Ejercicios de acciones de grupos

1. Compruébese que las acciones de los ejemplos 3,4,7 y 8 son efectivamente homomorfismos de grupos.
2. Demuéstrense los resultados 4.2, 4.6 y 4.9
3. Dados dos subconjuntos A, B de un grupo G definimos

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

Se pide:

(a)
$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

(b) Si $A, B \leq G$, probar que AB es subgrupo de G si y sólo si $AB = BA$.

(c) Si A o B son subgrupos normales de G, AB es subgrupo de G

Esquema de solución:

(a) Definir $A \times B \longrightarrow AB$ mediante $(a, b) \longrightarrow ab$; en la descomposición canónica de esta aplicación, las clases de equivalencia son

$$[(a, b)] = \{(ac, c^{-1}b) \mid c \in A \cap B\}$$

En efecto,

$$mn = ab \Longrightarrow a^{-1}m = bn^{-1} = c \in A \cap B \Longrightarrow (m, n) = (ac, c^{-1}b)$$

El otro contenido es obvio.

Así todas las clases tienen el mismo tamaño: $|A \cap B|$. Por tanto,

$$|AB| = |(A \times B)/ \sim | = |A \times B|/|A \cap B|$$

(b) Si $AB \leq G$,

$$\begin{aligned} ab \in AB \quad &\Longrightarrow \quad (ab)^{-1} \in AB \Longrightarrow (ab)^{-1} = a_1b_1 \\ &\Longrightarrow \quad ab = (a_1b_1)^{-1} = b_1^{-1}a_1^{-1} \in BA : \implies : AB \subseteq BA \end{aligned}$$

$$ba \in BA \Longrightarrow ba = (1_Gb)(a1_G) \in (AB)(AB) \subseteq AB : \implies : BA \subseteq AB$$

Recíprocamente, $1_G1_G \in AB \Longrightarrow AB \neq \emptyset$

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = a_1(b_1a_2)b_2 = a_1(a_3b_3)b_2 = a_4b_4 \in AB$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$$

4. Decimos que G es producto directo de sus subgrupos A y B si A y B son normales en G, $G = AB$ y $A \cap B = 1_G$. Probar

(a) El grupo cíclico de orden 6 es producto directo de los cíclicos de orden 2 y 3 (que contiene).

(b) S_3 no es producto directo de A_3 por $< (1,2) >$.

5. Probar que si $G/\mathbf{Z}(G)$ es cíclico G es abeliano.

   Esquema de solución:

$$x = u^r z_1 \quad y = u^s z_2 \Longrightarrow xy = (u^r z_1)(u^s z_2) = \cdots = (u^s z_2)(u^r z_1) = yx$$

6. Sea p un número primo y G un grupo abeliano de orden p^2. Probar que G es cíclico o producto directo de dos subgrupos cíclicos de orden p.

   Esquema de solución: Si no es cíclico, es $< x > \times < y >$.

7. Sea p un número primo; probar que todo grupo de orden p^2 es abeliano. Probar asimismo que hay salvo isomorfismos 2 grupos de orden p^2.

   Esquema de solución:

   El centro no es trivial; aplicar los dos problemas anteriores. Definir, entre el grupo abeliano del espacio vectorial $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^2$ y G la correspondencia

$$(\overline{r}, \overline{s}) \longrightarrow x^r y^s$$

   y probar que es un epimorfismo de grupos. La inyectividad sale por órdenes.

8. Sea H un subgrupo de G de índice n. Probar que $[G : \operatorname{core} H]$ es divisor de $n!$.

   Esquema de solución:

   Consíderese la acción de G sobre las clases a izquoerda módulo H. Su núcleo es $\operatorname{core} H$. Así, $G/(\operatorname{core} H)$ es (isomorfo a) un subgrupo de S_n.

9. Sea p el primo más pequeño entre los divisores de $|G|$, probar que todo subgrupo de índice p es normal.

   Esquema de solución:

   Por el problema anterior, $|G/(\operatorname{core} H)| \mid p!$. Así,

$$[G : H] = p \Longrightarrow [H : \operatorname{core} H] = 1 \Longrightarrow H = \operatorname{core} H \lhd G$$

   Nótese el avance respecto a los subgrupos de índice 2.

10. La acción de un grupo G sobre el conjunto A se dice regular si

$$G_a = 1, \forall a \in A$$

   Pruébese que si G es abeliano y transitivo es regular.

   Esquema de solución: Dado $x \in G_a$ y $b \in A$, sea $b = ya$. Entonces,

$$xb = xya = yxa = ya = b$$

   Por tanto, $x = 1$.

11. Pruébese que $G_a^\sigma = G_{\sigma a}\,\forall a \in A\,\forall \sigma \in G$.

12. Sea $\mathcal{E}$ un conjunto y V un espacio vectorial; probar que $\mathcal{E}$ es un espacio afín sobre V si y sólo si el grupo $(V,+)$ actúa transitivamente[1] sobre $\mathcal{E}$.

    Esquema de solución:

    Definir $\varphi\colon (V,+) \longrightarrow (\mathcal{B}(\mathcal{E}),\circ)$ mediante $\varphi(v)(P) = P + v$. La transitividad es consecuencia de los axiomas de espacio afín. Como (V,+) es abeliano, se trata de una acción regular.

    Recíprocamente, si $\varphi\colon (V,+) \longrightarrow (\mathcal{B}(\mathcal{E}),\circ)$ es una acción transitiva definimos

    $$(+)\colon \mathcal{E} \times V \longrightarrow \mathcal{E} \quad \text{mediante} \quad +(P,v) = \varphi(v)(P)$$

    Entonces,

    (a) Dados dos puntos P, Q por transitividad, existe $v \in V$ tal que $\varphi(v)(P) = Q$. Ahora,

    $$\varphi(v)(P) = Q = \varphi(w)(P) \Longrightarrow \varphi(vw^{-1})(P) = P \stackrel{\text{regular}}{\Longrightarrow} vw^{-1} = 1 \Longrightarrow v = w$$

    (b)

    $$+(+(P,v),w) = \varphi(w)(\varphi(v)(P)) = (\varphi(w)\circ\varphi(v))(P) = \varphi(v+w)(P) = +(P,v+w)$$

[1] y, por tanto, regularmente