ALGEBRA II   PRIMER PARCIAL   Junio–2001

1. Responde a las siguientes cuestiones

   (a) Enuncia un resultado que describa con precisión los posibles subgrupos de un grupo cíclico. Aplícalo a $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

   Ver apuntes Teorema 1.7. Así, los subgrupos de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ son los cíclicos de orden $12, 6, 4, 3, 2, 1$:

   $$< 1 >, < 2 >, < 3 >, < 4 >, < 6 >, \{0\}$$

   (b) Define el concepto de signatura de una permutación, Pon un ejemplo.

   Ver apuntes Definición 2.10 y los ejemplos que le siguen.

   (c) Define el concepto de acción de un grupo. Pon un ejemplo.

   Ver apuntes Definición 4.1 y alguno de los 9 ejemplos que le siguen.

   (d) Define el concepto de grupo resoluble. Pon un ejemplo razonado de resoluble y otro de no resoluble.

   Ver apuntes Definición 7.2 y algunos de los ejemplos y contraejemplos que le siguen

   (e) Define el concepto de elementos y subgrupo de torsión de un grupo abeliano. ¿Es lo mismo libre que libre de torsión?

   Ver apuntes Definición 11.1 y Proposición 11.2.

   Ahora $\mathbf{Q}$ es libre de torsión, pues

   $$zq = 0 \Longrightarrow z = 0 \quad o \quad q = 0$$

   Sin embargo, $\mathbf{Q}$ no puede ser libre, pues dos números racionales forman una familia ligada y un único racional no puede generar $\mathbf{Q}$. En efecto, sea $m/n \in \mathbf{Q}$. Sea p un primo no divisor de n. Entoces,

   $$\frac{1}{p} \neq z\frac{m}{n} \, \forall z \in \mathbf{Z}$$

   (2 puntos cada una)

2. Describir razonadamente los subgrupos de Sylow del grupo alternado de grado 5 (10 puntos).

   $|A_5| = 60$ da $2, 3, 5$-Sylows de órdenes $4, 3, 5$.

   Puesto que A_5 es normal en S_5 , $P \cap A_5$ es un p-Sylow de A_5; como, los 5 y 3-Sylow de S_5 están formados por permutaciones pares, están dentro de A_5, y los subgrupos de Sylow buscados para $p = 3, 5$ son los de S_5 que ya vimos (ver problema 12 de la hoja de problemas sobre teoría de Sylow).

   Para los 2-Sylow, notemos que el V de Klein es un subgrupo de A_5, luego todos son, por conjugación, así:

$$\{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$
$$\{1, (1\ 2)(3\ 5), (1\ 3)(2\ 5), (1\ 5)(2\ 3)\}$$
$$\{1, (1\ 2)(4\ 5), (1\ 4)(2\ 5), (1\ 5)(2\ 4)\}$$
$$\{1, (1\ 3)(4\ 5), (1\ 4)(3\ 5), (1\ 5)(3\ 4)\}$$
$$\{1, (2\ 3)(4\ 5), (2\ 4)(3\ 5), (2\ 5)(3\ 4)\}$$

   que dan exactamente las 15 permutaciones de tipo (2,2): $(a\ b)$ lo puedo elegir de 10 maneras y ahora $(a\ b)(c\ d)$ de $10 * 3 = 30$ maneras distintas; puesto que $(a\ b)(c\ d) = (c\ d)(a\ b)$ se obtienen 15 exactamente.