(\prod_{i=1}^r p_i^{n_i}\right)b = 0 \implies \prod_{i=1}^r p_i^{m_i} \mid \prod_{i=1}^r p_i^{n_i} \implies m_i = n_i$$

En definitiva,  $\langle b_i \rangle$  es el  $p_i$ -Sylow de  $\langle b \rangle$ .

3. Sean  $G = \langle D = \text{diag}[2, 1], P = P_{12}(1) \rangle$  y  $H = \{A \in G \mid a_{11} = 1 = a_{22}\}$ . Probar que  $H$  no es de tipo finito.

Esquema de solución: Es claro que las matrices de  $G$  son racionales y las de  $H$  son triangulares, luego éstas son de la forma  $P_{12}(t)$ ,  $t \in \mathbf{Q}$ .

Ahora, dado un número entero  $z$ ,  $D^z P D^{-z} = P_{12}(2^z) \in H$ .

Si  $H = \langle P_{12}(t_1), \dots, P_{12}(t_n) \rangle$  entonces,

$$P_{12}(2^z) = P_{12}(t_1)^{z_1} \dots P_{12}(t_n)^{z_n} = P_{12}(z_1 t_1) \dots P_{12}(z_n t_n) = P_{12}(z_1 t_1 + \dots + z_n t_n)$$

Por tanto,  $2^z = z_1 t_1 + \dots + z_n t_n \in \langle t_1, \dots, t_n \rangle \forall z$ , pero esto es imposible.

4. Probar que un grupo abeliano de tipo finito y libre de torsión es libre<sup>1</sup>.

Esquema de solución:  $G = G_T \oplus F$ ,  $F$  libre; luego  $G = F$  libre.

5. Probar que un grupo abeliano libre no nulo  $F$  posee un subgrupo de índice  $n$ , para cada  $n$ .

Esquema de solución:

$$F \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}_x$$

Tómese  $x_o \in X$  y la antiimagen en  $F$  de

$$n\mathbf{Z} \oplus \left( \bigoplus_{x \in X \setminus \{x_o\}} \mathbf{Z}_x \right)$$

---

<sup>1</sup>Sin embargo,  $\mathbf{Q}$  es libre de torsión, pero no libre; lo que ocurre es que no es de tipo finito