Ejercicios de gruos abelianos libres

1. Probar que los coeficintes de un elemento como c.l. de una base son únicos; se diecn coordenadas.

2. Encontrar elementos libres en $\mathbf{Z}$ que no son base de $\mathbf{Z}$.

   Esquema de solución: $\{2\}$, ya que $1 \neq z2 \, \forall z \in Z$.

3. Encontrar elementos libres en $\mathbf{Z}$ no prolongables a una base de $\mathbf{Z}$.

   Esquema de solución: $\{2\}$, no es base y cada base tiene sólo un elemento.

4. Probar que si $m \geq 1$, $m\mathbf{Z}$ es un subgrupo propio de $\mathbf{Z}$ del mismo rango.

   Esquema de solución: $1 \in \mathbf{Z} \setminus m\mathbf{Z}$ y m es base de $m\mathbf{Z}$.

5. Encontrar sistemas generadores en $\mathbf{Z}$ que no contienen ninguna base de $\mathbf{Z}$.

   Esquema de solución: $\{2, 3\}$ es s.g. de $\mathbf{Z}$, pues $1 = 3 - 2$, pero ni 3 ni 2 son base de $\mathbf{Z}$.

6. Sea f un homomorfismo del grupo abeliano libre G en el grupo abeliano H. Probar que son equivalentes:

   (a) f es mono

   (b) Toda familia libre se transforma en una familia libre

   (c) Toda base se transforma en una familia libre

   (d) Existe una base que se transforma en una familia libre.

   (e) $\ker f = 0_G$

   Esquema de solución: Mimetizar la demostración de Álgebra Lineal. Nótese que si G es finito carece de familias libres, las hipótesis (b) y (c) se cumplen, pero puede haber homomorfismos no inyectivos. Por tanto, no podemos suprimir la hipótesis de grupo libre para G.

7. Sea f un homomorfismo del grupo abeliano libre G en el grupo abeliano H. Probar que son equivalentes:

   (a) f es iso

   (b) Toda base se transforma en una base

   (c) Existe una base que se transforma en una base

   Esquema de solución: Mimetizar la demostración de Álgebra Lineal. Nótese que si G es finito carece de bases, la hipótesis (b) se cumple, pero puede haber homomorfismos no biyectivos. Por tanto, no podemos suprimir la hipótesis de grupo libre para G.

8. Probar que los racionales no tienen un sistema generador finito.

   Esquema de solución: Sea $\mathbf{Q} =< x_1, \ldots, x_n >$ y $x_i = m_i/n_i$; sea p un primo no divisor de $n_1 \cdots n_r$. Entonces,

   $$1/p = z_1x_1 + \cdots + z_rx_r \Longrightarrow n_1 \cdots n_r = pz$$

   lo que es imposible.

9. Probar que el grupo aditivo $\mathbf{Z}[x]$ es isomorfo al multiplicativo $(Q^+)^*$. Deducir que el conjunto de primos es una base de $(Q^+)^*$.

   Esquema de solución: Consideremos la asignación $x^n \longrightarrow p_{n+1}$ donde

   $$\{p_1, p_2, \ldots\} = \{2, 3, \ldots\}$$

   es la sucesión de números primos.

   Así,

   $$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longrightarrow 2^{a_o} 3^{a_1} \cdots p_{n+1}^{a_n}$$

   es claramente un homomorfismo de grupos, de núcleo 0.

   Ahora, para ver que es epi, sea $q \in Q$ y $q = m/n$. Descomponiendo m y n en factores primos encontraremos fácilmnente la antiimagen.

10. Pruébese que todo grupo abeliano libre es libre de torsión[1]

    Esquema de solución: Sea (x_i) una base e $y = z_1x_1 + \cdots + z_rx_r \neq 0$; así, existe $z_i \neq 0$.

    $$zy = 0 \Longrightarrow z(z_1x_1 + \cdots + z_rx_r) = 0 \Longrightarrow \sum (zz_i)x_i = 0 \,\forall i \Longrightarrow zz_i = 0 \,\forall i \Longrightarrow z = 0$$

[1] sus elementos no nulos son libres