Ejercicios sobre el primer teorema de estructura

1. Probar que si F es libre con n generadores su rango es $s \leq n$.

   Esquema de solución: De acuerdo con el primer teorema de estructura

   $$F =< b_1 > \oplus \cdots \oplus < b_s >, s \leq n, o(b_i) = d_i \neq 1$$

   Puesto que F es libre, es libre de torsión y $d_i = 0$; así, $F \cong \mathbf{Z}^s, s \leq n$

2. Sea G un grupo abeliano libre. Probar que son equivalentes:

   (a) P es regular sobre $\mathbf{Z}$.

   (b) Para cada base (v_i) de G, $(w_i) = (v_i)P$ es base de G.

   (c) Existe una base (v_i) de G tal que $(w_i) = (v_i)P$ es base de G.

3. Encontrar una base en el subgrupo G de $\mathbf{Z}^3$ generado por

   $$(1, 0, -1), (2, -3, 1), (0, 3, 1), (3, 1, 5)$$

   Esquema de solución: Sea A la matriz 3×4 cuyas columnas contienen esas ternas. Buscar P y Q regulares tales que PAQ es diagonal. Tómense las r primeras columnas de AQ, donde r es el número de términos no nulos de PAQ. En este caso, $r = 3$ y

   $$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & 7 & -27 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, la base está formada por las columnas de

   $$(AQ^1, AQ^2, AQ^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Encontrar una base en el subgrupo G de $\mathbf{Z}^3$

   $$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0\}$$

   Esquema de solución: En primer lugar calculamos un sistema generador del subgrupo, calculando el núcleo de la matriz de coeficientes. Una vez obtenido el núcleo aplicamos las técnicas del problema anterior.

   En este caso,

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

   $$PAQ = \operatorname{diag}[(1, 2, 0)] \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Así $G =< (3, -3, 1) >$ y no hace falta seguir para localizar la base $\{(3, -3, 1)\}$

5. Dada la matriz
$$M = \begin{pmatrix} 2x-1 & x & x+1 \\ x & x & x^2 \\ x^2+3 & x^2 & 2x^2-3 \end{pmatrix}$$
encontrar P y Q regulares tales que PMQ es la forma normal de Smith S de M.

Esquema de solución:
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -3\,x^3 + x^4 - x^2 + 6\,x \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1/3\,x + 2 & -1/3 \\ 9 + x^3 - 3\,x^2 - x & -x - 15 + \frac{22}{3}\,x^2 - 1/3\,x^4 - x^3 & -4/3\,x + 3 + 1/3\,x^3 - x^2 \end{pmatrix}$$
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -x + 1 - 2/3\,x^2 + 1/3\,x^3 & 1 - 2/3\,x^2 + 1/3\,x^3 \\ 0 & 2 - 1/3\,x^2 - 4/3\,x & 1 - 1/3\,x^2 - 4/3\,x \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Los cálculos han sido efectuados y comprobados con MAPLE V Release 5. Puede verificarse que, efectivamente, P y Q son regulares; de hecho su determinante es -1 y 1 respectivamente.

6. Probar que la relación en $M_{m\times n}(\mathcal{D})$
$$M \sim N \iff PMQ = N, P \in GL(m,\mathcal{D}), Q \in GL(n,\mathcal{D})$$
es de equivalencia.

7. Probar que toda matriz regular A sobre un dominio euclídeo $\mathcal{D}$ es producto de matrices elementales tipo 2 y 3.

   Esquema de solución: Aplicando el teorema de Smith $PAQ = \operatorname{diag}[d_1,\ldots,d_n]$ donde P y Q son producto de matrices elementales. Ahora
$$\det(A) \sim d_1 \cdots d_n \in \mathcal{U}(\mathcal{D})$$
   Por tanto, $d_i \in \mathcal{U}(\mathcal{D})$, para cada i. Podemos, pues conseguir M y N producto de matrices elementales tales que $MAN = I_n$. Así $A = M^{-1}N^{-1}$ es producto de matrices elementales. Basta notar que una matriz elemental tipo 1 es producto de matrices elementales tipo 2 y 3.

8. Probar que la forma canónica de Smith de una matriz sobre un cuerpo es $[I_r, 0]$ donde r es su rango.

   Esquema de solución: Si la forma canónica de Smith es $\operatorname{diag}[d_1,\ldots,d_r,0\ldots,0]$ basta dividir cada fila por d_i.

9. Probar que una matriz de determinante 1 sobre un cuerpo K es producto de matrices elementales tipo 2.

   Esquema de solución:

   Paso 1: *Si A es regular sobre un cuerpo K existen operaciones elementales tipo 2 en las líneas de A que conducen a una matriz diagonal D. Además,* $\det(D) = \det(A)$.

   En efecto, por inducción sobre n es suficiente encontrar operaciones elementales tipo 2 en las líneas de A que conducen a $\operatorname{diag}[b, B]$. Al efecto, si $a_{11} \neq 0$ el caso es sobradamente conocido; en caso contario, $\exists\, a_{ii} \neq 0$; súmese a la fila 1 la i y ahora el nuevo a_{11} es distinto de 0.

   La afirmación sobre los determinantes es consecuencia de que las operaciones elementales tipo 2 no alteran el determinante.

   Paso 2: *Si* $D = \operatorname{diag}[d_1, \ldots, d_n]$ *y* $\det(D) = 1$ *existen operaciones elementales tipo 2 en las líneas de D que conducen a I_n.*

   En efecto, por inducción sobre n, sumamos a la columna 1 la 2 multiplicada por $d_1 d_3 \cdots d_n$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

   Ahora sumando a la primera fila la segunda multiplicada por $1 - d_1$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-d_1)d_2 & \cdots & 0 \\ 1 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

   Operaciones elementales tipo 2 en las líneas conducen a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

   y se aplica inducción a

$$\begin{pmatrix} c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

10. Dado el subgrupo S de $\mathbf{Z}^3$ generado por

$$(2, 1, -3), (1, -1, 2)$$

describir el grupo cociente $\mathbf{Z}^3/S$ como suma directa de grupos cíclicos y/o monógenos, ordenados completamente sus órdenes por divisibilidad.

Esquema de solución: Aplicando la demostración del teorema 10.17, es suficiente calcular los factores invariantes de la matriz entera

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se obtienen matrices P y Q regulares tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que los factores invariantes son $(1, 1)$ y

$$\mathbf{Z}^3/S \cong \mathbf{Z}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$$

Aunque no se pide, la nueva base de $\mathbf{Z}^3/S$ se obtiene mediante

$$(e_1 + S, e_2 + S, e_3 + S)P^{-1} = (0, 0, b)$$