

1. Responde a las siguientes cuestiones

- (a) Define el concepto de signatura de una permutación. Pon un ejemplo.

Ver los apuntes definición 2.10 y alguno de los ejemplos que le siguen.

- (b) Define el concepto de p -subgrupo de Sylow. Aplícalo al grupo cíclico de orden 6.

Ver los apuntes: definición 5.2.

Así, C_6 posee un subgrupo de orden 3 y otro de orden 2.

- (c) Enuncia los teoremas de Sylow. Pon un ejemplo.

Ver los apuntes Teoremas 5.4, 5.6 y 5.7.

C_6 posee un único subgrupo de orden 3 y otro (también único) de orden 2.

- (d) Describe, salvo isomorfismo, los grupos de orden 8 (abelianos y no abelianos).

Los no abelianos son D_4 y el grupo cuaternio Q ; y los abelianos son

$$C_8 \quad C_4 \oplus C_2 \quad C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$$

- (e) Define el concepto de grupo resoluble. Pon un ejemplo razonado de resoluble y otro de no resoluble.

Ver los apuntes definiciones (7.1), (7.2) y los ejemplos y contraejemplos que les siguen.

(2 puntos cada una).

2. Sea G el subgrupo de $M_2(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$ generado por las matrices (A, B, C) donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular sistemas generadores de G que den lugar a las descomposiciones de los dos teoremas de estructura (10 puntos).

$$C = 3A - 2B \implies G = \langle A, B \rangle$$

$$o(A) = 3, o(B) = 2 \implies \langle A \rangle \cap \langle B \rangle = 1 \implies G = \langle A \rangle \oplus \langle B \rangle$$

que es isomorfo (directamente) a

$$C_6 \oplus C_{12}$$

Finalmente,

$$G = \langle 3A \rangle \oplus \langle 2A \rangle \oplus \langle 3B \rangle \oplus \langle 4B \rangle \cong C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_3$$

Esto termina el ejercicio; pudiera haberse aplicado si se desea el procedimiento general:

Puesto que G posee dos generadores, consideramos el epimorfismo φ de $\mathbf{Z}^2$ en G dado por $e_1 \longrightarrow A, e_2 \longrightarrow B$.

Su núcleo es

$$\ker \varphi = \{a, b\} \in \mathbf{Z}^2 \mid aA + bB = (0)$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = (0_{\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}})$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12z_1 & 12z_2 \\ 12z_3 & 12z_4 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 & & & \\ 0 & 1 & 0 & -12 & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -12 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = (0)$$

Sea A la matriz de coeficientes. Entonces,

$$P_{32}(1)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & -12 & \\ 0 & 0 & & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = F$$

$$FP_{13}(6) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = G$$

$$GP_{24}(12) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = H$$

$$HP_{34} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = J$$

$$JP_{35}(-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = K$$

$$KP_{46} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el núcleo de A está generado por las 2 últimas columnas de Q :

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -12 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el núcleo de φ está generado por las 2 columnas de:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, tomando $P = I_2$ y $Q = P_{12}Q_2 - 1$

$$PNQ = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$G = \langle T \rangle \oplus \langle U \rangle \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$$

A fin de buscar las nuevas matrices generadoras, $P^{-1} = I_2$ y, por tanto, $(T, U) = (A, B)P^{-1} = (A, B)$.

Esto da la descomposición correspondiente al primer teorema de estructura. La del segundo se obtiene como en la solución abreviada expuesta al principio.